Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2011/2012**

Einführung in die mathematische Logik

Arbeitsblatt 3

Aufgabe 3.1. Formuliere die folgenden Beziehungen (ein- oder mehrstellige Prädikate) innerhalb der natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ allein mittels Gleichheit, Addition, Multiplikation und unter der Verwendung von aussagenlogischen Junktoren und Quantoren.

(1) $x \geq y$.
(2) $x > y$.
(3) x teilt y.
(4) x teilt nicht y.
(5) x ist eine Quadratzahl.
(6) x ist eine Primzahl.
(7) x ist keine Primzahl.
(8) x ist das Produkt von genau zwei verschiedenen Primzahlen.
(9) x wird von einer Primzahl geteilt.

Aufgabe 3.2. Formalisere in der arithmetischen Sprache (mit $+$ und $\cdot$) die folgenden (wahren) Aussagen.

(1) Wenn $x \geq y$ und $y \geq z$, so ist $x \geq z$.
(2) Wenn $x \geq y$ und $y \geq x$ gilt, so ist $x = y$.
(3) Für jede natürliche Zahl gibt es eine größere natürliche Zahl.
(4) Eine natürliche Zahl, für die es keine kleinere natürliche Zahl gibt, ist gleich 0.

Aufgabe 3.3. Schreibe die folgenden Aussagen mit Quantoren:

(1) Für jede natürliche Zahl gibt es eine größere Zahl.
(2) Für jede natürliche Zahl gibt es eine kleinere Zahl.
(3) Es gibt eine natürliche Zahl, die größer oder gleich jeder anderen natürlichen Zahl ist.
(4) Es gibt eine natürliche Zahl, die kleiner oder gleich jeder anderen natürlichen Zahl ist.

Welche sind wahr, welche falsch?

Aufgabe 3.4. Formalisiere die folgenden mengentheoretischen Fassungen einiger aristotelischer Syllogismen in der Prädikatenlogik erster Stufe.

(1) Modus Barbara: Aus $B \subseteq A$ und $C \subseteq B$ folgt $C \subseteq A$.
(2) Modus Celarent: Aus $B \cap A = \emptyset$ und $C \subseteq B$ folgt $C \cap A = \emptyset$.
(3) Modus Darii: Aus $B \subseteq A$ und $C \cap B \neq \emptyset$ folgt $C \cap A \neq \emptyset$.
(4) Modus Ferio: Aus $B \cap A = \emptyset$ und $C \cap B \neq \emptyset$ folgt $C \not\subseteq A$.
(5) Modus Baroco: Aus $B \subseteq A$ und $B \not\subseteq C$ folgt $A \not\subseteq C$.

AUFGABE 3.5. Formalisiere in der arithmetischen Sprache die folgenden wahren Aussagen.

(1) Es gibt unendlich viele Primzahlen.
(2) Jede natürliche Zahl ≥ 2 wird von einer Primzahl geteilt.

Wie sieht es mit der Aussage aus, dass jede natürliche Zahl eine Primfaktorzerlegung besitzt?

AUFGABE 3.6. Formalisiere in der arithmetischen Sprache die folgenden zahlentheoretischen Vermutungen.

(1) Die Goldbach-Vermutung.
(2) Die Vermutung über die Unendlichkeit der Primzahlzwillinge.
(3) Die Vermutung über die Unendlichkeit der Mersenne-Primzahlen.

Man beachte bei (3), dass das Potenzieren mit einem unbekannten Exponenten nicht zur arithmetischen Sprache gehört.

AUFGABE 3.7. Zeige, dass es kein gleichseitiges Dreieck gibt, dessen sämtliche Ecken rationale Koordinaten besitzen.

Diese Aufgabe ist nicht ganz einfach. Zur Lösung verwende man, dass $\sqrt{3}$ irrational ist und den Satz des Pythagoras.