

Mathematik für Anwender II

Vorlesung 42

Lineare Transformationen

Entkoppelte Differentialgleichungssysteme kann man lösen, indem man die einzelnen eindimensionalen Komponenten löst. Manchmal kann eine Differentialgleichung erst durch eine lineare Transformation entkoppelt werden. Eine lineare Transformation ist einfach eine bijektive lineare Abbildung φ zwischen zwei Vektorräumen V und W . Zu einem Vektorfeld F auf V möchte man ein Vektorfeld G auf W definieren derart, dass sich die Lösungen der zugehörigen Differentialgleichungssysteme entsprechen. Dies geschieht durch

$$G(t, y) = \varphi(F(t, \varphi^{-1}(y))).$$

Zu einem Punkt $y \in W$ betrachtet man also den Urbildpunkt $\varphi^{-1}(y)$, wertet dort (bei unverändertem Zeitpunkt t) das Vektorfeld F aus und transportiert das Ergebnis mittels φ wieder nach W . Besonders übersichtlich wird die Situation durch das folgende kommutative Diagramm.

$$\begin{array}{ccc} I \times V & \xrightarrow{F} & V \\ \downarrow & & \downarrow \\ I \times W & \xrightarrow{G} & W \end{array} .$$

LEMMA 42.1. *Es sei*

$$\varphi: V \longrightarrow W$$

ein Isomorphismus zwischen den endlichdimensionalen reellen Vektorräumen V und W und sei

$$F: I \times V \longrightarrow V, (t, x) \longmapsto F(t, x),$$

ein Vektorfeld auf V . Es sei G das durch

$$G(t, y) := \varphi(F(t, \varphi^{-1}(y)))$$

definierte Vektorfeld auf W . Dann ist

$$\alpha: J \longrightarrow V$$

eine Lösung des Anfangswertproblems

$$x' = F(t, x) \text{ mit } x(t_0) = x_0$$

genau dann, wenn $\varphi \circ \alpha$ eine Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = G(t, y) \text{ mit } y(t_0) = \varphi(x_0)$$

ist.

Beweis. Da mit φ auch die Umkehrabbildung φ^{-1} eine lineare Isomorphie ist, genügt es, die eine Richtung zu zeigen. Sei also α eine Lösung des Anfangswertproblems zu F . Dann gelten unter Verwendung von Lemma 34.10 für $\varphi \circ \alpha$ die Gleichheiten

$$\begin{aligned} (\varphi \circ \alpha)'(t) &= \varphi(\alpha'(t)) \\ &= \varphi(F(t, \alpha(t))) \\ &= (\varphi \circ F)(t, \alpha(t)) \\ &= (\varphi \circ F \circ (\text{Id} \times \varphi^{-1}))(t, (\varphi \circ \alpha)(t)) \\ &= G(t, (\varphi \circ \alpha)(t)). \end{aligned}$$

Ferner gilt

$$(\varphi \circ \alpha)(t_0) = \varphi(\alpha(t_0)) = \varphi(x_0).$$

□

Wenn das Vektorfeld F nur auf einer offenen Menge $U \subseteq I \times V$ definiert ist, so ist entsprechend das Vektorfeld G auf (der ebenfalls offenen Menge) $(\text{Id} \times \varphi)(U) \subseteq I \times W$ definiert. Das Lemma gilt auch in dieser Situation.

BEISPIEL 42.2. Wir betrachten die gewöhnliche Differentialgleichung zum Vektorfeld

$$F(t, x, y) = (tx + t^3, y^2).$$

Dieses System ist entkoppelt und besteht aus den beiden einzelnen Gleichungen (in jeweils einer Raumvariablen)

$$x' = tx + t^3 \text{ und } y' = y^2.$$

Eine Lösung der linken Differentialgleichung ist $x(t) = -t^2 - 2$, eine Lösung der rechten ist $y(t) = -t^{-1}$. Daher ist

$$\begin{pmatrix} -t^2 - 2 \\ -t^{-1} \end{pmatrix}$$

eine Lösung zu F . Wir betrachten nun die lineare Transformation

$$\varphi = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$$

mit der inversen Matrix

$$\varphi^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Das transformierte Vektorfeld ist

$$\begin{aligned} &G(t, u, v) \\ &= \varphi(F(t, \varphi^{-1}(u, v))) \\ &= \varphi(F(t, -2u - 3v, 3u + 4v)) \\ &= \varphi(t(-2u - 3v) + t^3, (3u + 4v)^2) \\ &= \varphi(t(-2u - 3v) + t^3, 9u^2 + 24uv + 16v^2) \\ &= (4(t(-2u - 3v) + t^3) + 3(9u^2 + 24uv + 16v^2), \\ &\quad -3(t(-2u - 3v) + t^3) - 2(9u^2 + 24uv + 16v^2)) \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} -8tu - 12tv + 4t^3 + 27u^2 + 72uv + 48v^2, \\ 6tu + 9tv - 3t^3 - 18u^2 - 48uv + 32v^2. \end{pmatrix}$$

Für die zu G gehörende Differentialgleichung $\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = G(t, u, v)$ ist gemäß Lemma 42.2

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} -t^2 - 2 \\ -t^{-1} \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -4t^2 - 8 - 3t^{-1} \\ 3t^2 + 6 + 2t^{-1} \end{pmatrix}$$

eine Lösung.

Lineare Differentialgleichungssysteme

DEFINITION 42.3. Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes reelles Intervall. Eine Differentialgleichung der Form

$$v' = Mv,$$

wobei

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

eine Matrix ist, deren Einträge allesamt Funktionen

$$a_{ij}: I \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto a_{ij}(t),$$

sind, heißt *homogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung* oder *homogenes lineares gewöhnliches Differentialgleichungssystem*.

Es handelt sich also um die Differentialgleichung zum Vektorfeld

$$f: I \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, (t, v) \longmapsto f(t, v) = (M(t))v = \begin{pmatrix} a_{11}(t)v_1 + \cdots + a_{1n}(t)v_n \\ \vdots \\ a_{n1}(t)v_1 + \cdots + a_{nn}(t)v_n \end{pmatrix}.$$

Dieses Vektorfeld ist zu jedem fixierten Zeitpunkt $t \in I$ eine lineare Abbildung

$$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, v \longmapsto M(t)v.$$

Ausgeschrieben liegt das Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} v_1' \\ \vdots \\ v_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t)v_1 + \cdots + a_{1n}(t)v_n \\ \vdots \\ a_{n1}(t)v_1 + \cdots + a_{nn}(t)v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

vor.

Für lineare Differentialgleichungssysteme gibt es wieder eine inhomogene Variante.

DEFINITION 42.4. Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes reelles Intervall. Eine Differentialgleichung der Form

$$v' = Mv + z,$$

wobei

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

eine Matrix ist, deren Einträge allesamt Funktionen

$$a_{ij}: I \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto a_{ij}(t),$$

sind und wobei

$$z: I \longrightarrow \mathbb{R}^n, t \longmapsto z(t) = \begin{pmatrix} z_1(t) \\ \vdots \\ z_n(t) \end{pmatrix},$$

eine Abbildung ist, heißt *inhomogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung* oder *inhomogenes lineares gewöhnliches Differentialgleichungssystem*. Die Abbildung z heißt dabei *Störabbildung*.

Insgesamt liegt das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} v_1' \\ \vdots \\ v_n' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_{11}(t)v_1 + \cdots + a_{1n}(t)v_n + z_1(t) \\ \vdots \\ a_{n1}(t)v_1 + \cdots + a_{nn}(t)v_n + z_n(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1(t) \\ \vdots \\ z_n(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

vor.

Die explizite Lösbarkeit eines solchen Systems hängt natürlich von der Kompliziertheit der beteiligten Funktionen a_{ij} und z_i ab. In der folgenden Situation kann man das System auf einzelne lineare Differentialgleichungen zurückführen und dadurch sukzessive lösen.

LEMMA 42.5. Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und es liege eine inhomogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung der Form

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

mit stetigen Funktionen $a_{ij}: I \rightarrow \mathbb{R}$ und $z_i: I \rightarrow \mathbb{R}$ und den Anfangsbedingungen

$$v_i(t_0) = w_i \in \mathbb{R} \text{ für } i = 1, \dots, n \text{ (} t_0 \in I \text{)}$$

vor. Dann lässt sich diese Gleichung lösen, indem man sukzessive unter Verwendung der zuvor gefundenen Lösungen die inhomogenen linearen gewöhnlichen Differentialgleichungen in einer Variablen, nämlich

$$v_n' = a_{nn}(t)v_n + z_n(t) \text{ mit } v_n(t_0) = w_n,$$

$$v_{n-1}' = a_{n-1,n-1}(t)v_{n-1} + a_{n-1,n}(t)v_n(t) + z_{n-1}(t) \text{ mit } v_{n-1}(t_0) = w_{n-1},$$

$$v_{n-2}' = a_{n-2,n-2}(t)v_{n-2} + a_{n-2,n-1}(t)v_{n-1}(t) + a_{n-2,n}(t)v_n(t) + z_{n-2}(t) \text{ mit } v_{n-2}(t_0) = w_{n-2},$$

⋮

$$v_1' = a_{11}(t)v_1 + a_{12}(t)v_2(t) + \dots + a_{1n}(t)v_n(t) + z_1(t) \text{ mit } v_1(t_0) = w_1,$$

löst.

Beweis. Das ist trivial. □

Die Lösungen eines solchen linearen Differentialgleichungssystems in oberer Dreiecksgestalt stehen also in Bijektion zu den Lösungen der n linearen inhomogenen Differentialgleichungen in einer Ortsvariablen, wobei die Störfunktionen jeweils mit den anderen Lösungen in der beschriebenen Weise zusammenhängen. Insbesondere übertragen sich Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen.

Auch wenn man ein homogenes System lösen möchte, so muss man in den Einzelschritten inhomogene Differentialgleichungen lösen.

BEISPIEL 42.6. Wir betrachten das homogene lineare Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \frac{1}{t} & t-1 \\ 0 & \frac{2t}{t^2+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

für $t > 0$. Die zweite Zeile dieses Systems bedeutet

$$y' = \frac{2t}{t^2+1} \cdot y,$$

das ist eine homogene lineare Differentialgleichung in einer Variablen. Ihre Lösungen sind gemäß Satz 29.2 gleich

$$y(t) = c(t^2+1) = ct^2 + c$$

mit einem $c \in \mathbb{R}$. Die erste Zeile des Systems führt daher auf

$$\begin{aligned} x' &= \frac{1}{t}x + (t-1)y \\ &= \frac{1}{t}x + c(t-1)(t^2+1) \\ &= \frac{1}{t}x + c(t^3 - t^2 + t - 1). \end{aligned}$$

Dies ist eine inhomogene lineare Differentialgleichung in einer Variablen. Die zugehörige homogene Gleichung $x' = \frac{1}{t}x$ besitzt t als eine Lösung. Nach Satz 29.10 müssen wir eine Stammfunktion von

$$c \frac{t^3 - t^2 + t - 1}{t} = c \left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{t} \right)$$

finden, eine solche ist

$$c \left(\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + t + \ln |t| \right) + d.$$

Daher ist

$$t \left(c \left(\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + t + \ln |t| \right) + d \right) = \frac{c}{3}t^4 - \frac{c}{2}t^3 + ct^2 - ct \ln |t| + dt$$

die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung. Also ist die allgemeine Lösung des Systems gleich

$$\begin{pmatrix} \frac{c}{3}t^4 - \frac{c}{2}t^3 + ct^2 - ct \ln |t| + dt \\ ct^2 + c \end{pmatrix}.$$

Lineare Differentialgleichungssysteme mit konstanten Koeffizienten

Falls die Funktionen a_{ij} alle konstant sind, so spricht man von einem *linearen Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten*, welche im Wesentlichen mit Mitteln der linearen Algebra gelöst werden können. Dazu ist es sinnvoll, von vornherein auch komplexe Koeffizienten zuzulassen.

DEFINITION 42.7. Eine Differentialgleichung der Form

$$v' = Mv,$$

wobei

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

eine Matrix mit Einträgen $a_{ij} \in \mathbb{C}$ ist, heißt *homogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten* oder *homogenes lineares gewöhnliches Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten*.

DEFINITION 42.8. Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Eine Differentialgleichung der Form

$$v' = Mv + z,$$

wobei

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

eine Matrix mit Einträgen $a_{ij} \in \mathbb{C}$ ist und

$$z: I \longrightarrow \mathbb{C}^n$$

eine Abbildung, heißt *inhomogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten* oder *inhomogenes lineares gewöhnliches Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten*.

Die Störfunktion muss also nicht konstant sein.

BEMERKUNG 42.9. Es sei

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y + h(t) = 0$$

eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten, d.h. die a_i sind reelle (oder komplexe) Zahlen. Das gemäß Lemma 38.4 zugehörige Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_{n-2} \\ v_{n-1} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{n-1} \\ g(t, v_0, v_1, \dots, v_{n-1}) \end{pmatrix}$$

mit

$$v_i := y^{(i)}$$

wird in dieser Situation zum linearen Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten

$$\begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_{n-2} \\ v_{n-1} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_{n-2} \\ v_{n-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ -h(t) \end{pmatrix}.$$