

Analysis I

Vorlesung 15

Cauchy-Produkt von Reihen

DEFINITION 15.1. Zu zwei Reihen $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ und $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ komplexer Zahlen heißt die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \text{ mit } c_k = \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i}$$

das *Cauchy-Produkt* der beiden Reihen.

LEMMA 15.2. *Es seien*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ und } \sum_{k=0}^{\infty} b_k$$

zwei absolut konvergente Reihen komplexer Zahlen. Dann ist auch das Cauchy-Produkt $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ absolut konvergent und für die Summe gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k \right).$$

Beweis. Wir müssen für die Partialsummen

$$x_n = \sum_{i=0}^n a_i, \quad y_n = \sum_{j=0}^n b_j \text{ und } z_n = \sum_{k=0}^n c_k$$

zeigen, dass z_n gegen den Limes der Folge $(x_n y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert. Es ist

$$\begin{aligned} |z_n - x_n y_n| &= \left| \sum_{k=0}^n c_k - \left(\sum_{i=0}^n a_i \right) \left(\sum_{j=0}^n b_j \right) \right| \\ &= \left| \sum_{0 \leq i, j \leq n, i+j > n} a_i b_j \right| \\ &\leq \sum_{0 \leq i, j \leq n, i+j > n} |a_i| |b_j| \\ &\leq \left(\sum_{n/2 < i \leq n} |a_i| \right) \left(\sum_{j=0}^n |b_j| \right) \\ &\quad + \left(\sum_{n/2 < j \leq n} |b_j| \right) \left(\sum_{i=0}^n |a_i| \right) \end{aligned}$$

$$\leq \left(\sum_{n/2 < i \leq n} |a_i| \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} |b_j| \right) + \left(\sum_{n/2 < j \leq n} |b_j| \right) \left(\sum_{i=0}^{\infty} |a_i| \right).$$

Da die beiden Reihen absolut konvergieren, und $\sum_{n/2 < i \leq n} |a_i|$ und $\sum_{n/2 < j \leq n} |b_j|$ Nullfolgen sind (siehe Aufgabe 15.15), ist die rechte Seite insgesamt eine Nullfolge. Daher konvergiert die Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen das Produkt der Grenzwerte. Die absolute Konvergenz folgt aus dem bisher Bewiesenen mit dem Majorantenkriterium aus der Abschätzung $|c_k| \leq \sum_{i=0}^k |a_i| |b_{k-i}|$. \square

Potenzreihen

DEFINITION 15.3. Es sei $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von komplexen Zahlen und z eine weitere komplexe Zahl. Dann heißt die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

die *Potenzreihe* in z zu den Koeffizienten $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Durch Wahl geeigneter Koeffizienten kann man jede Reihe als Potenzreihe zu einer fixierten Zahl $z \in \mathbb{C}$, ansehen. Bei Potenzreihen ist es aber wichtig, dass man z variieren lässt und dann die Potenzreihe im Konvergenzbereich eine Funktion in z darstellt.

Genauer spricht man von einer Potenzreihe mit Entwicklungspunkt 0. Eine Potenzreihe mit *Entwicklungspunkt* $a \in \mathbb{C}$ ist ein Ausdruck der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n.$$

Eine wichtige Potenzreihe haben wir schon in der neunten Vorlesung kennengelernt, nämlich die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$, die für $|z| < 1$ konvergiert und dort die Funktion $1/(1 - z)$ darstellt. Eine weitere besonders wichtige Potenzreihe ist die Exponentialreihe, die für jede komplexe Zahl konvergiert und zur komplexen Exponentialfunktion führt.

Die Exponentialreihe und die komplexe Exponentialfunktion

DEFINITION 15.4. Für jedes $z \in \mathbb{C}$ heißt die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

die *Exponentialreihe* in z .

Dies ist also die Reihe

$$1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24} + \frac{z^5}{120} + \dots$$

SATZ 15.5. Für jedes $z \in \mathbb{C}$ ist die Exponentialreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

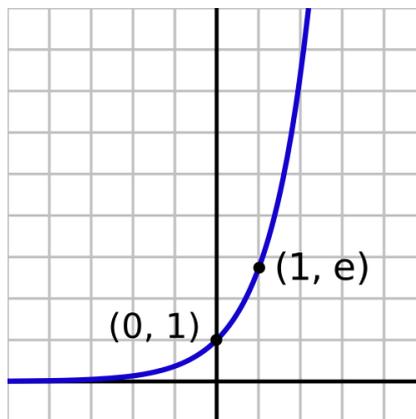
absolut konvergent.

Beweis. Für $z = 0$ ist die Aussage richtig. Andernfalls betrachten wir den Quotienten

$$\left| \frac{\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{z^n}{n!}} \right| = \left| \frac{z}{n+1} \right| = \frac{|z|}{n+1}.$$

Dies ist für $n \geq 2|z|$ kleiner als $1/2$. Aus dem Quotientenkriterium folgt daher die Konvergenz. \square

Aufgrund dieser Eigenschaft können wir die komplexe Exponentialfunktion definieren.



Der Graph der reellen Exponentialfunktion

DEFINITION 15.6. Die Abbildung

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, z \longmapsto \exp z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!},$$

heißt (komplexe) *Exponentialfunktion*.

Wir werden später sehen, dass diese Funktion für reelle Argumente die Exponentialfunktion zur Basis

$$\exp 1 = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \dots$$

ist, und dass $\exp 1$ mit der früher eingeführten eulerschen Zahl e übereinstimmt (Korollar 16.11 und Korollar 20.14).

Die folgende Aussage nennt man die *Funktionalgleichung für die Exponentialfunktion*.

SATZ 15.7. *Für komplexe Zahlen $z, w \in \mathbb{C}$ gilt*

$$\exp(z + w) = \exp z \cdot \exp w.$$

Beweis. Das Cauchy-Produkt der beiden Exponentialreihen ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

mit $c_n = \sum_{i=0}^n \frac{z^i}{i!} \frac{w^{n-i}}{(n-i)!}$. Diese Reihe ist nach Lemma 15.2 absolut konvergent und der Grenzwert ist das Produkt der beiden Grenzwerte. Andererseits ist der n -te Summand der Exponentialreihe von $z + w$ nach der allgemeinen binomischen Formel gleich

$$\frac{(z + w)^n}{n!} = \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} z^i w^{n-i} = c_n,$$

so dass die beiden Seiten übereinstimmen. □

KOROLLAR 15.8. *Die Exponentialfunktion*

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, z \longmapsto \exp z,$$

besitzt folgende Eigenschaften.

- (1) *Es ist $\exp 0 = 1$.*
- (2) *Für jedes $z \in \mathbb{C}$ ist $\exp(-z) = (\exp z)^{-1}$. Insbesondere ist $\exp z \neq 0$.*
- (3) *Für ganze Zahlen $n \in \mathbb{Z}$ ist $\exp n = (\exp 1)^n$.*
- (4) *Für reelles z ist $\exp z \in \mathbb{R}_+$.*
- (5) *Für reelle Zahlen $z > 0$ ist $\exp z > 1$ und für $z < 0$ ist $\exp z < 1$.*
- (6) *Die reelle Exponentialfunktion ¹ ist streng wachsend.*

Beweis. (1) folgt direkt aus der Definition. (2) folgt aus

$$\exp z \cdot \exp(-z) = \exp(z - z) = \exp 0 = 1$$

aufgrund von Satz 15.7. (3) folgt aus Satz 15.7 und (2). (4). Der Wert der Exponentialreihe für eine reelle Zahl ist wieder reell, da die reellen Zahlen in

¹Unter der reellen Exponentialfunktion verstehen wir hier die Einschränkung der komplexen Exponentialfunktion auf die reellen Zahlen. Wir werden bald sehen, dass sie mit der Exponentialfunktion zur Basis e übereinstimmt.

\mathbb{C} abgeschlossen² sind. Die Nichtnegativität ergibt sich aus

$$\exp z = \exp\left(\frac{z}{2} + \frac{z}{2}\right) = \exp \frac{z}{2} \cdot \exp \frac{z}{2} = \left(\exp \frac{z}{2}\right)^2 \geq 0.$$

(5). Für reelles x ist $\exp x \cdot \exp(-x) = 1$, so dass nach (4) ein Faktor ≥ 1 sein muss und der andere Faktor ≤ 1 . Für $x > 0$ ist

$$\exp x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n > \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-x)^n = \exp(-x),$$

da ja für gerades n die Summationsglieder übereinstimmen und für ungerades n die linke Seite größer als die rechte ist. Also ist $\exp x > 1$. (6). Für reelle $x > y$ ist $x - y > 0$ und daher nach (5) $\exp(x - y) > 1$, also

$$\exp x = \exp(x - y + y) = \exp(x - y) \exp y > \exp y.$$

□

Die trigonometrischen Reihen

DEFINITION 15.9. Für $z \in \mathbb{C}$ heißt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$$

die *Kosinusreihe* und

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

die *Sinusreihe* zu z .

Durch Vergleich mit der Exponentialreihe ergibt sich sofort, dass diese beiden Reihen für jedes z absolut konvergieren. Die zugehörigen Funktionen

$$\cos z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} \quad \text{und} \quad \sin z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

heißen *Kosinus* und *Sinus*. Beide Funktionen stehen unmittelbar in Zusammenhang mit der Exponentialfunktion, wobei man allerdings die komplexen Zahlen braucht, um diesen Zusammenhang zu erkennen.

SATZ 15.10. *Die Funktionen*

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad z \longmapsto \cos z,$$

und

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad z \longmapsto \sin z,$$

besitzen für $z, w \in \mathbb{C}$ folgende Eigenschaften.

²Eine Teilmenge $T \subseteq \mathbb{C}$ heißt abgeschlossen, wenn jede Folge in T , die in \mathbb{C} konvergiert, schon in T konvergiert. Eine reelle Folge, die aufgefasst als komplexe Folge konvergiert, konvergiert offenbar in \mathbb{R} .

(1) Für $z = x + iy$ ist

$$\exp z = (\exp x)(\cos y + i \sin y).$$

(2) Es ist $\cos 0 = 1$ und $\sin 0 = 0$.

(3) Es ist $\cos(-z) = \cos z$ und $\sin(-z) = -\sin z$.

(4) Es ist

$$\cos z = \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2}$$

und

$$\sin z = \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i}.$$

(5) Es gelten die Additionstheoreme

$$\cos(z + w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w.$$

und

$$\sin(z + w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w.$$

(6) Es gilt

$$(\cos z)^2 + (\sin z)^2 = 1.$$

Beweis. (1). Aufgrund von Satz 15.7 gilt

$$\exp(x + iy) = \exp x \cdot \exp(iy),$$

so dass wir nur noch den hinteren Faktor betrachten müssen. Da man absolut konvergente Reihen beliebig sortieren³ darf, gilt

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} &= \sum_{k=0}^{\infty} i^{2k} \frac{y^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} i^{2k+1} \frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{y^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} i(-1)^k \frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k y^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k y^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \cos y + i \sin y. \end{aligned}$$

(2) und (3) folgen direkt aus der Definition der Reihen. (4) folgt aus (1) und (3). (5). Es ist

$$\begin{aligned} \cos(z + w) &= \frac{\exp(i(z + w)) + \exp(-i(z + w))}{2} \\ &= \frac{\exp(iz) \exp(iw) + \exp(-iz) \exp(-iw)}{2} \\ &= \frac{1}{2}((\cos z + i \sin z)(\cos w + i \sin w) \\ &\quad + (\cos z - i \sin z)(\cos w - i \sin w)) \end{aligned}$$

³Dies werden wir in Vorlesung 17 ausführlich begründen. Hier fassen wir nur jeweils zwei aufeinander folgende Reihenglieder zusammen, was aufgrund von Aufgabe 15.8 möglich ist.

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}(\cos z \cos w \\
&\quad + i(\cos z \sin w + \sin z \cos w) - \sin z \sin w \\
&\quad + \cos z \cos w \\
&\quad - i(\cos z \sin w + \sin z \cos w) \\
&\quad - \sin z \sin w) \\
&= \cos z \cos w - \sin z \sin w.
\end{aligned}$$

Das Additionstheorem für den Sinus folgt ähnlich. (6). Aus dem Additionstheorem für den Kosinus angewendet auf $w = -z$ und aufgrund von (2) ergibt sich

$$\begin{aligned}
1 &= \cos 0 \\
&= \cos (z - z) \\
&= \cos z \cos (-z) - \sin z \sin (-z) \\
&= \cos z \cos z + \sin z \sin z.
\end{aligned}$$

□

Für reelle z sind $\sin z$ und $\cos z$ wieder reell, wie unmittelbar aus der Potenzreihendarstellung folgt. Die letzte Aussage im vorstehenden Satz besagt, dass für reelles z das Paar $(\cos z, \sin z)$ ein Punkt auf dem *Einheitskreis* $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ ist. Wir werden später sehen, dass sich jeder Punkt des Einheitskreises als $(\cos z, \sin z)$ schreiben lässt, wobei man z als Winkel (im Bogenmaß) interpretieren kann. Dabei tritt die Periode 2π auf, wobei wir die *Kreiszahl* π eben über die trigonometrischen Funktionen einführen werden.

Abbildungsverzeichnis

Quelle = Exp.svg , Autor = Benutzer Oleg Alexandrov auf Commons,
Lizenz = CC-by-sa 3.0

3