Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2012/2013**

Invariantentheorie

Vorlesung 16

In dieser Vorlesung führen wir eine wichtige Konstruktion für Moduln ein, das sogenannte *Tensorprodukt*. Die Eigenschaften des konstruierten Objektes sind dabei wichtiger als die Konstruktion selbst.

Das Tensorprodukt von Moduln

Definition 16.1. Es sei R ein kommutativer Ring und seien $V_1, \ldots, V_n, W$ R-Moduln. Eine Abbildung

$$\psi\colon V_1 \times \cdots \times V_n \longrightarrow W$$

heißt *R-multilinear*, wenn für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ und jedes $(n-1)$-Tupel $(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n)$ (mit $v_j \in V_j$) die induzierte Abbildung

$$V_i \longrightarrow W,\, u \longmapsto \psi\left(v_1, \ldots, v_{i-1}, u, v_{i+1}, \ldots, v_n\right),$$

R-linear ist.

Bei $n = 2$ spricht man von *bilinear*.

Definition 16.2. Es sei R ein kommutativer Ring und $V_1, \ldots, V_n, W$ seien R-Moduln. Es sei F der von sämtlichen Symbolen $v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_n$ (mit $v_i \in V_i$) erzeugte freie R-Modul. Es sei $U \subseteq F$ der von allen Elementen der Form

(1) $r\left(v_1 \otimes \cdots \otimes v_{i-1} \otimes v_i \otimes v_{i+1} \otimes \cdots \otimes v_n\right) - v_1 \otimes \cdots \otimes v_{i-1} \otimes r v_i \otimes v_{i+1} \otimes \cdots \otimes v_n$,
(2) $v_1 \otimes \cdots \otimes v_{i-1} \otimes (u + w) \otimes v_{i+1} \otimes \cdots \otimes v_n - v_1 \otimes \cdots \otimes v_{i-1} \otimes u \otimes v_{i+1} \otimes \cdots \otimes v_n - v_1 \otimes \cdots \otimes v_{i-1} \otimes w \otimes v_{i+1} \otimes \cdots \otimes v_n$,

erzeugte R-Untermodul. Dann nennt man den Restklassenmodul F/U das *Tensorprodukt* der V_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$. Es wird mit

$$V_1 \otimes_R V_2 \otimes_R \cdots \otimes_R V_n$$

bezeichnet.

Die Bilder von $(v_1, \ldots, v_n)$ in $V_1 \otimes_R V_2 \otimes_R \cdots \otimes_R V_n$ bezeichnet man wieder mit $v_1 \otimes \cdots \otimes v_n$. Jedes Element aus $V_1 \otimes_R \cdots \otimes_R V_n$ besitzt eine (nicht eindeutige) Darstellung als

$$a_1 v_{1,1} \otimes \cdots \otimes v_{1,n} + \ldots + a_m v_{m,1} \otimes \cdots \otimes v_{m,n}$$

(mit $a_i \in R$ und $v_{i,j} \in V_j$). Insbesondere bilden die (*zerlegbaren Tensoren*) $v_1 \otimes \cdots \otimes v_n$ ein R-Modulerzeugendensystem des Tensorprodukts. Die definierenden Erzeuger des Untermoduls werden zu Gleichungen im Tensorprodukt, sie drücken die Multilinearität aus. Insbesondere gilt

$$v_1 \otimes \cdots \otimes v_{i-1} \otimes rv_i \otimes v_{i+1} \otimes \cdots \otimes v_n \;=\; v_1 \otimes \cdots \otimes v_{j-1} \otimes rv_j \otimes v_{j+1} \otimes \cdots \otimes v_n$$

für beliebige i, j.

Wichtiger als die Konstruktion des Tensorprodukts ist die folgende *universelle Eigenschaft.*

Lemma 16.3. *Es sei R ein kommutativer Ring und $V_1, \ldots, V_n$ seien R-Moduln.*

(1) *Die Abbildung*

$$\pi\colon\; V_1 \times \cdots \times V_n \longrightarrow V_1 \otimes_R \cdots \otimes_R V_n,\; (v_1, \ldots, v_n) \longmapsto v_1 \otimes \cdots \otimes v_n,$$

ist R-multilinear.

(2) *Es sei W ein weiterer R-Modul und*

$$\psi\colon\; V_1 \times \cdots \times V_n \longrightarrow W$$

eine multilineare Abbildung. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte R-lineare Abbildung

$$\bar{\psi}\colon\; V_1 \otimes_R \cdots \otimes_R V_n \longrightarrow W$$

mit $\psi = \bar{\psi} \circ \pi$.

Beweis. (1) folgt unmittelbar aus der Definition des Tensorprodukts. (2). Da die $v_1 \otimes \cdots \otimes v_n$ ein R-Modulerzeugendensystem von $V_1 \otimes_R \cdots \otimes_R V_n$ sind und

$$\bar{\psi}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) \;=\; \psi(v_1, \ldots, v_n)$$

gelten muss, kann es maximal eine solche lineare Abbildung geben. Zur Existenz betrachten wir den freien Modul F aus der Konstruktion des Tensorprodukts. Die Symbole $v_1 \otimes \cdots \otimes v_n$ bilden eine Basis von F, daher legt die Vorschrift $\varphi\,(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) := \psi(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n)$ eine lineare Abbildung

$$F \longrightarrow W$$

fest. Wegen der Multilinearität von ψ wird der Untermodul U auf 0 abgebildet. Daher induziert diese Abbildung nach dem Faktorisierungssatz einen R-Modulhomomorphismus

$$F/U \cong V_1 \otimes_R \cdots \otimes_R V_n \longrightarrow W.$$

□

Das Tensorprodukt ist durch diese universelle Eigenschaft bis auf (eindeutige) Isomorphie festgelegt. Wenn es also einen R-Modul T zusammen mit einer multilinearen Abbildung $V_1 \times \cdots \times V_n \to T$ derart gibt, dass jede multilineare Abbildung in einen R-Modul W eindeutig über T mit einer linearer

Abbildung von T nach W faktorisiert, so gibt es einen eindeutig bestimmten Isomorphismus zwischen T und dem Tensorprodukt $V_1 \otimes_R \cdots \otimes_R V_n$. Daher ist diese universelle Eigenschaft wichtiger als die oben durchgeführte Konstruktion des Tensorprodukts.

Proposition 16.4. *Es sei R ein kommutativer Ring und U, V, W seien R-Moduln. Dann gelten folgende Aussagen.*

(1) *Es ist*
$$U \otimes_R V \cong V \otimes_R U.$$
(2) *Es ist*
$$U \otimes_R (V \otimes_R W) \cong (U \otimes_R V) \otimes_R W.$$
(3) *Es ist*
$$U \otimes_R (V \oplus W) \cong (U \otimes_R V) \oplus (U \otimes_R W).$$

Beweis. Siehe Aufgabe 16.2. □

Proposition 16.5. *Es sei R ein kommutativer Ring und seien U, V, W, M R-Moduln. Dann gelten folgende Aussagen.*

(1) *Zu einem R-Modulhomomorphismus $\varphi\colon U \to V$ gibt es einen natürlichen R-Modulhomomorphismus $\varphi \otimes_R \mathrm{Id}_M\colon U \otimes_R M \to V \otimes_R M$.*
(2) *Zu einer exakten Sequenz*
$$U \longrightarrow V \longrightarrow W \longrightarrow 0$$
von R-Moduln ist auch
$$U \otimes_R M \longrightarrow V \otimes_R M \longrightarrow W \otimes_R M \longrightarrow 0$$
exakt.

Beweis. (1). Die Abbildung
$$U \times M \longrightarrow V \otimes_R M,\ (u, m) \longmapsto \varphi(u) \otimes m,$$
ist R-bilinear und induziert daher einen R-Modulhomomorphismus
$$U \otimes_R M \longrightarrow V \otimes_R M.$$
(2). Die Surjektivität der Abbildung
$$V \otimes_R M \longrightarrow W \otimes_R M$$
ist klar, da die $w \otimes m$ ein R-Modulerzeugendensystem von $W \otimes_R N$ bilden und diese im Bild der Abbildung liegen. Für die Exaktheit an der anderen Stelle müssen wir die Isomorphie
$$V \otimes_R M / \operatorname{bild}(U \otimes_R M) \cong W \otimes_R M$$
nachweisen. Dazu beweisen wir für diesen Restklassenmodul, dass er die universelle Eigenschaft des Tensorprodukts erfüllt. Es sei also
$$W \times M \longrightarrow N$$

eine R-multilineare Abbildung in einen R-Modul N. Somit liegt auch eine eindeutige multilineare Abbildung

$$\psi\colon\, V \times M \longrightarrow N$$

und damit eine R-lineare Abbildung

$$\tilde{\psi}\colon\, V \otimes_R M \longrightarrow N$$

vor. Wegen

$$\psi(\text{bild } U \times M) \,=\, 0$$

ist

$$\tilde{\psi}(\text{bild } U \otimes_R M) \,=\, 0$$

und daher gibt es eine eindeutige Faktorisierung

$$V \otimes_R M / \text{ bild } (U \otimes_R M) \longrightarrow N.$$

$\square$

Ringwechsel

Wir betrachten jetzt den Fall des Tensorproduktes, wenn über R ein R-Modul M und eine kommutative R-Algebra R' vorliegt.

Definition 16.6. Zu einem R-Modul M und einem Ringhomomorphismus

$$R \longrightarrow R'$$

zwischen kommutativen Ringen nennt man $R' \otimes_R M$ den *durch Ringwechsel gewonnenen R'-Modul.*

Beispiel 16.7. Es sei V ein reeller Vektorraum. Die Tensorierung mit der $\mathbb{R}$-Algebra $\mathbb{C}$, also

$$V_{\mathbb{C}} \,:=\, \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V,$$

nennt man die *Komplexifizierung* von V. Wenn V die Dimension n besitzt, so besitzt $V_{\mathbb{C}}$ als komplexer Vektorraum ebenfalls die Dimension n. Wenn man $V_{\mathbb{C}}$ als reellen Vektorraum betrachtet, so besitzt er die reelle Dimension $2n$.

Proposition 16.8. *Es sei R ein kommutativer Ring, M ein R-Modul und $R \to R'$ ein Ringhomomorphismus. Dann gelten folgende Aussagen.*

(1) *Das Tensorprodukt $R' \otimes_R M$ ist ein R'-Modul.*
(2) *Es gibt einen kanonischen R-Modulhomomorphismus*

$$M \longrightarrow R' \otimes_R M,\, v \longmapsto 1 \otimes v.$$

Bei $R = R'$ ist dies ein Isomorphismus.
(3) *Zu einem R-Modulhomomorphismus $\varphi\colon\, M \to N$ ist die induzierte Abbildung*

$$\operatorname{Id}_{R'} \otimes \varphi\colon\, R' \otimes_R M \longrightarrow R' \otimes_R N$$

ein R'-Modulhomomorphismus.

(4) *Zu* $M = R^n$ *ist*

$$R' \otimes_R R^n \cong (R')^n .$$

(5) *Zu einem weiteren Ringhomomorphismus* $R' \to R''$ *ist*

$$R'' \otimes_R M \cong R'' \otimes_{R'} (R' \otimes_R M)$$

(eine Isomorphie von R''*-Moduln).*

Beweis. (1). Die Multiplikation

$$R' \times R' \longrightarrow R',\ (r,s) \longmapsto rs,$$

ist R'-bilinear und führt nach Lemma 16.3 zu einer R'-linearen Abbildung

$$R' \otimes_R R' \longrightarrow R'.$$

Dies induziert nach Proposition 16.4 (2) und nach Proposition 16.5 einen R-Modulhomomorphismus

$$R' \otimes_R (R' \otimes_R M) \cong (R' \otimes_R R') \otimes_R M \longrightarrow R' \otimes_R M.$$

Dies ergibt eine wohldefinierte Skalarmultiplikation

$$R' \times (R' \otimes_R M) \longrightarrow (R' \otimes_R M)\,,$$

die explizit durch[1]

$$s \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} r_j \otimes m_j \right) = \sum_{j=1}^{n} (s r_j) \otimes m_j$$

gegeben ist. Aus dieser Beschreibung folgen direkt die Eigenschaften einer Skalarmultiplikation. (2). Die R-Homomorphie folgt direkt aus der Bilinearität des Tensorprodukts. Bei $R' = R$ ist die Abbildung surjektiv. Die Skalarmultiplikation $R \times M \to M$ induziert eine R-lineare Abbildung

$$R \otimes_R M \longrightarrow M.$$

Die Verknüpfung der kanonischen Abbildung $M \to R \otimes_R M$ mit dieser Abbildung ist die Identität auf M, so dass die erste Abbildung auch injektiv ist. (3) folgt aus der expliziten Beschreibung in (1). (4) folgt aus Proposition 16.4 (3).(5). Nach Teil (2) haben wir einerseits eine R-lineare Abbildung $M \to R' \otimes_R M$. Dies führt zu einer R-multilinearen Abbildung

$$R'' \times M \longrightarrow R'' \times (R' \otimes_R M) \longrightarrow R'' \otimes_{R'} (R' \otimes_R M)\ ,$$

die eine R-lineare Abbildung

$$R'' \otimes_R M \longrightarrow R'' \otimes_{R'} (R' \otimes_R M)$$

induziert. Andererseits haben wir eine R'-lineare Abbildung

$$R' \otimes_R M \longrightarrow R'' \otimes_R M.$$

[1] Wenn man die Skalarmultiplikation direkt über diese Formel definieren möchte hat man das Problem der Wohldefiniertheit.

Rechts steht ein R''-Modul, daher kann man die Skalarmultiplikation als eine R'-multilineare Abbildung

$$R'' \times (R' \otimes_R M) \longrightarrow R'' \otimes_R M$$

auffassen, die ihrerseits zu einer R'-linearen Abbildung

$$R'' \otimes_{R'} (R' \otimes_R M) \longrightarrow R'' \otimes_R M$$

führt. Diese beiden Abbildungen sind invers zueinander, was man auf den zerlegbaren Tensoren überprüfen kann. Daran sieht man auch, dass sich die R''-Multiplikationen entsprechen. □

Proposition 16.9. *Es sei R ein kommutativer Ring und M ein R-Modul. Dann gelten folgende Aussagen.*

(1) *Zu einem multiplikativen System $S \subseteq R$ ist $M_S \cong R_S \otimes_R M$.*
(2) *Zu einem Ideal $I \subseteq R$ ist $M/IM \cong R/I \otimes_R M$.*

Beweis. Siehe Aufgabe 16.4. □

Beispiel 16.10. Zu einem Integritätsbereich R mit Quotientenkörper $Q(R)$ und einem R-Modul M erhält man im Tensorprodukt $Q(R) \otimes_R M$ einen Modul über dem Quotientenkörper $Q(R)$, also einen Vektorraum. Dieser Vektorraum trägt häufig schon wesentliche Informationen über den Modul. Seine Dimension nennt man auch den *Rang* des Moduls.

Beispiel 16.11. Zu jeder kommutativen Gruppe H und jedem kommutativen Ring R enthält man im Tensorprodukt $R \otimes_{\mathbb{Z}} H$ einen R-Modul. Wenn H endlich erzeugt und die Zerlegung (vergleiche den Hauptsatz über endlich erzeugte kommutative Gruppen)

$$H \cong \mathbb{Z}^r \times \mathbb{Z}/(n_1) \times \cdots \times \mathbb{Z}/(n_s)$$

vorliegt, so ist der tensorierte Modul die direkte Summe aus R^r und den

$$R \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/(n_j) \cong R/(n_j R),$$

wobei deren Gestalt von der Charakteristik des Ringes abhängt.

Beispiel 16.12. Es sei G eine Gruppe, die auf einem kommutativen Ring R als Gruppe von Ringautomorphismen operiere, und es sei R^G der Invariantenring. Dann gehört zu jedem R^G-Modul M das Tensorprodukt $R \otimes_{R^G} M$. Auf diesem R-Modul operiert die Gruppe G in natürlicher und mit der Operation auf R verträglichen Weise, siehe Aufgabe 16.10.