Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2013/2014**

Analysis I

Arbeitsblatt 7

Übungsaufgaben

Aufgabe 7.1. Zeige, dass das *Quadrieren*

$$\mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0},\ x \longmapsto x^2,$$

eine wachsende Funktion ist. Man folgere daraus, dass auch die Quadratwurzel

$$\mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0},\ u \longmapsto \sqrt{u},$$

eine wachsende Funktion ist.

Aufgabe 7.2. Zeige, dass für nichtnegative reelle Zahlen s und t die Beziehung

$$\sqrt{st} = \sqrt{s}\sqrt{t}$$

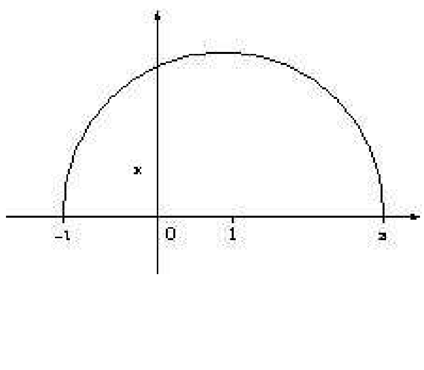
besteht.

Aufgabe 7.3. Begründe geometrisch, dass die Wurzeln $\sqrt{n}$, $n \in \mathbb{N}$, als Länge von „natürlichen“ Strecken vorkommen.

Tipp: Satz des Pythagoras.

Aufgabe 7.4. Zeige, dass man zu jeder gegebenen Streckenlänge a (also jedem $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$) die Quadratwurzel $\sqrt{a}$ mit Zirkel und Lineal konstruieren kann.

Tipp: Satz des Pythagoras und Bild unten.



Aufgabe 7.5. Formuliere und beweise die *Lösungsformel für eine quadratische Gleichung*

$$ax^2 + bx + c = 0$$

mit $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

Aufgabe 7.6. Es sei x eine reelle Zahl, von welcher der Beginn der Dezimalbruchentwicklung gleich

$$0,3333333333...$$

(die weiterer Ziffern sind nicht bekannt). Was kann man über die Dezimalbruchentwicklung von $3x$ sagen? In welchem (möglichst kleinen) Intervall liegt $3x$?

Aufgabe 7.7. Die beiden reellen Zahlen x und y seien durch ihre Dezimalbruchentwicklung

$$x = 0, z_1 z_2 z_3 \ldots$$

und

$$y = 0, u_1 u_2 u_3 \ldots$$

gegeben. Man gebe unter Bezug auf diese Zifferentwicklungen eine Folge mit rationalen Gleidern an, die gegen xy konvergiert.

Vor der nächsten Aufgabe erinnern wir an die beiden folgenden Definitionen.

Zu zwei reellen Zahlen x und y heißt

$$\frac{x+y}{2}$$

das *arithmetische Mittel*.

Zu zwei nichtnegativen reellen Zahlen x und y heißt

$$\sqrt{x \cdot y}$$

das *geometrische Mittel*.

Aufgabe 7.8. Es seien x und y zwei nichtnegative reelle Zahlen. Zeige, dass das arithmetische Mittel der beiden Zahlen mindestens so groß wie ihr geometrisches Mittel ist.

Aufgabe 7.9. Es seien $b > a > 0$ positive reelle Zahlen. Wir definieren rekursiv zwei Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ durch $x_0 = a$, $y_0 = b$ und durch

$$x_{n+1} = \text{ geometrisches Mittel von } x_n \text{ und } y_n\,,$$

$$y_{n+1} = \text{ arithmetisches Mittel von } x_n \text{ und } y_n\,.$$

Zeige, dass $[x_n, y_n]$ eine Intervallschachtelung ist.

Aufgabe 7.10. Es sei I_n, $n \in \mathbb{N}$, eine Intervallschachtelung in $\mathbb{R}$ und sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge mit $x_n \in I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass diese Folge gegen die durch die Intervallschachtelung bestimmte Zahl konvergiert.

Aufgabe 7.11. Sei $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $k \in \mathbb{N}_+$. Zeige, dass zu einem beliebigen Startwert $x_0 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ durch

$$x_{n+1} := \frac{x_n + \frac{a}{x_n^{k-1}}}{2}$$

eine Folge definiert wird, die gegen $\sqrt[k]{a}$ konvergiert.

Aufgabe 7.12. Es sei K ein angeordneter Körper. Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in K, die eine konvergente Teilfolge enthalte. Zeige, dass die Folge konvergiert.

Aufgabe 7.13. Es sei K ein angeordneter Körper und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine wachsende Folge in K. Zeige, dass die Folge genau dann konvergiert, wenn die Menge $\{x_n | \, n \in \mathbb{N}\}$ ein Supremum besitzt.

Aufgabe 7.14. Es seien A und B beschränkte Teilmengen von $\mathbb{R}$. Ferner sei $A + B := \{a + b | \, a \in A, \, b \in B\}$ und $A - B := \{a - b | \, a \in A, \, b \in B\}$.

(1) Zeige, dass $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.
(2) Wie lautet die entsprechende Formel für $\sup(A - B)$?
(3) Zeige, dass $\sup(A \cup B) = \max\{\sup(A), \sup(B)\}$.
(4) Was lässt sich über $\sup(A \cap B)$ sagen?
(5) Wie lautet die Entsprechung zu 3. für unendlich viele Mengen?

Aufgabe 7.15. Es sei $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $k \in \mathbb{N}$, $M = \left\{x \in \mathbb{R}_{\geq 0} | \, x^k \leq a\right\}$ und $s = \sup(M)$. Zeige $s^k = a$.

Aufgabe 7.16. Es sei K ein angeordneter Körper, der nicht archimedisch angeordnet sei. Zeige, dass für K die Aussage das Satzes von Bolzano-Weierstraß nicht gilt.

Aufgabe 7.17. Zeige die folgenden Abschätzungen.

a) $\binom{n}{k} \cdot \frac{1}{n^k} \leq \frac{1}{k!}$,

b) $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

Aufgabe 7.18. Berechne mit einem Computer die ersten hundert Nachkommastellen im Zehnersystem von

$$e := \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n .$$

Für welches n wird diese Genauigkeit erreicht?

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 7.19. (3 Punkte)

Es sei I_n, $n \in \mathbb{N}$, eine Intervallschachtelung in $\mathbb{R}$. Zeige, dass der Durchschnitt

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$$

aus genau einem Punkt $x \in \mathbb{R}$ besteht.

Aufgabe 7.20. (3 Punkte)

Entscheide, ob die Folge

$$a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

konvergiert, und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

Aufgabe 7.21. (6 Punkte)

Zeige, dass jede Folge in $\mathbb{R}$ eine monotone Teilfolge besitzt.

Aufgabe 7.22. (5 Punkte)

Es sei K ein angeordneter Körper mit der Eigenschaft, dass in ihm jede nichtleere, nach oben beschränkte Teilmenge ein Supremum besitzt. Zeige, dass K vollständig ist.

Abbildungsverzeichnis