Körper- und Galoistheorie

Prof. Dr. Holger Brenner
Universität Osnabrück
Fachbereich Mathematik/Informatik

Sommersemester 2011

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Dieses Skript gibt die Vorlesung Körper- und Galoistheorie wieder, die ich im Sommersemester 2011 an der Universität Osnabrück gehalten habe. Es handelt sich dabei im Wesentlichen um ausformulierte Manuskripttexte, die im direkten Anschluss an die einzelnen Vorlesungen öffentlich gemacht wurden. Ich habe diese Veranstaltung zum ersten Mal durchgeführt, bei einem zweiten Durchlauf würden sicher noch viele Korrekturen und Änderungen dazukommen. Dies bitte ich bei einer kritischen Durchsicht wohlwollend zu berücksichtigen.

Ich bedanke mich bei der Wikiversity Gemeinschaft und insbesondere bei Benutzer Exxu für die wichtigen Beiträge im Projekt semantische Vorlagen, die eine weitgehend automatische Erstellung des Latexcodes ermöglichen, bei den Studierenden für einzelne Korrekturen und Aufgabenvorschläge und bei Frau Marianne Gausmann für die Erstellung des Pdf-Files. Bei Axel Stäbler bedanke ich mich für die Mitwirkung bei der Veranstaltung, Vorlesungsvertretung und für Korrekturen, Vorschläge und kritische Nachfragen. Bie Jonathan Steinbuch bedanke ich mich für Verlinkungen und Korrekturen.

Holger Brenner

1. Vorlesung

1.1. **Lösungen von polynomialen Gleichungen.**

Es sei eine polynomiale Gleichung

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

gegeben, wobei die Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_n$ reelle (oder komplexe) Zahlen seien und nach Elementen $x \in \mathbb{C}$ gesucht wird, die diese Gleichung erfüllen. Wie kann man solche Lösungen finden? Die Lösbarkeit hängt dabei natürlich wesentlich vom Grad der Gleichung ab, das ist der maximale Index n mit $a_n \neq 0$. Bei $n = 1$ liegt eine lineare Gleichung

$$a_1 x + a_0 = 0$$

vor mit der eindeutigen Lösung $x = -\frac{a_0}{a_1}$. Dies kann man bilden, da nach Voraussetzung $a_1 \neq 0$ ist und da die Koeffizienten aus $\mathbb{C}$ sind, also aus einem Körper, wo man uneingeschränkt durch von 0 verschiedene Zahlen dividieren kann. Bei $n = 2$ liegt eine *quadratische Gleichung* vor, also

$$a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

mit $a_2 \neq 0$. Hier führt man zunächst eine *Normierung* durch, was man bei jedem Grad machen kann. Das bedeutet, dass man durch den Leitkoeffizienten a_n dividiert, um diesen zu 1 zu normieren. Dabei ändern sich die Lösungen der Gleichung offenbar nicht. Im quadratischen Fall gelangt man so zur äquivalenten Gleichung

$$x^2 + b_1 x + b_0 = 0\,.$$

Diese Gleichung führt man durch *quadratisches Ergänzen* auf eine reine Gleichung zurück. Man macht den Ansatz $y = x + \frac{b_1}{2}$ und schreibt dann die Gleichung als

$$(x + \frac{b_1}{2})^2 + b_0 - (\frac{b_1}{2})^2 = 0$$

bzw. als

$$y^2 + c_0 = 0$$

mit $c_0 = b_0 - (\frac{b_1}{2})^2$. Dieser Koeffizient c_0 gehört wieder zum Körper. Wenn y_1 eine Lösung dieser Gleichung ist, so ist $x_1 = y_1 - \frac{b_1}{2}$ eine Lösung der quadratischen Ausgangsgleichung. Die neu gewonnene äquivalente Gleichung ist eine sogenannte *reine Gleichung*, d.h. eine Gleichung der Form

$$y^n = d\,.$$

Um eine solche reine Gleichung lösen zu können muss man „die“ n-te Wurzel aus d ziehen können. Die Schwierigkeit dieser Aufgabe und die Anzahl der Lösungen hängt von der Arithmetik des Körpers ab und ist nicht trivial. Dennoch ist es eine wesentliche Reduktion, wenn man, wie im quadratischen Fall, die Lösung einer polynomialen Gleichung auf die Lösung einer (oder mehrerer) reinen Gleichungen zurückführen kann.

1.2. **Kubische Gleichungen.**

Wir betrachten nun eine normierte kubische Gleichung

$$x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0\,,$$

wobei die Koeffizienten aus $\mathbb{C}$ seien. Mit einem Ergänzungstrick können wir den quadratischen Koeffizienten a_2 eliminieren. Wir machen den Ansatz $y = x + \frac{a_2}{3}$ und schreiben die Gleichung als

$$(x + \frac{a_2}{3})^3 + (a_1 - 3(\frac{a_2}{3})^2)(x + \frac{a_2}{3}) - (a_1 - 3(\frac{a_2}{3})^2)\frac{a_2}{3} - (\frac{a_2}{3})^3 + a_0 = 0$$

bzw. als

$$y^3 + py + q = 0$$

mit den neuen Koeffizienten

$$p = a_1 - 3(\frac{a_2}{3})^2 \text{ und } q = -(a_1 - 3(\frac{a_2}{3})^2)\frac{a_2}{3} - (\frac{a_2}{3})^3 + a_0\,.$$

Lösungen dieser vereinfachten Gleichung führen direkt zu Lösungen der Ausgangsgleichung.

Gerolamo Cardano (1501-1576)

Die vereinfachte Gleichung kann man über die folgende *Formel von Cardano* lösen. Wir brauchen dafür ein Lemma über dritte Einheitswurzeln von $\mathbb{C}$, das sind komplexe Zahlen η mit $\eta^3 = 1$, also die Lösungen der reinen kubischen Gleichung $x^3 = 1$.

Lemma 1.1. *Es gelten folgende Aussagen.*

(1) *Die dritten Einheitswurzeln in* $\mathbb{C}$ *sind* 1, $\epsilon = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ *und* $\eta = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.
(2) *Es ist* $\epsilon^2 = \eta$ *und* $\eta^2 = \epsilon$.
(3) *Es ist* $1 + \epsilon + \epsilon^2 = 0$.
(4) *Es ist* $\epsilon + \epsilon^2 = -1$.

Beweis. Siehe Aufgabe 1.1. □

Satz 1.2. *Es sei*

$$x^3 + px + q = 0$$

mit $p, q \in \mathbb{C}$ eine kubische Gleichung. Wir setzen $D = -4p^3 - 27q^2$. Es seien

$$u = \sqrt[3]{\frac{1}{2}(-q + \frac{1}{9}\sqrt{-3D})} \text{ und } v = \sqrt[3]{\frac{1}{2}(-q - \frac{1}{9}\sqrt{-3D})},$$

wobei diese dritten Wurzeln so gewählt seien, dass $uv = -\frac{p}{3}$ ist. Dann sind (mit der dritten Einheitswurzel $\epsilon = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i$) die Elemente

$$u + v, \epsilon u + \epsilon^2 v \text{ und } \epsilon^2 u + \epsilon v$$

die Lösungen dieser kubischen Gleichung.

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass die dritten Wurzeln u und v so gewählt werden können, dass ihr Produkt gleich $-\frac{1}{3}p$ ist. Für eine irgendwie gewählte Quadratwurzel $\sqrt{-3D}$ und irgendwie gewählte dritte Wurzeln u und v ist

$$\begin{aligned} uv &= \sqrt[3]{\frac{1}{4}(q^2 - \frac{1}{81}(-3D))} \\ &= \sqrt[3]{\frac{1}{4}(q^2 + \frac{1}{27}(-4p^3 - 27q^2))} \\ &= \sqrt[3]{\frac{1}{4} \cdot \frac{-4}{27}p^3} \\ &= \sqrt[3]{-\frac{1}{27}p^3} \\ &= \eta(-\frac{p}{3}), \end{aligned}$$

wobei η eine dritte Einheitswurzel ist. Ersetzt man nun v durch $\eta^2 v$, so ist das Produkt gleich $-\frac{p}{3}$.

Wir berechen nun

$$(x - u - v)(x - \epsilon u - \epsilon^2 v)(x - \epsilon^2 u - \epsilon v)$$

und müssen zeigen, dass dies gleich $x^3 + px + q$ ist. Die angegebenen Elemente sind offenbar die Nullstellen dieses faktorisierten Polynoms. Es ist

$$\begin{aligned} & (x - u - v)(x - \epsilon u - \epsilon^2 v)(x - \epsilon^2 u - \epsilon v) \\ = \; & x^3 - (u + v + \epsilon u + \epsilon^2 v + \epsilon^2 u + \epsilon v)x^2 \\ & +((u + v)(\epsilon u + \epsilon^2 v) + (u + v)(\epsilon^2 u + \epsilon v) + (\epsilon u + \epsilon^2 v)(\epsilon^2 u + \epsilon v))x \\ & -(u + v)(\epsilon u + \epsilon^2 v)(\epsilon^2 u + \epsilon v). \end{aligned}$$

Der quadratische Koeffizient ist (unter Verwendung von Lemma 1.1)

$$u(1 + \epsilon + \epsilon^2) + v(1 + \epsilon + \epsilon^2) \; = \; 0.$$

Der lineare Koeffizient ist

$$\begin{aligned} & (u + v)(\epsilon u + \epsilon^2 v) + (u + v)(\epsilon^2 u + \epsilon v) + (\epsilon u + \epsilon^2 v)(\epsilon^2 u + \epsilon v) \\ = \; & u^2(\epsilon + \epsilon^2 + 1) + v^2(\epsilon^2 + \epsilon + 1) + uv(\epsilon + \epsilon^2 + \epsilon^2 + \epsilon + \epsilon^2 + \epsilon^4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{p}{3}(-3) \\ &= p. \end{aligned}$$

Der konstante Koeffizient ist

$$\begin{aligned} -(u+v)(\epsilon u+\epsilon^2 v)(\epsilon^2 u+\epsilon v) &= -u^3 - u^2v(1+\epsilon+\epsilon^2) - uv^2(1+\epsilon+\epsilon^2) - v^3 \\ &= -u^3 - v^3 \\ &= -\frac{1}{2}(-q+\frac{1}{9}\sqrt{-3D}) - \frac{1}{2}(-q-\frac{1}{9}\sqrt{-3D}) \\ &= q. \end{aligned}$$

□

Beispiel 1.3. Wir betrachten die kubische Gleichung

$$x^3 + 2x - 1 = 0$$

und wenden darauf Satz 1.2 an. Es ist demnach $p = 2$, $q = -1$, $D = -59$ und somit $u = \sqrt[3]{\frac{1}{2}(1+\frac{1}{9}\sqrt{177})}$ und $v = \sqrt[3]{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{9}\sqrt{177})}$. Dabei wählen wir jeweils die reellen dritten Wurzeln, was automatisch die reelle Bedingung $uv = -\frac{2}{3}$ sicherstellt. Somit ist $u+v$ eine reelle Lösung der Gleichung. Man sieht, dass diese Lösung aus Lösungen von rein-quadratischen und rein-kubischen Gleichungen mittels arithmetischer Ausdrücke zusammengesetzt ist, darüber hinaus aber keine einfache Gestalt besitzt. Den numerischen Wert dieser Lösung kann man beliebig genau durch beliebig genaue Berechnungen der Lösungen der reinen Gleichungen ausrechnen, doch könnte man genauso gut direkt (mit dem Halbierungsverfahren oder Ähnlichem) die Nullstelle numerisch berechnen.

Für den Fall eines Polynoms vom Grad 4 gibt es ebenfalls eine Lösungsformel. Eine Hauptmotivation zur Entwicklung der Körper- und Galoistheorie war die Fragestellung, ob es für Polynome vom Grad ≥ 5 ebenfalls Formeln gibt, mit denen man die Nullstellen als arithmetische Ausdrücke in Lösungen zu reinen Gleichungen ausdrücken kann. Eines der Hauptergebnisse, das wir nach einigen Vorbereitungen beweisen werden, ist, dass es eine solche Formel nicht geben kann.

1.3. **Der Fundamentalsatz der Algebra.**

Sei ein Polynom $F \in K[X]$, wobei K einen Körper bezeichnet, bzw. die zugehörige Nullstellengleichung $F(x) = 0$ gegeben. In K selbst muss F keine Nullstellen besitzen. Ist es überhaupt klar, dass F in irgend einem Körper Nullstellen besitzt? Oben gehörten alle Koeffizienten von F zum Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen. Dies garantiert, dass es Lösungen zu der polynomialen Gleichung gibt. Diese Eigenschaft der komplexen Zahlen beruht auf dem Fundamentalsatz der Algebra, der in Mathematik I bewiesen wurde und an den wir hier erinnern wollen.

Satz 1.4. *Jedes nichtkonstante Polynom $P \in \mathbb{C}[X]$ über den komplexen Zahlen besitzt eine Nullstelle.*

Beweis. Siehe den Beweis zu Satz 30.8 der Vorlesung Mathematik I. □

Bis jetzt kennen wir noch keinen anderen Körper mit dieser Eigenschaft, dennoch halten wir hier schonmal folgende Definition fest.

Definition 1.5. Ein Körper K heißt *algebraisch abgeschlossen*, wenn jedes nicht-konstante Polynom $F \in K[X]$ eine Nullstelle in K besitzt.

Mit diesem Begriff kann man den Fundamentalsatz der Algebra so ausdrücken, dass $\mathbb{C}$ algebraisch abgeschlossen ist.

Wenn man zu einem Polynom F eine Nullstelle a gefunden hat, so kann man nach Lemma Anhang 1.4 $F = (X - a)\tilde{F}$ schreiben. Zu jedem Polynom $F \in \mathbb{C}[X]$ vom Grad n gibt es daher eine Produktdarstellung

$$F = (X - \alpha_1)(X - \alpha_2) \cdots (X - \alpha_n)$$

mit eindeutig komplexen Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Diese zu finden ist aber schwierig, selbst wenn die Koeffizienten von F harmlos sind (z.B. bei $F \in \mathbb{Q}[X]$), wie schon die Cardanosche Formel für den Grad 3 deutlich macht. Diese „Schwierigkeit“, bei höherem Grad Nullstellen explizit zu finden, ist ein wichtiges Thema dieser Vorlesung.

1.4. **Der algebraische Zugang.**

Es ist gut zu wissen, dass es zu einem Polynom $F \in \mathbb{C}[X]$ Nullstellen in $\mathbb{C}$ gibt und dass es daher eine Zerlegung des Polynoms in Linearfaktoren gibt. Allerdings muss man, neben der prinzipiellen Schwierigkeit, diese Nullstellen zu finden, bedenken, dass die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ auf den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ beruhen, die selbst wiederum mit topologischen Mitteln (durch die Vervollständigung) aus den rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ konstruiert wurden. Hinter den komplexen Zahlen steckt also ein enormer technischer Apparat, während ein einzelnes Polynom eine völlig andere „Datenstruktur“ aufweist. Ein Polynom

$$F = a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n \in \mathbb{C}[X]$$

ist durch seine endlich vielen Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ festgelegt, und seine Nullstellen sind n Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ (die nicht verschieden sein müssen). Um Beziehungen zwischen den Koeffizienten und den Nullstellen ausdrücken zu können, braucht man gar nicht die gesamten komplexen Zahlen. Es genügt, sich auf diejenigen arithmetischen Ausdrücke zu beschränken, die man ausgehend von den Koeffizienten und den Nullstellen konstruieren kann. Wenn z.B., wie das häufig der Fall sein wird, die Koeffizienten rationale Zahlen sind, so spielt sich alles innerhalb der polynomialen Ausdrücke über $\mathbb{Q}$ in den Nullstellen α_i ab, also Ausdrücken der Form

$$\sum_{\nu=(\nu_1,\ldots,\nu_n)} b_\nu \alpha_1^{\nu_1} \cdots \alpha_n^{\nu_n} .$$

Dabei sind die b_ν rationale Zahlen, und sämtliche Exponententupel $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n) \in \mathbb{N}^n$ sind erlaubt, wobei die Summe aber endlich ist.

Beispiel 1.6. Wir betrachten das Polynom X^2+1, dessen Koeffizienten zu $\mathbb{Q}$ gehören und das in $\mathbb{Q}$ (und auch in $\mathbb{R}$) keine Nullstelle besitzt. In den komplexen Zahlen besitzt es die beiden Nullstellen i und $-i$, so dass in $\mathbb{C}[X]$ die Faktorzerlegung

$$X^2+1 \;=\; (X-i)(X+i)$$

vorliegt. Um dies hinschreiben zu können, braucht man aber nicht die gesamten komplexen Zahlen, sondern lediglich das Element i. Wir betrachten die Menge

$$\mathbb{Q}[i] = \mathbb{Q}1 + \mathbb{Q}i = \{a+bi |\, a,b \in \mathbb{Q}\}\,,$$

also einen zweidimensionalen $\mathbb{Q}$-Vektorraum mit den Basiselementen 1 und i, wobei zusätzlich noch eine Multiplikation durch die Bedingung $i^2 = -1$ festgelegt wird. Dies ist die gleiche Konstruktion, mit der man aus $\mathbb{R}$ die komplexen Zahlen gewinnt, nur dass man hier von den rationalen Zahlen ausgeht. Es lässt sich leicht zeigen, dass das konstruierte Objekt $\mathbb{Q}[i]$ ein Körper ist. Für ein von 0 verschiedenes Element $a+bi$ ist

$$\frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i$$

das inverse Element, und dies gehört offenbar wieder zu $\mathbb{Q}[i]$. Die Zerlegung $X^2+1 = (X-i)(X+i)$ gilt ebenfalls in $\mathbb{Q}[i][X]$, und durch die Zuordnung $a+bi \mapsto a-bi$ gibt es auch eine Konjugation, die völlig analoge Eigenschaften hat wie die komplexe Konjugation in $\mathbb{C}$.

Beispiel 1.7. Wir betrachten das Polynom X^2-3, dessen Koeffizienten zu $\mathbb{Q}$ gehören. In den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ besitzt dieses Polynom die Nullstelle[1] $\sqrt{3}$, die irrational ist. Über $\mathbb{R}$ hat man die Zerlegung $X^2-3 = (X-\sqrt{3})(X+\sqrt{3})$. Um dies auszudrücken, braucht man aber nicht die gesamten reellen Zahlen, sondern lediglich $\sqrt{3}$, das man einfach als ein Symbol auffassen kann mit der Eigenschaft, dass sein Quadrat gleich 3 sein soll. Eine „Verortung“ innerhalb der reellen Zahlen ist dazu nicht nötig. Präziser formuliert betrachtet man

$$L = \mathbb{Q}1 + \mathbb{Q}u = \{a+bu |\, a,b \in \mathbb{Q}\}\,,$$

also einen zweidimensionalen $\mathbb{Q}$-Vektorraum mit den Basiselementen 1 und u, wobei eine Multiplikation durch die Bedingung $u^2 = 3$ (und distributive Fortsetzung) festgelegt wird. Das Element u ist hier lediglich ein Symbol, für das man häufig wegen der intendierten Eigenschaft auch $\sqrt{3}$ schreibt (man schreibt auch $L = \mathbb{Q}[\sqrt{3}]$). In L gilt die Zerlegung $X^2-3 = (X-u)(X+u)$, und wegen

$$(a+bu)(\frac{a}{a^2-3b^2} - \frac{b}{a^2-3b^2}u) \;=\; \frac{a^2-3b^2}{a^2-3b^2} \;=\; 1$$

handelt es sich um einen Körper. Dazu muss man sich klar machen, dass bei $a+bu \neq 0$ mit rationalen Zahlen $a,b \in \mathbb{Q}$, die nicht beide 0 sind, auch $a^2-3b^2 \neq 0$ ist, was äquivalent zur Irrationalität von $\sqrt{3}$ ist. Es sind also

[1] Die Existenz der Nullstelle beruht auf dem Zwischenwertsatz, wobei sich die Existenz von $\sqrt{3}$ auch direkt aus der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ ergibt.

wesentliche Eigenschaften des Polynoms X^2-3, die über $\mathbb{R}$ sichtbar werden, bereits über L sichtbar. Es gibt aber auch Unterschiede, bspw. sind bei dieser algebraischen Konstruktion von L die beiden Elemente u und $-u$ vollkommen gleichberechtigt, während innerhalb der reellen Zahlen die eine Quadratwurzel positiv und die andere negativ ist. Diese Gleichberechtigung zeigt sich auch darin, dass durch

$$L \longrightarrow L,\, a+bu \longmapsto a-bu,$$

eine „Konjugation“ definiert wird, die es innerhalb der reellen Zahlen nicht gibt.

2. Vorlesung

2.1. **Körpererweiterungen.**

In der letzten Vorlesung haben wir gesehen, dass es sinnvoll sein kann, das Studium der Nullstellen eines Polynoms $F \in \mathbb{Q}[X]$ nicht in $\mathbb{C}$, sondern in einem kleineren Körper, der $\mathbb{Q}$ umfasst, durchzuführen. Wir stellen dazu die nötige Terminologie zusammen.

Definition 2.1. Es sei K ein Körper. Ein Unterring $M \subseteq K$, der zugleich ein Körper ist, heißt *Unterkörper* von K.

Wenn ein Unterring $R \subseteq K$ in einem Körper vorliegt, so muss man nur noch schauen, ob R mit jedem von null verschiedenen Element x auch das Inverse x^{-1} (das in K existiert) enthält. Bei einem Unterring $R \subseteq S$, wobei R ein Körper ist, aber S nicht, spricht man nicht von einem Unterkörper. Die Situation, wo ein Körper in einem anderen Körper liegt, wird als Körpererweiterung bezeichnet.

Definition 2.2. Sei L ein Körper und $K \subseteq L$ ein Unterkörper von L. Dann heißt L ein *Erweiterungskörper* (oder *Oberkörper*) von K und die Inklusion $K \subseteq L$ heißt eine *Körpererweiterung*.

Für eine Körpererweiterung gilt stets folgende wichtige Beobachtung.

Lemma 2.3. *Sei $K \subseteq L$ eine Körpererweiterung. Dann ist L in natürlicher Weise ein K-Vektorraum.*

Beweis. Die Skalarmultiplikation

$$K \times L \longrightarrow L,\, (\lambda, x) \longmapsto \lambda x,$$

wird einfach durch die Multiplikation in L gegeben. Die Vektorraumaxiome folgen dann direkt aus den Ringaxiomen. □

Definition 2.4. Eine Körpererweiterung $K \subseteq L$ heißt *endlich*, wenn L ein endlich-dimensionaler Vektorraum über K ist.

Definition 2.5. Sei $K \subseteq L$ eine endliche Körpererweiterung. Dann nennt man die K-(Vektorraum-)Dimension von L den *Grad* der Körpererweiterung.

Der Grad einer endlichen Körpererweiterung $K \subseteq L$ wird mit

$$\operatorname{grad}_K L$$

bezeichnet. Dass man hier von Grad spricht und nicht einfach von Dimension hat seinen Grund darin, dass dieser Grad mit dem Grad von gewissen Polynomen zusammenhängt, worauf wir ausführlich zu sprechen kommen werden. Da bei einer Körpererweiterung $K \subseteq L$ sofort eine K-Vektorraumstruktur auf L zur Verfügung steht, ist es naheliegend, für das Studium der Körpererweiterungen die lineare Algebra einzusetzen. Dies ist besonders bei endlichen Körpererweiterungen ein schlagkräftiges Mittel. Durch diesen Apparat wird unter Anderem die additive Struktur auf L einfach beschreibbar, und man kann sich ganz auf die Multiplikation konzentrieren. Aber auch für diese ist die Vektorraumstruktur reich an Konsequenzen. Um ein typisches Beispiel für die lineare Argumentationsweise zu geben, betrachten wir eine endliche Körpererweiterung $K \subseteq L$ und ein beliebiges Element $x \in L$. Die Potenzen von x, also

$$x^0 = 1, x^1 = x, x^2, x^3, \ldots$$

bilden eine unendliche Familie (auch wenn es unter den Potenzen Wiederholungen geben kann). Da diese Potenzen alle zu L gehören und L ein endlichdimensionaler K-Vektorraum ist, kann diese unendliche Familie nicht linear unabhängig sein, sondern es muss eine Beziehung der Form

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = 0$$

geben, bei der nicht alle Koeffizienten $a_i \in K$ gleich 0 sind. Diese Beobachtung führt zu den Begriffen *algebraisches Element* und *Minimalpolynom*.

Die einzige Körpererweiterung vom Grad 1 ist die Identität $K \subseteq K$. Die Körpererweiterungen vom Grad zwei sind aber schon eine umfangreiche Beispielklasse und bekommen einen eigenen Namen. Zu ihnen gehören die beiden letzten Beispiele der ersten Vorlesung.

Definition 2.6. Eine endliche Körpererweiterung $K \subset L$ vom Grad zwei heißt eine *quadratische Körpererweiterung*.

Lemma 2.7. *Es sei K ein Körper mit einer Charakteristik $\neq 2$[2] und es sei $K \subset L$ eine quadratische Körpererweiterung. Dann gibt es ein $x \in L$ mit $x^2 \in K$.*

Beweis. Siehe Aufgabe 2.4. □

[2]Diese Bedingung bedeutet, dass $0 \neq 2 = 1+1$ ist. Wir werden die Charakteristik eines Körpers bald einführen.

2.2. **Die Gradformel.**

Häufig studiert man Körpererweiterungen $K \subseteq M$ dadurch, dass man Zwischenkörper L, $K \subseteq L \subseteq M$, betrachtet, und die beiden einzelnen (häufig einfacheren) Körpererweiterungen $K \subseteq L$ und $L \subseteq M$ untersucht. Man spricht von einem *Körperturm* oder einer *Körperkette*. In dieser Situation gilt die folgende wichtige *Gradformel*.

Satz 2.8. *Seien $K \subseteq L$ und $L \subseteq M$ endliche Körperweiterungen. Dann ist auch $K \subseteq M$ eine endliche Körpererweiterung und es gilt*

$$\operatorname{grad}_K M = \operatorname{grad}_K L \cdot \operatorname{grad}_L M\,.$$

Beweis. Wir setzen $\operatorname{grad}_K L = n$ und $\operatorname{grad}_L M = m$. Es sei $x_1, \ldots, x_n \in L$ eine K-Basis von L und $y_1, \ldots, y_m \in M$ eine L-Basis von M. Wir behaupten, dass die Produkte

$$x_i y_j, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m,$$

eine K-Basis von M bilden. Wir zeigen zuerst, dass diese Produkte den Vektorraum M über K aufspannen. Sei dazu $z \in M$. Wir schreiben

$$z = b_1 y_1 + \ldots + b_m y_m \text{ mit Koeffizienten } b_j \in L.$$

Wir können jedes b_j als $b_j = a_{1j}x_1 + \ldots + a_{nj}x_n$ mit Koeffizienten $a_{ij} \in K$ ausdrücken. Das ergibt

$$\begin{aligned} z &= b_1 y_1 + \ldots + b_m y_m \\ &= (a_{11}x_1 + \ldots + a_{n1}x_n)y_1 + \ldots + (a_{1m}x_1 + \ldots + a_{nm}x_n)y_m \\ &= \sum_{1 \leq i \leq n,\, 1 \leq j \leq m} a_{ij} x_i y_j. \end{aligned}$$

Daher ist z eine K-Linearkombination der Produkte $x_i y_j$. Um zu zeigen, dass diese Produkte linear unabhängig sind, sei

$$0 = \sum_{1 \leq i \leq n,\, 1 \leq j \leq m} c_{ij} x_i y_j$$

angenommen mit $c_{ij} \in K$. Wir schreiben dies als $0 = \sum_{j=1}^{m} (\sum_{i=1}^{n} c_{ij} x_i) y_j$. Da die y_j linear unabhängig über L sind und die Koeffizienten der y_j zu L gehören, folgt, dass $\sum_{i=1}^{n} c_{ij} x_i = 0$ ist für jedes j. Da die x_i linear unabhängig über K sind und $c_{ij} \in K$ ist, folgt, dass $c_{ij} = 0$ ist für alle i, j. □

2.3. **Reine Gleichungen.**

Die Lösungsformel von Cardano für ein kubisches Polynom zeigt, dass man die Nullstellen eines solchen Polynoms durch arithmetisch verschachtelte reine (zweite und dritte) Wurzeln ausdrücken kann. Solche reinen Wurzeln sind Nullstellen von sogenannten reinen Polynomen, also von Polynomen der Form

$$X^n - a\,,$$

wobei $a \in K$ ist und die Nullstelle in einem geeigneten Erweiterungskörper L von K liegen soll. Verglichen mit beliebigen Polynomen gelten solche reinen

Polynome als vergleichsweise einfach, insbesondere wenn man an ein reelles positives a und seine reelle positive Wurzel $\sqrt[n]{a}$ denkt (und bei geradem n noch die zweite reelle Lösung $-\sqrt[n]{a}$ berücksichtigt). Allerdings zerfällt das Polynom $X^n - a$ über $\mathbb{C}$ in n Linearfaktoren, so dass bei $n \geq 3$ im Reellen nicht alle komplexen Lösungen sichtbar sind. Ein extremes Beispiel ist dabei das Polynom

$$X^n - 1$$

bzw. die Gleichung $X^n = 1$. Dies führt zu den sogenannten Einheitswurzeln.

2.4. **Einheitswurzeln.**

Definition 2.9. Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}_+$. Dann heißen die Nullstellen des Polynoms

$$X^n - 1$$

in K die n-ten *Einheitswurzeln* in K.

Die 1 ist für jedes n eine n-te Einheitswurzel, und die -1 ist für jedes gerade n eine n-te Einheitswurzel. Es gibt maximal n n-te Einheitswurzel, da das Polynom $X^n - 1$ maximal n Nullstellen besitzt. Die Einheitswurzeln bilden eine endliche Untergruppe (mit $x^n = 1$ und $y^n = 1$ ist auch $(xy)^n = 1$, usw.) der Einheitengruppe $K^\times = K \setminus \{0\}$ des Körpers.

Im Reellen gibt es nur die Einheitswurzeln 1 oder 1 und -1, je nachdem, ob n gerade oder ungerade ist. Die komplexen Einheitswurzeln lassen sich einfach beschreiben und besitzen eine einfache geometrische Interpretation.

Lemma 2.10. *Sei $n \in \mathbb{N}_+$. Die Nullstellen des Polynoms $X^n - 1$ über $\mathbb{C}$ sind*

$$e^{2\pi ik/n} = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}, k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

In $\mathbb{C}[X]$ gilt die Faktorisierung

$$X^n - 1 = (X-1)(X - e^{2\pi i/n})\cdots(X - e^{2\pi i(n-1)/n})$$

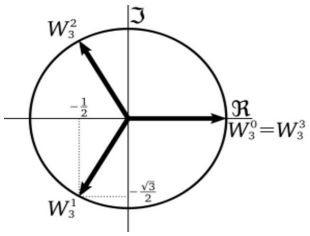
Beweis. Der Beweis verwendet einige Grundtatsachen über die *komplexe Exponentialfunktion*. Es ist

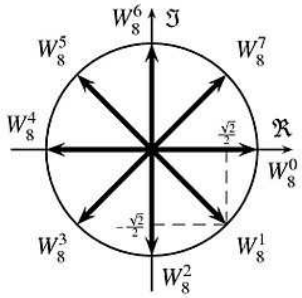
$$(e^{2\pi ik/n})^n = e^{2\pi ik} = (e^{2\pi i})^k = 1^k = 1.$$

Die angegebenen komplexen Zahlen sind also wirklich Nullstellen des Polynoms $X^n - 1$. Diese Nullstellen sind alle untereinander verschieden, da aus

$$e^{2\pi ik/n} = e^{2\pi i\ell/n}$$

mit $0 \leq k \leq \ell \leq n-1$ sofort durch betrachten des Quotienten $e^{2\pi i(\ell-k)/n} = 1$ folgt, und daraus $\ell - k = 0$. Es gibt also n explizit angegebene Nullstellen und daher müssen dies alle Nullstellen des Polynoms sein. Die explizite Beschreibung in Koordinaten folgt aus der eulerschen Formel. □





Korollar 2.11. *Es sei K ein Körper. Dann gilt in $K[X]$ die Beziehung*

$$X^n - 1 = (X-1) \cdot (X^{n-1} + X^{n-2} + \ldots + X + 1).$$

Für jede n-te Einheitswurzel $\zeta \neq 1$ gilt

$$\zeta^{n-1} + \zeta^{n-2} + \ldots + \zeta + 1 = 0$$

Beweis. Die erste Aussage ergibt sich durch Ausmultiplizieren der rechten Seite. Zum Beweis des Zusatzes sei eine n-te Einheitswurzel $\zeta \neq 1$ gegeben. Nach Definition ist $\zeta^n - 1 = 0$. Wegen $\zeta \neq 1$ muss also das rechte Polynom zu 0 werden, wenn man darin ζ einsetzt. □

Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gibt es einen kleinsten Unterkörper von $\mathbb{C}$, der alle n-ten Einheitswurzeln enthält, der sogenannte n-te *Kreisteilungskörper*. Wir werden bald sehen, dass der Kreisteilungskörper eine endliche Erweiterung von $\mathbb{Q}$ ist, und dass sein Grad maximal gleich $n-1$ ist. Genauere Gradberechnungen und weitere Strukturuntersuchungen dieser Körpererweiterungen werden im Laufe des Kurses noch folgen.

Mit den Einheitswurzeln lassen sich wiederum die Lösungen zu beliebigen reinen Gleichungen charakterisieren, insbesondere, wenn eine bekannt ist, wie das bei $X^n = a$ mit $a \in \mathbb{R}_+$ der Fall ist.

Lemma 2.12. *Es sei K ein Körper, $a \in K$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann gelten folgende Aussagen.*

(1) *Wenn $b_1, b_2 \in K$ zwei Lösungen der Gleichung $X^n = a$ sind und $b_2 \neq 0$, so ist ihr Quotient b_1/b_2 eine n-te Einheitswurzel.*
(2) *Wenn $b \in K$ eine Lösung der Gleichung $X^n = a$ und ζ eine n-te Einheitswurzel ist, so ist auch ζb eine Lösung der Gleichung $X^n = a$.*

Beweis. Siehe Aufgabe 2.9. □

3. Vorlesung

Es sei $K \subseteq L$ eine endliche Körpererweiterung und $x \in L$ ein Element. Dann sind die Potenzen x^i, $i \in \mathbb{N}$, linear abhängig, und das bedeutet, dass es Koeffizienten $a_i \in K$ mit $a_n \neq 0$ gibt mit $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = 0$. Mit diesen Koeffizienten können wir das (von 0 verschiedene) Polynom

$$P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \ldots + a_n X^n \in K[X]$$

bilden. Wenn man in dieses Polynom x einsetzt, d.h. überall die Variable X durch x ersetzt, so ergibt sich 0. Das Ergebnis dieses Einsetzens bezeichnet man mit $P(x)$, es ist also $P(x) = 0$. Man sagt, dass P das Element x *annuliert*. Wir betrachten die Menge

$$I = \{P \in K[X] |\, P(x) = 0\} \subseteq K[X]\,,$$

also die Menge aller Polynome, die bei Einsetzung von x zu 0 werden.[3] Es ergeben sich dabei folgende Fragen.

(1) Welche Struktur besitzt I?
(2) Gibt es unter den Elementen $P \in I$ besonders einfache Polynome, mit denen man I einfach beschreiben kann?
(3) Kann man mit I Eigenschaften von $x \in L$ beschreiben?

Zu all diesen Fragen gibt es überzeugende Antworten. Zur ersten Frage können wir folgende Beobachtung machen: Das Nullpolynom gehört zu I. Wenn zwei Polynome P_1, P_2 zu I gehören, so gehört auch ihre Summe zu I, es ist ja $(P_1 + P_2)(x) = P_1(x) + P_2(x) = 0 + 0 = 0$. Für $P \in I$ und ein beliebiges Polynom $F \in K[X]$ ist auch $FP \in I$, wegen $(FP)(x) = F(x) \cdot P(x) = F(x) \cdot 0 = 0$.

3.1. **Ideale.**

Die soeben formulierten Eigenschaften der Menge von annulierenden Polynomen führt zur folgenden Definition.

Definition 3.1. Eine nichtleere Teilmenge $\mathfrak{a}$ eines kommutativen Ringes R heißt *Ideal*, wenn die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(1) Für alle $a, b \in \mathfrak{a}$ ist auch $a + b \in \mathfrak{a}$.
(2) Für alle $a \in \mathfrak{a}$ und $r \in R$ ist auch $ra \in \mathfrak{a}$.

Ein Ideal ist eine Untergruppe der additiven Gruppe von R, die zusätzlich die zweite oben angeführte Eigenschaft erfüllt. Die einfachsten Ideale sind das *Nullideal* 0 und das *Einheitsideal* R.

[3] In der letzten Vorlesung haben wir gesehen, dass eine Einheitswurzel ζ nach Definition von $X^n - 1$ annuliert wird, bei $\zeta \neq 1$ aber auch von $X^{n-1} + \ldots + X^1 + 1$. Gibt es noch weitere annulierende Polynome? Gibt es noch weitere annulierende Polynome von kleinerem Grad?

Für den Ring der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ sind Untergruppen und Ideale identische Begriffe. Dies folgt einerseits aus der Gestalt $H = \mathbb{Z}d$ für jede Untergruppe von $\mathbb{Z}$ (die ihrerseits aus der Division mit Rest) aber ebenso direkt aus der Tatsache, dass für $k \in H$ und beliebiges $r \in \mathbb{N}$ gilt $rk = k + k + \ldots + k$ (r-mal) und entsprechend für negatives r. Die Skalarmultiplikation mit einem beliebigen Ringelement lässt sich also bei $\mathbb{Z}$ auf die Addition zurückführen.

Definition 3.2. Ein Ideal $\mathfrak{a}$ in einem kommutativen Ring R der Form

$$\mathfrak{a} = (a) = Ra = \{ra : r \in R\}.$$

heißt *Hauptideal*.

Definition 3.3. Zu einer Familie von Elementen $a_j \in R$, $j \in J$, in einem kommutativen Ring R bezeichnet $(a_j : j \in J)$ das von den a_j *erzeugte Ideal*. Es besteht aus allen (endlichen) *Linearkombinationen*

$$\sum_{j \in J_0} r_j a_j \,,$$

wobei $J_0 \subseteq J$ eine endliche Teilmenge und $r_j \in R$ ist.

Es handelt sich dabei um das kleinste Ideal in R, das alle a_j, $j \in J$, enthält. Dass ein solches Ideal existiert ist auch deshalb klar, weil der Durchschnitt von einer beliebigen Familie von Idealen wieder ein Ideal ist. Ein Hauptideal ist demnach ein Ideal, das von einem Element erzeugt wird.

3.2. **Einige ringtheoretische Konzepte.**

In einem Körper folgt aus $xy = 0$, dass ein Faktor 0 sein muss. Diese Eigenschaft gilt nicht für beliebige Ringe. Ein Element $f \in R$ in einem kommutativen Ring heißt *Nichtnullteiler*, wenn aus $fg = 0$ stets $g = 0$ folgt. Man nennt einen Ring *nullteilerfrei*, wenn 0 der einzige Nullteiler ist.

Definition 3.4. Ein kommutativer, nullteilerfreier, von null verschiedener Ring heißt *Integritätsbereich*.

Der Ring $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen und die Polynomringe $K[X]$ über einem Körper K sind Integritätsbereiche. Das sind für uns die wichtigsten Beispiele.

Definition 3.5. Ein Element u in einem kommutativen Ring R heißt *Einheit*, wenn es ein Element $v \in R$ mit $uv = 1$ gibt.

Definition 3.6. Sei R ein kommutativer Ring, und a, b Elemente in R. Man sagt, dass a das Element b *teilt* (oder dass b von a geteilt wird, oder dass b ein *Vielfaches* von a ist), wenn es ein $c \in R$ gibt derart, dass $b = c \cdot a$ ist. Man schreibt dafür auch $a|b$.

Definition 3.7. Sei R ein kommutativer Ring. Man sagt, dass zwei Elemente $a, b \in R$ *teilerfremd* sind, wenn jedes Element $c \in R$, das sowohl a als auch b teilt, eine Einheit ist.

Definition 3.8. Eine Nichteinheit p in einem kommutativen Ring heißt *irreduzibel* (oder *unzerlegbar*), wenn eine Faktorisierung $p = ab$ nur dann möglich ist, wenn einer der Faktoren eine Einheit ist.

Diese Begriffsbildung orientiert sich offenbar an den Primzahlen. Dagegen taucht das Wort „prim“ in der folgenden Definition auf.

Definition 3.9. Eine Nichteinheit $p \neq 0$ in einem kommutativen Ring R heißt *prim* (oder ein *Primelement*), wenn folgendes gilt: Teilt p ein Produkt ab mit $a, b \in R$, so teilt es einen der Faktoren.

Eine Einheit ist also nach Definition nie ein Primelement. Dies ist eine Verallgemeinerung des Standpunktes, dass 1 keine Primzahl ist. Dabei ist die 1 nicht deshalb keine Primzahl, weil sie „zu schlecht“ ist, sondern weil sie „zu gut“ ist. Für die ganzen Zahlen und für viele weitere Ringe fallen die beiden Begriffe prim und irreduzibel zusammen. Im Allgemeinen ist irreduzibel einfacher nachzuweisen, und prim ist der stärkere Begriff, jedenfalls für Integritätsbereiche.

Lemma 3.10. *In einem Integritätsbereich ist ein Primelement stets irreduzibel.*

Beweis. Angenommen, wir haben eine Zerlegung $p = ab$. Wegen der Primeigenschaft teilt p einen Faktor, sagen wir $a = ps$. Dann ist $p = psb$ bzw. $p(1 - sb) = 0$. Da p kein Nullteiler ist, folgt $1 = sb$, so dass also b eine Einheit ist. □

3.3. **Irreduzible Polynome.**

Beispiel 3.11. Ein nichtkonstantes Polynom $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \ldots + a_nX^n \in K[X]$, wobei K einen Körper bezeichne, ist genau dann irreduzibel, wenn es keine Produktdarstellung

$$P = QR$$

gibt, die die Gradbedingung

$$0 < \deg(Q) < \deg(P)$$

erfüllt.

Die irreduziblen Polynome sind gerade die irreduziblen Elemente im Polynomring $K[X]$ im Sinne der obigen allgemeinen ringtheoretischen Definition. Nach der weiter unten zu beweisenden Aussage könnte man auch von Primelementen bzw. Primpolynomen sprechen. Eine weitere wichtige Charakterisierung ist die Restklassencharakterisierung, die wir in der siebten Vorlesung kennenlernen werden.

Beispiel 3.12. Die Irreduzibilität eines Polynoms hängt wesentlich vom Grundkörper ab. Zum Beispiel ist das reelle Polynom $X^2+1 \in \mathbb{R}[X]$ irreduzibel, dagegen zerfällt es als Polynom in $\mathbb{C}[X]$ als

$$X^2+1 = (X+i)(X-i)\,.$$

Ebenso ist das Polynom $X^2-5 \in \mathbb{Q}[X]$ irreduzibel, aber über $\mathbb{R}$ hat es die Zerlegung

$$X^2-5 = (X-\sqrt{5})(X+\sqrt{5})\,.$$

Übrigens kann die Zerlegung über einem größeren Körper manchmal dazu benutzt werden um zu zeigen, dass ein Polynom über dem gegebenen Körper irreduzibel ist.

Die Existenz der Faktorzerlegung in der folgenden Aussage folgt unmittelbar aus der Definition von irreduzibel, für die Eindeutigkeit muss man aber wissen, dass in einem Polynomring die irreduziblen Polynome auch Primpolynome sind (siehe unten).

Satz 3.13. *Es sei K ein Körper und sei $F \in K[X]$ ein von 0 verschiedenes Polynom. Dann gibt es eine (bis auf die Reihenfolge der Faktoren) eindeutige Produktdarstellung*

$$F = aF_1 \cdots F_r$$

mit $a \in K^\times$ und irreduziblen normierten Polynomen F_i, $i = 1, \ldots, r$.

Beweis. Siehe Aufgabe 3.8. □

3.4. **Hauptidealbereiche.**

Definition 3.14. Ein Integritätsbereich, in dem jedes Ideal ein Hauptideal ist, heißt *Hauptidealbereich*.

Satz 3.15. *Ein Polynomring über einem Körper ist ein Hauptidealbereich.*

Beweis. Sei I ein von null verschiedenes Ideal in $K[X]$. Betrachte die nichtleere Menge

$$\{\operatorname{grad}(P) |\, P \in I,\, P \neq 0\}\,.$$

Diese Menge hat ein Minimum $m \in \mathbb{N}$, das von einem Element $F \in I$, $F \neq 0$, herrührt, sagen wir $m = \operatorname{grad}(F)$. Wir behaupten, dass $I = (F)$ ist. Sei hierzu $P \in I$ gegeben. Aufgrund von Satz Anhang 1.3 gilt

$$P = FQ + R \text{ mit } \operatorname{grad}(R) < \operatorname{grad}(F) \text{ oder } R = 0\,.$$

Wegen $R \in I$ und der Minimalität von $\operatorname{grad}(F)$ kann der erste Fall nicht eintreten. Also ist $R = 0$ und P ist ein Vielfaches von F. □

In der eingangs besprochenen Situation eines Elements $x \in L$ einer Körpererweiterung $K \subseteq L$ und des zugehörigen Annullationsideals

$$I = \{P \in K[X] |\, P(x) = 0\}$$

bedeutet dieser Satz, dass es ein Polynom geben muss, dass dieses Ideal erzeugt. Dieses Polynom besitzt unter sämtlichen annullierenden Polynomen $\neq 0$ minimalen Grad, und man kann es als normiert ansetzen, wodurch es eindeutig festgelegt wird. Man spricht vom *Minimalpolynom* zu x.

Mit einem ähnlichen Argument wie im Beweis der letzten Aussage verwendet kann man zeigen, dass $\mathbb{Z}$ ebenfalls ein Hauptidealbereich ist. Die folgenden Aussagen gelten also auch für $\mathbb{Z}$.

Die beiden folgenden Aussagen nennt man *Lemma von Bezout* bzw. *Lemma von Euklid*.

Lemma 3.16. *Sei R ein Hauptidealbereich und seien $a, b \in R$ zwei teilerfremde Elemente. Dann kann man die 1 als Linearkombination von a und b darstellen, d.h. es gibt Elemente $r, s \in R$ mit $ra + sb = 1$.*

Beweis. Wir betrachten das von a und b erzeugte Ideal $I = (a, b)$. Da R ein Hauptidealbereich ist, gibt es ein $c \in R$ mit $(a, b) = (c)$. Daher ist c ein Teiler von a und von b. Die Teilerfremdheit impliziert, dass c eine Einheit ist. Wegen $c \in (a, b)$ gibt es eine Darstellung $c = ua + vb$. Multiplikation mit c^{-1} ergibt die Darstellung der 1. □

Lemma 3.17. *Sei R ein Hauptidealbereich und $a, b, c \in R$. Es seien a und b teilerfremd und a teile das Produkt bc. Dann teilt a den Faktor c.*

Beweis. Da a und b teilerfremd sind, gibt es nach dem Lemma von Bezout Elemente $r, s \in R$ mit $ra + sb = 1$. Die Voraussetzung, dass a das Produkt bc teilt, schreiben wir als $bc = da$. Damit gilt

$$c = c1 = c(ra + sb) = cra + csb = a(cr + ds),$$

was zeigt, dass c ein Vielfaches von a ist. □

Korollar 3.18. *Sei R ein Hauptidealbereich. Dann ist ein Element genau dann prim, wenn es irreduzibel ist.*

Beweis. Ein Primelement in einem Integritätsbereich ist nach Lemma 3.10 stets irreduzibel. Sei also umgekehrt p irreduzibel, und nehmen wir an, dass p das Produkt ab teilt, sagen wir $pc = ab$. Nehmen wir an, dass a kein Vielfaches von p ist. Dann sind aber a und p teilerfremd, da eine echte Inklusionskette $(p) \subset (p, a) = (d) \subset R$ der Irreduzibilität von p widerspricht. Damit teilt p nach dem Lemma von Euklid den anderen Faktor b. □

4. Vorlesung

In dieser und der nächsten Vorlesung werden wir uns mit Gruppentheorie, insbesondere mit Restklassenbildung, beschäftigen. Zum einen ist die Restklassenbildung für uns wichtig, um zu einem Ideal $I \subseteq K[X]$ den Restklassenring $K[X]/I$ zu konstruieren. Diese Konstuktion ist entscheidend, um

die dritte zu Beginn der letzten Vorlesung gestellte Frage beantworten zu können. Zum andern treten Gruppen als Galoisgruppen von Körpererweiterungen auf, und die Korrespondenz zwischen Untergruppen der Galoisgruppe und Zwischenkörpern ist der Hauptgegenstand der Galoistheorie. Um unser hauptsächliches Interesse, die Körper- und Galoistheorie, nicht zu lange aus dem Blick zu verlieren, werden wir uns hier bei den ohnehin einfachen Beweisen kurz halten. Ähnliche Argumente sind von der linearen Algebra bekannt.

4.1. **Gruppenhomomorphismen.**

Definition 4.1. Seien $(G, \circ, e_G)$ und $(H, \circ, e_H)$ Gruppen. Eine Abbildung

$$\psi : G \longrightarrow H$$

heißt *Gruppenhomomorphismus*, wenn die Gleichheit

$$\psi(g \circ g') \;=\; \psi(g) \circ \psi(g')$$

für alle $g, g' \in G$ gilt.

Die Menge der Gruppenhomomorphismen von G nach H wird mit

$$\mathrm{Hom}\,(G, H)$$

bezeichnet. Aus der linearen Algebra sind vermutlich die linearen Abbildungen zwischen Vektorräumen bekannt, welche insbesondere Gruppenhomomorphismen sind, darüber hinaus aber auch noch mit der skalaren Multiplikation verträglich sind. Die folgenden beiden Lemmata folgen direkt aus der Definition.

Lemma 4.2. *Es seien G und H Gruppen und $\varphi : G \to H$ sei ein Gruppenhomomorphismus. Dann ist $\varphi(e_G) = e_H$ und $(\varphi(g))^{-1} = \varphi(g^{-1})$ für jedes $g \in G$.*

Beweis. Siehe Aufgabe 4.1. □

Lemma 4.3. *Es seien F, G, H Gruppen. Dann gelten folgende Eigenschaften.*

(1) *Die Identität* $\mathrm{id} : G \to G$ *ist ein Gruppenhomomorphismus.*
(2) *Sind $\varphi : F \to G$ und $\psi : G \to H$ Gruppenhomomorphismen, so ist auch die Hintereinanderschaltung $\psi \circ \varphi : F \to H$ ein Gruppenhomomorphismus.*
(3) *Ist $F \subseteq G$ eine Untergruppe, so ist die Inklusion $F \hookrightarrow G$ ein Gruppenhomomorphismus.*
(4) *Sei $\{e\}$ die triviale Gruppe. Dann ist die Abbildung $\{e\} \to G$, die e auf e_G schickt, ein Gruppenhomomorphismus. Ebenso ist die (konstante) Abbildung $G \to \{e\}$ ein Gruppenhomomorphismus.*

Beweis. Das ist trivial. □

Lemma 4.4. *Sei G eine Gruppe. Dann entsprechen sich eindeutig Gruppenelemente $g \in G$ und Gruppenhomomorphismen φ von $\mathbb{Z}$ nach G über die Korrespondenz*

$$g \longmapsto (n \mapsto g^n) \text{ und } \varphi \longmapsto \varphi(1)\,.$$

Beweis. Siehe Aufgabe 4.2. □

Man kann den Inhalt dieses Lemmas auch kurz durch $G \cong \mathrm{Hom}\,(\mathbb{Z}, G)$ ausdrücken. Die Gruppenhomomorphismen von einer Gruppe G nach $\mathbb{Z}$ sind schwieriger zu charakterisieren. Die Gruppenhomomorphismen von $\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{Z}$ sind die Multiplikationen mit einer festen ganzen Zahl a, also

$$\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z},\, x \longmapsto ax.$$

4.2. **Gruppenisomorphismen.**

Definition 4.5. Seien G und H Gruppen. Einen bijektiven Gruppenhomomorphismus

$$\varphi : G \longrightarrow H$$

nennt man einen *Isomorphismus* (oder eine *Isomorphie*). Die beiden Gruppen heißen *isomorph*, wenn es einen Isomorphismus zwischen ihnen gibt.

Lemma 4.6. *Seien G und H Gruppen und sei*

$$\varphi : G \longrightarrow H$$

ein Gruppenisomorphismus. Dann ist auch die Umkehrabbildung

$$\varphi^{-1} : H \longrightarrow G,\, h \longmapsto \varphi^{-1}(h),$$

ein Gruppenisomorphismus.

Beweis. Siehe Aufgabe 4.3. □

Isomorphe Gruppen sind bezüglich ihrer gruppentheoretischen Eigenschaften als gleich anzusehen. Isomorphismen einer Gruppe auf sich selbst nennt man auch *Automorphismen*. Wichtige Beispiele für Automorphismen sind die sogenannten inneren Automorphismen, siehe die nächste Vorlesung.

4.3. **Der Kern eines Gruppenhomomorphismus.**

Definition 4.7. Seien G und H Gruppen und sei

$$\varphi : G \longrightarrow H$$

ein Gruppenhomomorphismus. Dann nennt man das Urbild des neutralen Elementes den *Kern* von φ, geschrieben

$$\mathrm{kern}\ \varphi = \varphi^{-1}(e_H) = \{g \in G |\, \varphi(g) = e_H\}\,.$$

Lemma 4.8. *Seien G und H Gruppen und sei*

$$\varphi : G \longrightarrow H$$

ein Gruppenhomomorphismus. Dann ist der Kern von φ eine Untergruppe von G.

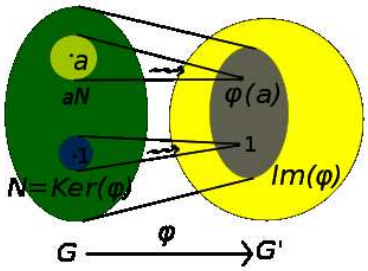
Beweis. Wegen $\varphi(e_G) = e_H$ ist $e_G \in \ker \varphi$. Seien $g, g' \in \ker \varphi$. Dann ist

$$\varphi(gg') = \varphi(g)\varphi(g') = e_H e_H = e_H$$

und daher ist auch $gg' \in \ker \varphi$. Der Kern ist also ein Untermonoid. Sei nun $g \in \ker \varphi$ und betrachte das inverse Element g^{-1}. Es ist

$$\varphi(g^{-1}) = (\varphi(g))^{-1} = e_H^{-1} = e_H \,,$$

also auch $g^{-1} \in \ker \varphi$. □



Lemma 4.9. *Seien G und H Gruppen. Ein Gruppenhomomorphismus $\varphi : G \to H$ ist genau dann injektiv, wenn der Kern von φ trivial ist.*

Beweis. Wenn φ injektiv ist, so darf auf jedes Element $h \in H$ höchstens ein Element aus G gehen. Da e_G auf e_H geschickt wird, darf kein weiteres Element auf e_H gehen, d.h. $\ker \varphi = \{e_G\}$. Sei umgekehrt dies der Fall und sei angenommen, dass $g, \tilde{g} \in G$ beide auf $h \in H$ geschickt werden. Dann ist

$$\varphi(g\tilde{g}^{-1}) = \varphi(g)\varphi(\tilde{g})^{-1} = hh^{-1} = e_H$$

und damit ist $g\tilde{g}^{-1} \in \ker \varphi$, also $g\tilde{g}^{-1} = e_G$ nach Voraussetzung und damit $g = \tilde{g}$. □

4.4. **Nebenklassen.**

Definition 4.10. Sei G eine Gruppe und $H \subseteq G$ eine Untergruppe. Wir setzen $x \sim_H y$ (und sagen, dass x und y äquivalent sind) wenn $x^{-1}y \in H$.

Dies ist in der Tat eine Äquivalenzrelation: Aus $x^{-1}x = e_G \in H$ folgt, dass diese Relation reflexiv ist. Aus $x^{-1}y \in H$ folgt sofort $y^{-1}x = (x^{-1}y)^{-1} \in H$ und aus $x^{-1}y \in H$ und $y^{-1}z \in H$ folgt $x^{-1}z \in H$.

Definition 4.11. Sei G eine Gruppe und $H \subseteq G$ eine Untergruppe. Dann heißt zu jedem $x \in G$ die Teilmenge

$$xH = \{xh |\, h \in H\}$$

die *Linksnebenklasse von* x in G bzgl. H. Jede Teilmenge von dieser Form heißt *Linksnebenklasse*. Entsprechend heißt eine Menge der Form

$$Hy = \{hy |\, h \in H\}$$

Rechtsnebenklasse (zu y).

Die Äquivalenzklassen zu der oben definierten Äquivalenzrelation sind wegen

$$\begin{aligned} [x] &= \{y \in G |\, x \sim y\} \\ &= \{y \in G |\, x^{-1}y \in H\} \\ &= \{y \in G |\, \text{es gibt } h \in H \text{ mit } x^{-1}y = h\} \\ &= \{y \in G |\, \text{es gibt } h \in H \text{ mit } y = xh\} \\ &= xH \end{aligned}$$

genau die Linksnebenklassen. Die Linksnebenklassen bilden somit eine disjunkte Zerlegung (eine *Partition*) von G. Dies gilt ebenso für die Rechtsnebenklassen. Im kommutativen Fall muss man nicht zwischen Links- und Rechtsnebenklassen unterscheiden.

Lemma 4.12. *Sei G eine Gruppe und $H \subseteq G$ eine Untergruppe. Es seien $x, y \in G$ zwei Elemente. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

(1) $x \in yH$
(2) $y \in xH$
(3) $y^{-1}x \in H$
(4) $x^{-1}y \in H$
(5) $xH \cap yH \neq \emptyset$
(6) $x \sim_H y$.
(7) $xH = yH$.

Beweis. Die Äquivalenz von (1) und (3) (und die von (2) und (4)) folgt aus Multiplikation mit y^{-1} bzw. mit y. Die Äquivalenz von (3) und (4) folgt durch Übergang zum Inversen. Aus (1) folgt (5) wegen $1 \in H$. Wenn (5) erfüllt ist, so bedeutet das $xh_1 = yh_2$ mit $h_1, h_2 \in H$. Damit ist $x = yh_2h_1^{-1}$ und (1) ist erfüllt. (4) und (6) sind nach Definition äquivalent. Da die Nebenklassen Äquivalenzklassen sind, ergibt sich die Äquivalenz von (5) und (7). □

4.5. **Gruppenordnung und Elementordnung.**

Definition 4.13. Zu einer endlichen Gruppe G bezeichnet man die Anzahl ihrer Elemente als *Gruppenordnung* oder als die *Ordnung der Gruppe*, geschrieben

$$\operatorname{ord}(G) = \#(G)\,.$$

Definition 4.14. Sei G eine Gruppe und $g \in G$ ein Element. Dann nennt man die kleinste positive Zahl n mit $g^n = e_G$ die *Ordnung* von g. Man schreibt hierfür $\operatorname{ord}(g)$. Wenn alle positiven Potenzen von g vom neutralen Element verschieden sind, so setzt man $\operatorname{ord}(g) = \infty$.

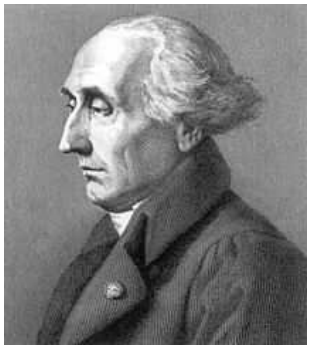
Lemma 4.15. *Sei G eine endliche Gruppe. Dann besitzt jedes Element $g \in G$ eine endliche Ordnung. Die Potenzen*

$$g^0 = e_G,\ g^1 = g,\ g^2, \ldots, g^{\operatorname{ord}(g)-1}$$

sind alle verschieden.

Beweis. Siehe Aufgabe 4.8. □

4.6. **Der Satz von Lagrange.**



Joseph-Louis Lagrange (1736 Turin - 1813 Paris)

Satz 4.16. *Sei G eine endliche Gruppe und $H \subseteq G$ eine Untergruppe von G. Dann ist ihre Kardinalität $\#(H)$ ein Teiler von $\#(G)$.*

Beweis. Betrachte die Linksnebenklassen $gH := \{gh | \, h \in H\}$ für sämtliche $g \in G$. Es ist $h \mapsto gh$ eine Bijektion zwischen H und gH, so dass alle Nebenklassen gleich groß sind (und zwar $\#(H)$ Elemente haben). Die Nebenklassen bilden (als Äquivalenzklassen) zusammen eine Zerlegung von G, so dass $\#(G)$ ein Vielfaches von $\#(H)$ sein muss. □

Korollar 4.17. *Sei G eine endliche Gruppe und sei $g \in G$ ein Element. Dann teilt die Ordnung von g die Gruppenordnung.*

Beweis. Sei H die von g erzeugte Untergruppe. Nach Lemma 4.15 ist $\operatorname{ord}(g) = \operatorname{ord}(H)$. Daher teilt diese Zahl nach Satz 4.16 die Gruppenordnung von G. □

Definition 4.18. Zu einer Untergruppe $H \subseteq G$ heißt die Anzahl der (Links- oder Rechts)Nebenklassen der *Index* von H in G, geschrieben

$$\operatorname{ind}_G H\,.$$

In der vorstehenden Definition ist Anzahl im allgemeinen als die *Mächtigkeit* einer Menge zu verstehen. Der Index wird aber hauptsächlich dann verwendet, wenn er endlich ist, wenn es also nur endlich viele Nebenklassen gibt. Das ist bei endlichem G automatisch der Fall, kann aber auch bei unendlichem G der Fall sein, wie schon die Beispiele $\mathbb{Z}n \subseteq \mathbb{Z}$, $n \geq 1$, zeigen. Wenn G eine endliche Gruppe ist und $H \subseteq G$ eine Untergruppe, so gilt aufgrund des Satzes von Lagrange die einfache *Indexformel*

$$\#(G) = \#(H) \cdot \operatorname{ind}_G H \, .$$

5. Vorlesung

In dieser Vorlesung diskutieren wir Normalteiler, das sind Untergruppen, für die Links- und Rechtsnebenklassen übereinstimmen. Für Normalteiler kann man Restklassengruppen konstruieren.

5.1. **Innere Automorphismen.**

Definition 5.1. Sei G eine Gruppe und $g \in G$. Die durch g definierte Abbildung

$$\kappa_g : G \longrightarrow G,\, x \longmapsto gxg^{-1},$$

heißt *innerer Automorphismus.*

Eine solche Abbildung nennt man auch *Konjugation* (mit g).

Lemma 5.2. *Ein innerer Automorphismus ist in der Tat ein Automorphismus. Die Zuordnung*

$$G \longrightarrow \operatorname{Aut} G,\, g \longmapsto \kappa_g,$$

ist ein Gruppenhomomorphismus.

Beweis. Es ist

$$\kappa_g(xy) \, = \, gxyg^{-1} \, = \, gxg^{-1}gyg^{-1} \, = \, \kappa_g(x)\kappa_g(y),$$

so dass ein Gruppenhomomorphismus vorliegt. Wegen

$$\kappa_g(\kappa_h(x)) \, = \, \kappa_g(hxh^{-1}) \, = \, ghxh^{-1}g^{-1} \, = \, ghx(gh)^{-1} \, = \, \kappa_{gh}$$

ist einerseits

$$\kappa_{g^{-1}} \circ \kappa_g \, = \, \kappa_{g^{-1}g} \, = \, \mathrm{id}_G,$$

so dass κ_g bijektiv, also ein Automorphismus, ist. Andererseits ist deshalb die Gesamtabbildung κ ein Gruppenhomomorphismus. □

Wenn G eine kommutative Gruppe ist, so ist wegen $gxg^{-1} = xgg^{-1} = x$ die Identität der einzige innere Automorphismus. Der Begriff ist also nur bei nicht kommutativen Gruppen von Interesse.

5.2. **Normalteiler.**

Definition 5.3. Sei G eine Gruppe und $H \subseteq G$ eine Untergruppe. Man nennt H einen *Normalteiler*, wenn

$$xH = Hx$$

ist für alle $x \in G$, wenn also die Linksnebenklasse zu x mit der Rechtsnebenklasse zu x übereinstimmt.

Bei einem Normalteiler braucht man nicht zwischen Links- und Rechtsnebenklassen zu unterscheiden und spricht einfach von *Nebenklassen*. Die Gleichheit $xH = Hx$ bedeutet *nicht*, dass $xh = hx$ ist für alle $h \in H$, sondern lediglich, dass es zu jedem $h \in H$ ein $\tilde{h} \in H$ gibt mit $xh = \tilde{h}x$. Statt xH oder Hx schreiben wir meistens $[x]$.

Lemma 5.4. *Sei G eine Gruppe und $H \subseteq G$ eine Untergruppe. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

(1) *H ist ein Normalteiler*
(2) *Es ist $xhx^{-1} \in H$ für alle $x \in G$ und $h \in H$.*
(3) *H ist invariant unter jedem inneren Automorphismus von G.*

Beweis. (1) bedeutet bei gegebenem $h \in H$, dass man $xh = \tilde{h}x$ schreiben kann mit einem $\tilde{h} \in H$. Durch Multiplikation mit x^{-1} von rechts ergibt sich $xhx^{-1} = \tilde{h} \in H$, also (2). Dieses Argument rückwärts ergibt die Implikation (2) $\Rightarrow$ (1). Ferner ist (2) eine explizite Umformulierung von (3). □

Beispiel 5.5. Wir betrachten die Permutationsgruppe $G = S_3$ zu einer dreielementigen Menge, d.h. S_3 besteht aus den bijektiven Abbildungen der Menge $\{1, 2, 3\}$ in sich. Die triviale Gruppe $\{\mathrm{id}\}$ und die ganze Gruppe sind Normalteiler. Die Teilmenge $H = \{\mathrm{id}\,, \varphi\}$, wobei φ die Elemente 1 und 2 vertauscht und 3 unverändert lässt, ist eine Untergruppe. Sie ist aber kein Normalteiler. Um dies zu zeigen, sei ψ die Bijektion, die 1 fest lässt und 2 und 3 vertauscht. Dieses ψ ist zu sich selbst invers. Die Konjugation $\psi\varphi\psi^{-1} = \psi\varphi\psi$ ist dann die Abbildung, die 1 auf 3, 2 auf 2 und 3 auf 1 schickt, und diese Bijektion gehört nicht zu H.

Lemma 5.6. *Seien G und H Gruppen und sei $\varphi : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Dann ist der Kern* $\ker\varphi$ *ein Normalteiler in G.*

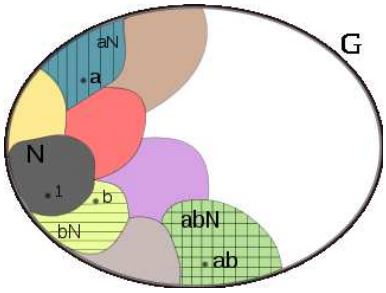
Beweis. Wir verwenden Lemma 5.4. Sei also $x \in G$ beliebig und $h \in \ker\varphi$. Dann ist

$$\varphi(xhx^{-1}) = \varphi(x)\varphi(h)\varphi(x^{-1}) = \varphi(x)e_H\varphi(x^{-1}) = \varphi(x)\varphi(x)^{-1} = e_H,$$

also gehört xhx^{-1} ebenfalls zum Kern. □

5.3. **Restklassenbildung.**

Wir zeigen nun umgekehrt, dass jeder Normalteiler sich als Kern eines geeigneten, surjektiven Gruppenhomomorphismus realisieren lässt.



Die Multiplikation der Nebenklassen zu einem Normalteiler $N \subseteq G$.

Satz 5.7. *Sei G eine Gruppe und $H \subseteq G$ ein Normalteiler. Es sei G/H die Menge der Nebenklassen (die Quotientenmenge) und*

$$q : G \longrightarrow G/H,\ g \longmapsto [g],$$

die kanonische Projektion. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Gruppenstruktur auf G/H derart, dass q ein Gruppenhomomorphismus ist.

Beweis. Da die kanonische Projektion zu einem Gruppenhomomorphismus werden soll, muss die Verknüpfung durch

$$[x][y] = [xy]$$

gegeben sein. Wir müssen also zeigen, dass durch diese Vorschrift eine wohldefinierte Verknüpfung auf G/H definiert ist, die unabhängig von der Wahl der Repräsentanten ist. D.h. wir haben für $[x] = [x']$ und $[y] = [y']$ zu zeigen, dass $[xy] = [x'y']$ ist. Nach Voraussetzung können wir $x' = xh$ und $hy' = \tilde{h}y = yh'$ schreiben mit $h, \tilde{h}, h' \in H$. Damit ist

$$x'y' = (xh)y' = x(hy') = x(yh') = xyh'.$$

Somit ist $[xy] = [x'y']$. Aus der Wohldefiniertheit der Verknüpfung auf G/H folgen die Gruppeneigenschaften, die Homomorphieeigenschaft der Projektion und die Eindeutigkeit. □

Definition 5.8. Sei G eine Gruppe und $H \subseteq G$ ein Normalteiler. Die Quotientenmenge

$$G/H$$

mit der aufgrund von Satz 5.7 eindeutig bestimmten Gruppenstruktur heißt *Restklassengruppe von G modulo H*. Die Elemente $[g] \in G/H$ heißen *Restklassen*. Für eine Restklasse $[g]$ heißt jedes Element $g' \in G$ mit $[g'] = [g]$ ein *Repräsentant* von $[g]$.

Beispiel 5.9. Die Untergruppen der ganzen Zahl sind nach Satz 3.2 (Einführung in die Algebra (Osnabrück 2009)) von der Form $\mathbb{Z}n$ mit $n \geq 0$ (diese Aussage ist analog zu der in Vorlesung 3 bewiesenen Aussage, dass $K[X]$ ein Hauptidealbereich ist). Die Restklassengruppen werden mit

$$\mathbb{Z}/(n)$$

bezeichnet (sprich „$\mathbb{Z}$ modulo n“). Bei $n = 0$ ist das einfach $\mathbb{Z}$ selbst, bei $n = 1$ ist das die triviale Gruppe. Im Allgemeinen ist die durch die Untergruppe $\mathbb{Z}n$ definierte Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$ dadurch gegeben, dass zwei ganze Zahlen a und b genau dann äquivalent sind, wenn ihre Differenz $a - b$ zu $\mathbb{Z}n$ gehört, also ein Vielfaches von n ist. Daher ist (bei $n \geq 1$) jede ganze Zahl zu genau einer der n Zahlen

$$0, 1, 2, \ldots, n-1$$

äquivalent (oder, wie man auch sagt, *kongruent modulo* n), nämlich zum Rest, der sich bei Division durch n ergibt. Diese Reste bilden also ein Repräsentantensystem für die Restklassengruppe, und diese besitzt n Elemente. Die Tatsache, dass die Restklassenabbildung

$$\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/(n),\ a \longmapsto [a] = a \mod n,$$

ein Homomorphismus ist, kann man auch so ausdrücken, dass der Rest einer Summe von zwei ganzen Zahlen nur von den beiden Resten, nicht aber von den Zahlen selbst, abhängt.[4] Als Bild der zyklischen Gruppe[5] $\mathbb{Z}$ ist auch $\mathbb{Z}/(n)$ zyklisch, und zwar ist 1 (aber auch -1) stets ein Erzeuger.

5.4. **Die Homomorphiesätze für Gruppen.**

Satz 5.10. *Seien G, Q und H Gruppen, es sei $\varphi : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus und $\psi : G \to Q$ ein surjektiver Gruppenhomomorphismus. Es sei vorausgesetzt, dass*

$$\operatorname{kern} \psi \subseteq \operatorname{kern} \varphi$$

ist. Dann gibt es einen eindeutig bestimmten Gruppenhomomorphismus

$$\tilde{\varphi} : Q \longrightarrow H$$

derart, dass $\varphi = \tilde{\varphi} \circ \psi$ ist. Mit anderen Worten: das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & Q \\ & \searrow & \downarrow \\ & & H \end{array}$$

ist kommutativ.

[4]Dies gilt auch für das Produkt von zwei Zahlen, was bedeutet, dass diese Abbildung ein Ringhomomorphismus ist.

[5]Eine Gruppe G heißt *zyklisch*, wenn sie von einem Element erzeugt wird.

Beweis. Wir zeigen zuerst die Eindeutigkeit. Für jedes Element $u \in Q$ gibt es mindestens ein $g \in G$ mit $\psi(g) = u$. Wegen der Kommutativität des Diagramms muss

$$\tilde{\varphi}(u) = \varphi(g)$$

gelten. Das bedeutet, dass es maximal ein $\tilde{\varphi}$ geben kann. Wir haben zu zeigen, dass durch diese Bedingung eine wohldefinierte Abbildung gegeben ist. Seien also $g, g' \in G$ zwei Urbilder von u. Dann ist

$$g'g^{-1} \in \operatorname{kern} \psi \subseteq \operatorname{kern} \varphi$$

und daher ist $\varphi(g) = \varphi(g')$. Die Abbildung ist also wohldefiniert. Seien $u, v \in Q$ und seien $g, h \in G$ Urbilder davon. Dann ist gh ein Urbild von uv und daher ist

$$\tilde{\varphi}(uv) \;=\; \varphi(gh) \;=\; \varphi(g)\varphi(h) \;=\; \tilde{\varphi}(u)\tilde{\varphi}(v).$$

D.h. φ ist ein Gruppenhomomorphismus. □

Die im vorstehenden Satz konstruierte Abbildung heißt *induzierte Abbildung* oder *induzierter Homomorphismus* und entsprechend heißt der Satz auch *Satz vom induzierten Homomorphismus.*

Korollar 5.11. *Seien G und H Gruppen und sei $\varphi : G \to H$ ein surjektiver Gruppenhomomorphismus. Dann gibt es eine kanonische Isomorphie*

$$\tilde{\varphi} : G/\operatorname{kern} \varphi \longrightarrow H.$$

Beweis. Wir wenden Satz 5.10 auf $Q = G/\operatorname{kern} \varphi$ und die kanonische Projektion $q : G \to G/\operatorname{kern} \varphi$ an. Dies induziert einen Gruppenhomomorphismus

$$\tilde{\varphi} : G/\operatorname{kern} \varphi \longrightarrow H$$

mit $\varphi = \tilde{\varphi} \circ q$, der surjektiv ist. Sei $[x] \in G/\operatorname{kern} \varphi$ und $[x] \in \operatorname{kern} \tilde{\varphi}$. Dann ist

$$\tilde{\varphi}([x]) \;=\; \varphi(x) \;=\; e_H,$$

also $x \in \operatorname{kern} \varphi$. Damit ist $[x] = e_Q$, d.h. der Kern von $\tilde{\varphi}$ ist trivial und nach Lemma 4.9 ist $\tilde{\varphi}$ auch injektiv. □

Satz 5.12. *Seien G und H Gruppen und sei $\varphi : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Dann gibt es eine kanonische Faktorisierung*

$$G \xrightarrow{q} G/\operatorname{kern} \varphi \xrightarrow{\theta} \operatorname{bild} \varphi \xhookrightarrow{\iota} H\,,$$

wobei q die kanonische Projektion, θ ein Gruppenisomorphismus und ι die kanonische Inklusion der Bildgruppe ist.

Beweis. Dies folgt aus Korollar 5.10 angewandt auf die Bildgruppe $U = \operatorname{bild} \varphi \subseteq H$. □

Diese Aussage wird häufig kurz und prägnant so formuliert:

Bild = Urbild modulo Kern.

Satz 5.13. *Sei G eine Gruppe und $N \subseteq G$ ein Normalteiler mit der Restklassengruppe $Q = G/N$. Es sei $H \subseteq G$ eine weiterer Normalteiler in G, der N umfasst. Dann ist das Bild $\overline{H}$ von H in Q ein Normalteiler und es gilt die kanonische Isomorphie*

$$G/H \cong Q/\overline{H}\,.$$

Beweis. Für die erste Aussage siehe Aufgabe 5.12. Damit ist die Restklassengruppe $Q/\overline{H}$ wohldefiniert. Wir betrachten die Komposition

$$p \circ q : G \longrightarrow Q \longrightarrow Q/\overline{H}\,.$$

Wegen

$$\begin{array}{rcl} \text{kern } p \circ q & = & \{x \in G |\, p \circ q(x) = e\} \\ & = & \{x \in G |\, q(x) \in \text{kern } p\} \\ & = & \{x \in G |\, q(x) \in \overline{H}\} \\ & = & H \end{array}$$

ist kern $p \circ q = H$. Daher ergibt Korollar 5.10 die kanonische Isomorphie

$$G/H \longrightarrow Q/\overline{H}.$$

□

Kurz gesagt ist also

$$G/H = (G/N)/(H/N)\,.$$

6. Vorlesung

6.1. **Ringhomomorphismen.**

Definition 6.1. Seien R und S Ringe. Eine Abbildung

$$\varphi : R \longrightarrow S$$

heißt *Ringhomomorphismus*, wenn folgende Eigenschaften gelten:

(1) $\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$
(2) $\varphi(1) = 1$
(3) $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$.

Ein Ringhomomorphismus ist also zugleich ein Gruppenhomomorphismus für die additive Struktur und ein Monoidhomomorphismus für die multiplikative Struktur. Einen bijektiven Ringhomomorphismus nennt man einen *Ringisomorphismus*, und zwei Ringe heißen *isomorph*, wenn es einen Ringisomorphismus zwischen ihnen gibt. Zu einem Unterring $S \subseteq R$ ist die natürliche Inklusion ein Ringhomomorphismus. Die konstante Abbildung $R \to 0$ in den Nullring ist stets ein Ringhomomorphismus, dagegen ist die umgekehrte Abbildung, also $0 \to R$, nur bei $R = 0$ ein Ringhomomorphismus.

6.2. **Die Charakteristik eines Ringes.**

Satz 6.2. *Sei R ein Ring. Dann gibt es einen eindeutig bestimmten Ringhomomorphismus*

$$\mathbb{Z} \longrightarrow R.$$

Beweis. Ein Ringhomomorphismus muss die 1 auf die 1_R abbilden. Deshalb gibt es nach Lemma 4.4 genau einen Gruppenhomomorphismus

$$\mathbb{Z} \longrightarrow (R, +, 0),\ n \longmapsto n1_R.$$

Wir müssen zeigen, dass diese Abbildung auch die Multiplikation respektiert, d.h. dass $(mn)1_R = (m1_R) * (n1_R)$ ist, wobei $*$ hier die Multiplikation in R bezeichnet. Dies folgt aber aus Lemma 12.5 (Einführung in die Algebra (Osnabrück 2009)) . □

Den in dieser Aussage konstruierten und eindeutig bestimmten Ringhomomorphismus nennt man auch den *kanonischen Ringhomomorphismus* (oder den *charakteristischen Ringhomomorphismus*) von $\mathbb{Z}$ nach R.

Definition 6.3. Die *Charakteristik* eines kommutativen Ringes R ist die kleinste positive natürliche Zahl n mit der Eigenschaft $n \cdot 1_R = 0$. Die Charakteristik ist 0, falls keine solche Zahl existiert.

Die Charakteristik beschreibt genau den Kern des obigen kanonischen (charakteristischen) Ringhomomorphismus.

6.3. **Der Einsetzungshomomorphismus.**

Satz 6.4. *Sei R ein kommutativer Ring und sei $R[X]$ der Polynomring über R. Es sei A ein weiterer kommutativer Ring und es sei $\varphi : R \to A$ ein Ringhomomorphismus und $a \in A$ ein Element. Dann gibt es einen eindeutig bestimmten Ringhomomorphismus*

$$\psi : R[X] \longrightarrow A$$

mit $\psi(X) = a$ und mit $\psi \circ i = \varphi$, wobei $i : R \to R[X]$ die kanonische Einbettung ist. Dabei geht das Polynom $P = \sum_{j=0}^{n} c_j X^j$ auf $\sum_{j=0}^{n} \varphi(c_j) a^j$.

Beweis. Bei einem Ringhomomorphismus

$$\psi : R[X] \longrightarrow A$$

mit $\psi \circ i = \varphi$ müssen die Konstanten $c \in R$ auf $\varphi(c)$ und X auf a gehen. Daher muss X^j auf a^j gehen. Da Summen respektiert werden, kann es nur einen Ringhomorphismus geben, der die im Zusatz angegebene Gestalt haben muss. Es ist also zu zeigen, dass durch diese Vorschrift wirklich ein Ringhomomorphismus definiert ist. Dies folgt aber direkt aus dem Distributivgesetz. □

Den in diesem Satz konstruierten Ringhomomorphismus nennt man den *Einsetzungshomomorphismus*. Es wird ja für die Variable X das Element a eingesetzt.

6.4. **Algebren.**

Definition 6.5. Seien R und A kommutative Ringe und sei $R \to A$ ein fixierter Ringhomomorphismus. Dann nennt man A eine *R-Algebra*.

Häufig ist der Ringhomomorphismus, der zum Begriff der Algebra gehört, vom Kontext her klar und wird nicht explizit aufgeführt. Z.B. ist der Polynomring $R[X]$ eine R-Algebra, indem man die Elemente aus R als konstante Polynome auffasst. Jeder Ring A ist auf eine eindeutige Weise eine $\mathbb{Z}$-Algebra über den kanonischen Ringhomomorphismus $\mathbb{Z} \to A$, $n \mapsto n_A$. Der Begriff der Algebra ist auch für nicht-kommutative Ringe A (bei kommutativem Grundring R) sinnvoll, wobei dann in aller Regel die Voraussetzung gemacht wird, dass die Elemente aus R mit allen Elementen aus A vertauschen.

Wir werden den Begriff der Algebra vor allem in dem Fall verwenden, wo der Grundring R ein Körper K ist. Eine K-Algebra A kann man stets in natürlicher Weise als Vektorraum über dem Körper K auffassen. Die Skalarmultiplikation wird dabei einfach über den Strukturhomomorphismus erklärt. Eine typische Situation ist dabei, dass $\mathbb{Q}$ der Grundkörper ist und ein Zwischenring L, $\mathbb{Q} \subseteq L \subseteq \mathbb{C}$, gegeben ist. Dann ist L über die Inklusion direkt eine $\mathbb{Q}$-Algebra.

Wenn man zwei Algebren über einem gemeinsamen Grundring hat, so sind vor allem diejenigen Ringhomomorphismen interessant, die den Grundring mitberücksichtigen. Dies führt zu folgendem Begriff.

Definition 6.6. Seien A und B zwei kommutative R-Algebren über einem kommutativen Grundring R. Dann nennt man einen Ringhomomorphismus

$$\varphi : A \longrightarrow B$$

einen *R-Algebra-Homomorphismus*, wenn er zusätzlich mit den beiden fixierten Ringhomomorphismen $R \to A$ und $R \to B$ verträglich ist.

Zum Beispiel ist jeder Ringhomomorphismus ein $\mathbb{Z}$-Algebra-Homomorphismus, da es zu jedem Ring A überhaupt nur den kanonischen Ringhomomorphismus $\mathbb{Z} \to A$ gibt.

Mit dieser Terminologie kann man den Einsetzungshomomorphismus jetzt so verstehen, dass der Polynomring $R[X]$ mit seiner natürlichen Algebrastruktur und eine weitere R-Algebra A mit einem fixierten Element $a \in A$ vorliegt und dass dann durch $X \mapsto a$ ein R-Algebra-Homomorphismus $R[X] \to A$ definiert wird.

6.5. **Ideale unter einem Ringhomomorphismus.**

Der Zusammenhang zwischen Ringhomomorphismen und Idealen wird durch folgenden Satz hergestellt.

Satz 6.7. *Seien R und S kommutative Ringe und sei*

$$\varphi : R \longrightarrow S$$

ein Ringhomomorphismus. Dann ist der Kern

$$\text{kern } \varphi = \{f \in R | \, \varphi(f) = 0\}$$

ein Ideal in R.

Beweis. Sei $I := \varphi^{-1}(0)$. Wegen $\varphi(0) = 0$ ist $0 \in I$. Seien $a, b \in I$. Das bedeutet $\varphi(a) = 0$ und $\varphi(b) = 0$. Dann ist

$$\varphi(a+b) \; = \; \varphi(a) + \varphi(b) \; = \; 0 + 0 \; = \; 0$$

und daher $a + b \in I$.

Sei nun $a \in I$ und $r \in R$ beliebig. Dann ist

$$\varphi(ra) \; = \; \varphi(r)\varphi(a) \; = \; \varphi(r) \cdot 0 \; = \; 0,$$

also ist $ra \in I$. □

Da ein Ringhomomorphismus insbesondere ein Gruppenhomomorphismus der zugrunde liegenden additiven Gruppe ist, gilt wieder das Kernkriterium für die Injektivität. Eine Anwendung davon ist das folgende Korollar.

Korollar 6.8. *Es sei K ein Körper und S ein vom Nullring verschiedener Ring. Es sei*

$$\varphi : K \longrightarrow S$$

ein Ringhomomorphismus. Dann ist φ injektiv.

Beweis. Es genügt nach Lemma 4.9 zu zeigen, dass der Kern der Abbildung gleich null ist. Nach Satz 6.7 ist der Kern ein Ideal. Da die 1 auf $1 \neq 0$ geht, ist der Kern nicht ganz K. Da es nach Aufgabe 6.5 in einem Körper überhaupt nur zwei Ideale gibt, muss der Kern das Nullideal sein. □

6.6. **Algebraische Elemente und Minimalpolynom.**

Definition 6.9. Sei K ein Körper und A eine kommutative K-Algebra. Es sei $f \in A$ ein Element. Dann heißt f *algebraisch* über K, wenn es ein von null verschiedenes Polynom $P \in K[X]$ gibt mit $P(f) = 0$.

Wenn ein Polynom $P \neq 0$ das algebraische Element $f \in A$ annulliert (also $P(f) = 0$ ist), so kann man durch den Leitkoeffizienten dividieren und erhält dann auch ein normiertes annullierendes Polynom.

Definition 6.10. Sei K ein Körper und A eine K-Algebra. Es sei $f \in A$ ein über K algebraisches Element. Dann heißt das normierte Polynom $P \in K[X]$ mit $P(f) = 0$, welches von minimalem Grad mit dieser Eigenschaft ist, das *Minimalpolynom* von f.

Wenn f nicht algebraisch ist, so wird das Nullpolynom als Minimalpolynom betrachtet.

Beispiel 6.11. Bei einer Körpererweiterung $K \subseteq L$ sind die Elemente $a \in K$ trivialerweise algebraisch, und zwar ist jeweils $X - a \in K[X]$ das Minimalpolynom. Weitere Beispiele liefern über $K = \mathbb{Q}$ die komplexen Zahlen $\sqrt{2}, i, 3^{1/5}$, etc. Annullierende Polynome aus $\mathbb{Q}[X]$ sind dafür $X^2 - 2$, $X^2 + 1$, $X^5 - 3$ (es handelt sich dabei übrigens um die Minimalpolynome, was in den ersten zwei Fällen einfach und im dritten Fall etwas schwieriger zu zeigen ist). Man beachte, dass bspw. $X - \sqrt{2}$ zwar ein annullierendes Polynom für $\sqrt{2}$ ist, dessen Koeffizienten aber nicht zu $\mathbb{Q}$ gehören.

Lemma 6.12. *Sei K ein Körper, A eine K-Algebra und $f \in A$ ein Element. Es sei P das Minimalpolynom von f über K. Dann ist der Kern des kanonischen K-Algebra-Homomorphismus*

$$K[X] \longrightarrow A,\ X \longmapsto f,$$

das von P erzeugte Hauptideal.

Beweis. Wir betrachten den kanonischen Einsetzungshomorphismus

$$K[X] \longrightarrow A,\ X \longmapsto f.$$

Dessen Kern ist nach Satz 6.7 und nach Satz 3.15 ein Hauptideal, sagen wir $\mathfrak{a} = (F)$, wobei wir F als normiert annehmen dürfen (im nicht-algebraischen Fall liegt das Nullideal vor und die Aussage ist trivialerweise richtig). Das Minimalpolynom P gehört zu $\mathfrak{a}$. Andererseits ist der Grad von F größer oder gleich dem Grad von P, da ja dessen Grad minimal gewählt ist. Daher muss der Grad gleich sein und somit ist $P = F$, da beide normiert sind. □

Definition 6.13. Eine Körpererweiterung $K \subseteq L$ heißt *algebraisch*, wenn jedes Element $f \in L$ algebraisch über K ist.

6.7. **Erzeugendensysteme.**

Definition 6.14. Sei A eine R-Algebra und sei $f_i \in A$, $i \in I$, eine Familie von Elementen aus A. Dann heißt die kleinste R-Unteralgebra von A, die alle f_i enthält, die von diesen Elementen *erzeugte R-Algebra*. Sie wird mit $R[f_i,\ i \in I]$ bezeichnet.

Man kann diese R-Algebra auch als den kleinsten Unterring von A charakterisieren, der sowohl R als auch die f_i enthält. Wir werden hauptsächlich von erzeugten K-Algebren in einer Körpererweiterung $K \subseteq L$ sprechen, wobei nur ein einziger Erzeuger vorgegeben ist. Man schreibt dafür dann einfach

$K[f]$, und diese K-Algebra besteht aus allen K-Linearkombinationen von Potenzen von f. Dies ist das Bild unter dem durch $X \mapsto f$ gegebenen Einsetzungshomomorphismus.

Gelegentlich werden wir auch den kleinsten Unterkörper von L betrachten, der sowohl K als auch eine Elementfamilie f_i, $i \in I$, enthält. Dieser wird mit $K(f_i, i \in I)$ bezeichnet, und man sagt, dass die f_i ein *Körper-Erzeugendensystem* von diesem Körper bilden. Es ist $K[f_i, i \in I] \subseteq K(f_i, i \in I)$ und insbesondere $K[f] \subseteq K(f)$.

Definition 6.15. Es sei K ein Körper. Der *Primkörper* von K ist der kleinste Unterkörper von K.

Definition 6.16. Eine Körpererweiterung $K \subseteq L$ heißt *einfach*, wenn es ein Element $x \in L$ gibt mit

$$L = K(x)\,.$$

Definition 6.17. Eine Körpererweiterung $K \subseteq L$ heißt eine *einfache Radikalerweiterung*, wenn es ein $b \in L$ gibt mit $L = K(b)$ und ein $n \in \mathbb{N}$ mit $b^n \in K$.

Definition 6.18. Eine Körpererweiterung $K \subseteq L$ heißt eine *Radikalerweiterung*, wenn es Zwischenkörper

$$K \subseteq L_1 \subseteq \ldots \subseteq L_{n-1} \subseteq L_n = L$$

gibt derart, dass $L_i \subseteq L_{i+1}$ für jedes i eine einfache Radikalerweiterung ist.

7. Vorlesung

7.1. **Restklassenringe.**

Nach Satz 6.7 ist der Kern eines Ringhomomorphismus ein Ideal. Man kann umgekehrt zu jedem Ideal $I \subseteq R$ in einem (kommutativen) Ring einen Ring R/I konstruieren, und zwar zusammen mit einem surjektiven Ringhomomorphismus

$$R \longrightarrow R/I,$$

dessen Kern gerade das vorgegebene Ideal I ist. Ideale und Kerne von Ringhomomorphismen sind also im Wesentlichen äquivalente Objekte, so wie das bei Gruppen für Kerne von Gruppenhomomorphismen und Normalteilern gilt. In der Tat gelten die entsprechenden Homomorphiesätze hier wieder, und können weitgehend auf die Gruppensituation zurückgeführt werden. Wir werden uns bei den Beweisen also kurz fassen können.

Definition 7.1. Es sei R ein kommutativer Ring und $I \subseteq R$ ein Ideal in R. Zu $a \in R$ heißt die Teilmenge

$$a + I = \{a + f |\, f \in I\}$$

die *Nebenklasse von* a zum Ideal I. Jede Teilmenge von dieser Form heißt *Nebenklasse* zu I.

Diese Nebenklassen sind gerade die Nebenklassen zur Untergruppe $I \subseteq R$, die wegen der Kommutativität ein Normalteiler ist. Zwei Elemente $a, b \in R$ definieren genau dann die gleiche Nebenklasse, also $a + I = b + I$, wenn ihre Differenz $a - b$ zum Ideal gehört. Man sagt dann auch, dass a und b dieselbe Nebenklasse *repräsentieren*.

Definition 7.2. Es sei R ein kommutativer Ring und $I \subseteq R$ ein Ideal in R. Dann ist der *Restklassenring* R/I (sprich „R modulo I“) ein kommutativer Ring, der durch folgende Daten festgelegt ist.

(1) Als Menge ist R/I die Menge der Nebenklassen zu I.
(2) Durch
$$(a + I) + (b + I) := (a + b + I)$$
wird eine Addition von Nebenklassen definiert.
(3) Durch
$$(a + I) \cdot (b + I) := (a \cdot b + I)$$
wird eine Multiplikation von Nebenklassen definiert.
(4) $\bar{0} = 0 + I = I$ definiert das neutrale Element für die Addition (die Nullklasse).
(5) $\bar{1} = 1 + I$ definiert das neutrale Element für die Multiplikation (die Einsklasse).

Man muss dabei zeigen, dass diese Abbildungen (also Addition und Multiplikation) wohldefiniert sind, d.h. unabhängig vom Repräsentanten, und dass die Ringaxiome erfüllt sind. Da I insbesondere eine Untergruppe der kommutativen Gruppe $(R, +, 0)$ ist, liegt ein Normalteiler vor, so dass R/I eine Gruppe ist und die Restklassenabbildung

$$R \longrightarrow R/I,\ a \longmapsto a + I =: \bar{a},$$

ein Gruppenhomomorphismus ist. Das einzig Neue gegenüber der Gruppensituation ist also die Anwesenheit einer Multiplikation. Die Wohldefiniertheit der Multiplikation ergibt sich so: Seien zwei Restklassen gegeben mit unterschiedlichen Repräsentanten, also $\overline{a} = \overline{a'}$ und $\overline{b} = \overline{b'}$. Dann ist $a - a' \in I$ und $b - b' \in I$ bzw. $a' = a + x$ und $b' = b + y$ mit $x, y \in I$. Daraus ergibt sich

$$a'b' = (a + x)(b + y) = ab + ay + xb + xy.$$

Die drei hinteren Summanden gehören zum Ideal, so dass die Differenz $a'b' - ab \in I$ ist.

Aus der Wohldefiniertheit folgen die anderen Eigenschaften und insbesondere, dass ein Ringhomomorphismus in den Restklassenring vorliegt. Diesen nennt man wieder die *Restklassenabbildung* oder den *Restklassenhomomorphismus*. Das Bild von $a \in R$ in R/I wird häufig mit $[a]$, $\bar{a}$ oder einfach mit a selbst bezeichnet und heißt die *Restklasse* von a. Bei dieser Abbildung gehen genau die Elemente aus dem Ideal auf null, d.h. der Kern dieser Restklassenabbildung ist das vorgegebene Ideal.

Das einfachste Beispiel für diesen Prozess ist die Abbildung, die einer ganzen Zahl a den Rest bei Division durch eine fixierte Zahl n zuordnet. Jeder Rest wird dann repräsentiert durch eine der Zahlen $0, 1, 2, \ldots, n-1$. Im Allgemeinen gibt es nicht immer ein solch übersichtliches Repräsentantensystem.

7.2. **Die Homomorphiesätze für Ringe.**

Für Ringe, ihre Ideale und Ringhomomorphismen gelten die analogen Homomorphiesätze wie für Gruppen, ihre Normalteiler und Gruppenhomomorphismen, siehe die fünfte Vorlesung. Wir beschränken uns auf kommutative Ringe.

Satz 7.3. *Seien R, S und T kommutative Ringe, es sei $\varphi : R \to S$ ein Ringhomomorphismus und $\psi : R \to T$ ein surjektiver Ringhomomorphismus. Es sei vorausgesetzt, dass*

$$\operatorname{kern} \psi \subseteq \operatorname{kern} \varphi$$

ist. Dann gibt es einen eindeutig bestimmten Ringhomomorphismus

$$\tilde{\varphi} : T \longrightarrow S$$

derart, dass $\varphi = \tilde{\varphi} \circ \psi$ ist. Mit anderen Worten: das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} R & \longrightarrow & T \\ & \searrow & \downarrow \\ & & S \end{array}$$

ist kommutativ.

Beweis. Aufgrund von Satz 5.10 gibt es einen eindeutig bestimmten Gruppenhomomorphismus

$$\tilde{\varphi} : T \longrightarrow S,$$

der die Eigenschaften erfüllt. Es ist also lediglich noch zu zeigen, dass $\tilde{\varphi}$ auch die Multiplikation respektiert. Seien dazu $t, t' \in T$, und diese seien repräsentiert durch r bzw. r' aus R. Dann wird tt' durch rr' repräsentiert und daher ist

$$\tilde{\varphi}(tt') = \psi(rr') = \psi(r)\psi(r') = \tilde{\varphi}(t)\tilde{\varphi}(t').$$

□

Die im vorstehenden Satz konstruierte Abbildung heißt wieder *induzierte Abbildung* oder *induzierter Homomorphismus* und entsprechend heißt der Satz auch *Satz vom induzierten Homomorphismus.*

Korollar 7.4. *Es seien R und S kommutative Ring und es sei*

$$\varphi : R \longrightarrow S$$

ein surjektiver Ringhomomorphismus. Dann gibt es eine kanonische Isomorphie von Ringen

$$\tilde{\varphi} : R/\operatorname{kern} \varphi \longrightarrow S.$$

Beweis. Aufgrund von Korollar 5.10 liegt ein natürlicher Gruppenisomorphismus vor, der wegen Satz 7.3 auch die Multiplikation respektiert, also ein Ringhomomorphismus ist. □

Satz 7.5. *Es seien R und S kommutative Ring und es sei*

$$\varphi : R \longrightarrow S$$

ein Ringhomomorphismus. Dann gibt es eine kanonische Faktorisierung

$$R \xrightarrow{q} R/\operatorname{kern}\varphi \xrightarrow{\theta} \operatorname{bild}\varphi \xhookrightarrow{\iota} S\,,$$

wobei q die kanonische Projektion, θ ein Ringisomorphismus und ι die kanonische Inklusion des Bildes ist.

Beweis. Dies beruht auf Satz 5.12 und Satz 7.3. □

Es gilt also wieder:

Bild = Urbild modulo Kern.

7.3. **Restklassenringe von Hauptidealbereichen.**

Da wir nun die Restklassenbildung für kommutative Ringe zur Verfügung haben, kehren wir zu Hauptidealbereichen, insbesondere zu Polynomringen über einem Körper zurück.

Satz 7.6. *Sei R ein Hauptidealbereich und $p \neq 0$ ein Element. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent.*

(1) *p ist ein Primelement.*
(2) *$R/(p)$ ist ein Integritätsbereich.*
(3) *$R/(p)$ ist ein Körper.*

Beweis. Die Äquivalenz (1) $\Leftrightarrow$ (2) gilt in jedem kommutativen Ring (auch für $p = 0$), und (3) impliziert natürlich (2). Sei also (1) erfüllt und sei $a \in R/(p)$ von null verschieden. Wir bezeichnen einen Repräsentanten davon in R ebenfalls mit a. Es ist dann $a \notin (p)$ und es ergibt sich eine echte Idealinklusion $(p) \subset (a, p)$. Ferner können wir $(a, p) = (b)$ schreiben , da wir in einem Hauptidealring sind. Es folgt $p = cb$. Da c keine Einheit ist und p prim (also irreduzibel) ist, muss b eine Einheit sein. Es ist also $(a, p) = (1)$, und das bedeutet modulo p, also in $R/(p)$, dass a eine Einheit ist. Also ist $R/(p)$ ein Körper. □

Korollar 7.7. *Es sei K ein Körper und $P \in K[X]$, $P \neq 0$, ein Polynom. Dann ist P genau dann irreduzibel, wenn der Restklassenring $K[X]/(P)$ ein Körper ist.*

Beweis. Dies folgt direkt aus Satz 3.15 und Satz 7.6. □

Jedes irreduzible Polynom $F \in K[X]$ definiert also eine (endliche) Körpererweiterung $K \subseteq K[X]/(F)$, und dies wird unsere Hauptkonstruktionsweise für endliche Körpererweiterungen sein.

Für die ganzen Zahlen hat man das entsprechende Resultat.

Korollar 7.8. *Es sei $n \geq 1$ eine natürliche Zahl und $\mathbb{Z}/(n)$ der zugehörige Restklassenring. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

(1) *$\mathbb{Z}/(n)$ ist ein Körper.*
(2) *$\mathbb{Z}/(n)$ ist ein Integritätsbereich.*
(3) *n ist eine Primzahl.*

Beweis. Dies folgt direkt aus Satz 7.6. □

7.4. **Rechnen in $K[X]/(P)$.**

Körper werden häufig ausgehend von einem schon bekannten Körper als Restklassenkörper des Polynomrings konstruiert. Die Arithmetik in einem solchen Erweiterungskörper wird in der folgenden Aussage beschrieben.

Proposition 7.9. *Sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K. Es sei $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in K[X]$ ein Polynom vom Grad n und $R = K[X]/(P)$ der zugehörige Restklassenring. Dann gelten folgende Rechenregeln (wir bezeichnen die Restklasse von X in R mit x).*

(1) *Man kann stets P als normiert annehmen (also $a_n = 1$; das werden wir im Folgenden tun).*
(2) *In R ist*
$$x^n = -\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i \, .$$
(3) *Höhere Potenzen x^k, $k \geq n$, kann man mit den Potenzen x^i, $i \leq n-1$, ausdrücken, indem man mittels Vielfachen von (2) sukzessive den Grad um eins reduziert.*
(4) *Die Potenzen $x^0 = 1$, x^1, $, \ldots, x^{n-1}$ bilden eine K-Basis von R.*
(5) *R ist ein K-Vektorraum der Dimension n.*
(6) *In R werden zwei Elemente $P = \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i$ und $Q = \sum_{i=0}^{n-1} c_i x^i$ komponentenweise addiert, und multipliziert, indem sie als Polynome multipliziert werden und dann die Restklasse berechnet wird.*

Beweis.
(1) Es ist $(P) = (\frac{P}{a_n})$, da es bei einem Hauptideal nicht auf eine Einheit ankommt.
(2) Dies folgt direkt durch Umstellung der definierenden Gleichung.
(3) Dies folgt durch Multiplikation der Gleichung in (2) mit Potenzen von x.

(4) Dass die Potenzen x^i, $i = 0, \ldots, n-1$, ein Erzeugendensystem bildet, folgt aus Teil (2) und (3). Zum Beweis der linearen Unabhängigkeit sei angenommen, es gebe eine lineare Abhängigkeit, sagen wir $\sum_{i=0}^{n-1} c_i x^i = 0$. D.h., dass das Polynom $Q = \sum_{i=0}^{n-1} c_i X^i$ unter der Restklassenabbildung auf null geht, also zum Kern gehört. Dann muss es aber ein Vielfaches von P sein, was aber aus Gradgründen erzwingt, dass Q das Nullpolynom sein muss. Also sind alle $c_i = 0$.
(5) Dies folgt direkt aus (4).
(6) Dies ist klar.

□

Beispiel 7.10. Wir betrachten den Restklassenring

$$L = \mathbb{Q}[X]/(X^3 + 2X^2 - 5)$$

und bezeichnen die Restklasse von X mit x. Aufgrund von Proposition 7.9 besitzt jedes Element f aus L eine eindeutige Darstellung $f = ax^2 + bx + c$ mit $a, b, c \in \mathbb{Q}$, so dass also ein dreidimensionaler $\mathbb{Q}$-Vektorraum vorliegt. Da $X^3 + 2X^2 - 5$ in L zu null gemacht wird, gilt

$$x^3 = -2x^2 + 5\,.$$

Daraus ergeben sich die Gleichungen

$$x^4 \;=\; -2x^3 + 5x \;=\; -2(-2x^2 + 5) + 5x \;=\; 4x^2 + 5x - 10,$$

$$x^5 \;=\; -2x^4 + 5x^2 \;=\; -2(4x^2 + 5x - 10) + 5x^2 \;=\; -3x^2 - 10x + 20,$$

etc. Man kann hierbei auf verschiedene Arten zu dem eindeutig bestimmten kanonischen Repräsentanten reduzieren.

Berechen wir nun das Produkt

$$(3x^2 - 2x + 4)(2x^2 + x - 1)\,.$$

Dabei wird distributiv ausmultipliziert und anschließend werden die Potenzen reduziert. Es ist

$$\begin{aligned}(3x^2 - 2x + 4)(2x^2 + x - 1) &= 6x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 4x^3 - 2x^2 + 2x + 8x^2 + 4x - 4\\ &= 6x^4 - x^3 + 3x^2 + 6x - 4\\ &= 6(4x^2 + 5x - 10) + 2x^2 - 5 + 3x^2 + 6x - 4\\ &= 29x^2 + 36x - 69.\end{aligned}$$

7.5. **Restklassendarstellung von Unteralgebren.**

Satz 7.11. *Sei $K \subseteq L$ eine Körpererweiterung und sei $f \in L$ ein algebraisches Element. Es sei P das Minimalpolynom von f. Dann gibt es eine kanonische K-Algebra-Isomorphie*

$$K[X]/(P) \longrightarrow K[f],\, X \longmapsto f.$$

Beweis. Die Einsetzung $X \mapsto f$ ergibt nach Satz 6.4 den kanonischen K-Algebra-Homomorphismus

$$K[X] \longrightarrow L,\, X \longmapsto f.$$

Das Bild davon ist genau $K[f]$, so dass ein surjektiver K-Algebra-Homomorphismus

$$K[X] \longrightarrow K[f]$$

vorliegt. Daher gibt es nach Korollar 7.4 eine Isomorphie zwischen $K[f]$ und dem Restklassenring von $K[X]$ modulo dem Kern der Abbildung. Der Kern ist aber nach Lemma 6.12 das vom Minimalpolynom erzeugte Hauptideal. □

Lemma 7.12. *Sei $K \subseteq L$ eine Körpererweiterung und sei $f \in L$ ein algebraisches Element. Dann gelten folgende Aussagen.*

(1) *Das Minimalpolynom P von f über K ist irreduzibel.*
(2) *Wenn $Q \in K[X]$ ein normiertes, irreduzibles Polynom mit $Q(f) = 0$ ist, so handelt es sich um das Minimalpolynom.*

Beweis. (1) Es sei $P = P_1P_2$ eine Faktorzerlegung des Minimalpolynoms. Dann gilt in L die Beziehung

$$0 = P(f) = P_1(f)P_2(f).$$

Da L ein Körper ist, muss ein Faktor null sein, sagen wir $P_1(f) = 0$. Da aber P unter allen Polynomen $\neq 0$, die f annullieren, den minimalen Grad besitzt, müssen P und P_1 den gleichen Grad besitzen und folglich muss P_2 konstant ($\neq 0$), also eine Einheit sein.

(2) Wegen $Q(f) = 0$ ist Q aufgrund von Lemma 6.12 ein Vielfaches des Minimalpolynoms P, sagen wir $Q = GP$. Da Q nach Voraussetzung irreduzibel ist, und da P zumindest den Grad eins besitzt, muss G konstant sein. Da schließlich sowohl P als auch Q normiert sind, ist $P = Q$.

□

8. Vorlesung

8.1. **Erzeugte Algebra und erzeugter Körper.**

Satz 8.1. *Sei $K \subseteq L$ eine Körpererweiterung und sei $f \in L$ ein algebraisches Element. Dann ist die von f erzeugte K-Algebra $K[f] \subseteq L$ ein Körper.*

Beweis. Nach Satz 7.11 liegt eine K-Algebra-Isomorphie $K[X]/(P) \cong K[f]$ vor, wobei P das Minimalpolynom zu f ist. Nach Lemma 7.12 ist P irreduzibel, so dass wegen Korollar 7.7 der Restklassenring $K[f]$ ein Körper ist. □

Korollar 8.2. *Sei $K \subseteq L$ eine Körpererweiterung und sei $f \in L$ ein algebraisches Element. Dann stimmen die von f über K erzeugte Unteralgebra und der von f über K erzeugte Unterkörper überein. Es gilt also $K[f] = K(f)$.*

Beweis. Die Inklusion $K[f] \subseteq K(f)$ gilt immer, und nach Vorraussetzung ist aufgrund von Satz 8.1 der Unterring $K[f]$ schon ein Körper. □

Bemerkung 8.3. Sei K ein Körper, $P \in K[X]$ ein irreduzibles Polynom und $K \subseteq L = K[X]/(P)$ die zugehörige Körpererweiterung. Dann kann man zu $z = F(x)$, $z \neq 0$, (mit $F \in K[X]$, $x = \overline{X}$) auf folgende Art das Inverse z^{-1} bestimmen. Es sind P und F teilerfremde Polynome in $K[X]$ und daher gibt es nach Satz 3.15 und Lemma 3.16 eine Darstellung der 1, die man mit Hilfe des euklidischen Algorithmus finden kann. Wenn $RF + SP = 1$ ist, so ist die Restklasse von R, also $\overline{R} = R(x)$, das Inverse zu $\overline{F} = z$.

8.2. **Charakterisierung von algebraischen Elementen.**

Satz 8.4. *Sei $K \subseteq L$ eine Körpererweiterung und sei $f \in L$ ein Element. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

(1) *f ist algebraisch über K.*
(2) *Es gibt ein normiertes Polynom $P \in K[X]$ mit $P(f) = 0$.*
(3) *Es besteht eine lineare Abhängigkeit zwischen den Potenzen*
$$f^0 = 1, f^1 = f, f^2, f^3, \dots .$$
(4) *Die von f über K erzeugte K-Algebra $K[f]$ hat endliche K-Dimension.*
(5) *f liegt in einer endlich-dimensionalen K-Algebra $M \subseteq L$.*

Beweis. (1) ⇒ (2). Das ist trivial, da man ein von null verschiedenes Polynom stets normieren kann, indem man durch den Leitkoeffizienten durchdividiert. (2) ⇒ (3). Nach (2) gibt es ein Polynom $P \in K[X]$, $P \neq 0$, mit $P(f) = 0$. Sei
$$P = \sum_{i=0}^{n} c_i X^i .$$
Dann ist
$$P(f) = \sum_{i=0}^{n} c_i f^i = 0$$
eine lineare Abhängigkeit zwischen den Potenzen. (3) ⇒ (1). Umgekehrt bedeutet die lineare Abhängigkeit, dass es Elemente c_i gibt, die nicht alle null sind mit $\sum_{i=0}^{n} c_i f^i = 0$. Dies ist aber die Einsetzung $P(f)$ für das Polynom $P = \sum_{i=0}^{n} c_i X^i$, und dieses ist nicht das Nullpolynom. (2) ⇒ (4). Sei $P = \sum_{i=0}^{n} c_i X^i$ ein normiertes Polynom mit $P(f) = 0$, also mit $c_n = 1$. Dann kann man umstellen
$$f^n = -\sum_{i=0}^{n-1} c_i f^i .$$

D.h. f^n kann man durch kleinere Potenzen ausdrücken. Durch Multiplikation dieser Gleichung mit weiteren Potenzen von f ergibt sich, dass man auch die höheren Potenzen durch die Potenzen f^i, $i \leq n-1$, ausdrücken kann. (4) $\Rightarrow$ (5). Das ist trivial. (5) $\Rightarrow$ (3). Wenn f in einer endlich-dimensionalen Algebra $M \subseteq L$ liegt, so liegen darin auch alle Potenzen von f. Da es in einem endlich-dimensionalen Vektorraum keine unendliche Folge von linear unabhängigen Elementen geben kann, müssen diese Potenzen linear abhängig sein. □

Mit dieser Charakterisierung können wir noch einen zweiten Beweis von Satz 8.1 geben, der unabhängig von der Restklassenbildung ist und der zugleich zeigt, wie man aus dem Minimalpolynom eines algebraischen Elementes das inverse Element beschreiben kann.

Nach Satz 8.4 ist $M = K[f]$ eine endlich-dimensionale K-Algebra. Wir müssen zeigen, dass M ein Körper ist. Sei dazu $g \in M$ ein von null verschiedenes Element. Damit ist auch $K[g] \subseteq M = K[f]$, so dass $K[g]$ wieder eine endlich-dimensionale Algebra ist. Daher ist, wiederum nach Satz 8.4, das Element g algebraisch über K und es gibt ein Polynom $P \in K[X]$, $P \neq 0$, mit $P(g) = 0$. Wir ziehen aus diesem Polynom die höchste Potenz von X heraus und schreiben

$$P = QX^k\,,$$

wobei der konstante Term von Q von null verschieden sei. Die Ersetzung von X durch g ergibt

$$0 = P(g) = Q(g)g^k.$$

Da $g \neq 0$ ist und sich alles im Körper L abspielt, folgt $Q(g) = 0$. Wir können durch den konstanten Term von Q dividieren und erhalten die Gleichung

$$1 + c_1 g + \ldots + c_d g^d = 0\,.$$

Umstellen ergibt

$$g(-c_1 g^0 - \ldots - c_d g^{d-1}) = 1\,.$$

Das heißt, dass das Inverse zu g sich als Polynom in g schreiben lässt und daher zu $K[g]$ und erst recht zu $K[f]$ gehört.

8.3. **Algebraischer Abschluss.**

Definition 8.5. Sei $K \subseteq L$ eine Körpererweiterung. Dann nennt man die Menge

$$M = \{x \in L |\, x \text{ ist algebraisch über } K\}$$

den *algebraischen Abschluss* von K in L.

Satz 8.6. *Sei $K \subseteq L$ eine Körpererweiterung und sei M der algebraische Abschluss von K in L. Dann ist M ein Unterkörper von L.*

Beweis. Wir müssen zeigen, dass M bzgl. der Addition, der Multiplikation, des Negativen und des Inversen abgeschlossen ist. Seien $x, y \in M$. Wir betrachten die von x und y erzeugte K-Unteralgebra $U = K[x, y]$, die aus allen K-Linearkombinationen der $x^i y^j$, $i, j \in \mathbb{N}$, besteht. Da sowohl x als auch y algebraisch sind, kann man gewisse Potenzen x^n und y^m durch kleinere Potenzen ersetzen. Daher kann man alle Linearkombinationen mit den Monomen $x^i y^j$, $i < n$, $j < m$, ausdrücken. D.h. alle Operationen spielen sich in dieser endlich-dimensionalen Unteralgebra ab. Daher sind Summe, Produkt und das Negative nach Satz 8.4 wieder algebraisch. Für das Inverse sei $z \neq 0$ algebraisch. Dann ist $K[z]$ nach Satz 8.1 ein Körper von endlicher Dimension. Daher ist $z^{-1} \in K[z]$ selbst algebraisch. □

8.4. **Algebraische Zahlen.**

Die über den rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ algebraischen komplexen Zahlen erhalten einen speziellen Namen.

Definition 8.7. Eine komplexe Zahl z heißt *algebraisch* oder *algebraische Zahl*, wenn sie algebraisch über den rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ ist. Andernfalls heißt sie *transzendent*.

Die Menge der algebraischen Zahlen wird mit $\mathbb{A}$ bezeichnet.

Ferdinand von Lindemann (1852-1939)

Bemerkung 8.8. Eine komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ ist genau dann algebraisch, wenn es ein von null verschiedenes Polynom P mit rationalen Koeffizienten gibt mit $P(z) = 0$. Durch Multiplikation mit einem Hauptnenner kann man für eine algebraische Zahl auch ein annullierendes Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten finden (das allerdings nicht mehr normiert ist). Eine rationale Zahl q ist trivialerweise algebraisch, da sie Nullstelle des linearen rationalen Polynoms $X - q$ ist. Weiterhin sind die reellen Zahlen $\sqrt{q}$ und $q^{1/n}$ für $q \in \mathbb{Q}$ algebraisch. Dagegen sind die Zahlen e und π nicht algebraisch. Diese Aussagen sind keineswegs selbstverständlich, die Transzendenz von π wurde beispielsweise von Lindemann 1882 gezeigt.

8.5. **Algebra-Automorphismen.**

Die folgenden Definitionen werden wir vor allem für eine Körpererweiterung $K \subseteq L$ anwenden.

Definition 8.9. Es sei K ein kommutativer Ring und A eine kommutative K-Algebra. Ein bijektiver K-Algebra-Homomorphismus

$$\varphi : A \longrightarrow A$$

heißt *K-Algebra-Automorphismus*.

Lemma 8.10. *Es sei K ein kommutativer Ring und A eine kommutative K-Algebra. Dann gelten folgende Aussagen.*

(1) *Die Identität ist ein K-Algebra-Automorphismus.*
(2) *Die Verknüpfung $\varphi \circ \psi$ von zwei K-Algebra-Automorphismen φ und ψ ist wieder ein Automorphismus.*
(3) *Die Umkehrabbildung φ^{-1} zu einem K-Algebra-Automorphismus φ ist wieder ein Automorphismus.*
(4) *Die Menge der K-Algebra-Automorphismen bilden mit der Hintereinanderschaltung als Verknüpfung eine Gruppe.*

Beweis. Siehe Aufgabe 8.5. □

Definition 8.11. Es sei K ein kommutativer Ring und A eine kommutative K-Algebra. Die Menge der K-Algebra-Automorphismen

$$\varphi : A \longrightarrow A$$

mit der Hintereinanderschaltung als Verknüpfung heißt *Automorphismengruppe* der Algebra. Sie wird mit $\mathrm{Aut}_K(A)$ bezeichnet.

Beispiel 8.12. Es sei K ein Körper und $K[X_1, \ldots, X_n]$ der Polynomring über K in n Variablen. Es sei

$$\alpha : K^n \longrightarrow K^n$$

ein linearer Automorphismus, der durch eine invertierbare Matrix

$$\alpha = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$$

gegeben ist. Wir definieren dazu direkt einen K-Algebra-Automorphismus, nämlich den durch

$$X_i \longmapsto a_{i1}X_1 + \ldots + a_{in}X_n$$

definierten Einsetzungshomomorphismus (in mehreren Variablen), den wir mit φ_α bezeichnen. Dabei handelt es sich in der Tat um einen Algebra-Automorphismus: Der inverse lineare Automorphismus α^{-1} definiert in der gleichen Weise einen Algebra-Homomorphismus $\varphi_{\alpha^{-1}}$, und es gilt $\varphi_{\alpha^{-1}} \circ \varphi_\alpha = \mathrm{id}$, da diese Hintereinanderschaltung jede Variable auf sich selbst abbildet.

Bei einem Polynomring in einer Variablen über einem Körper K ist jeder K-Automorphismus ein linearer Automorphismus, also durch die Zuordnung $X \mapsto aX + b$ mit $a \neq 0$ gegeben. Dies ist in mehreren Variablen nicht der Fall, in der Tat ist schon die Automorphismengruppe von $K[X, Y]$ nicht vollständig verstanden. Ein wichtiges offenes Problem ist hierbei das Jacobiproblem.

8.6. **Die Galoisgruppe einer Körpererweiterung.**

Definition 8.13. Sei $K \subseteq L$ eine Körpererweiterung. Dann nennt man die Automorphismengruppe

$$\mathrm{Gal}\,(L|K) = \mathrm{Aut}_K\,(L)$$

die *Galoisgruppe* der Körpererweiterung.

Lemma 8.14. *Sei $K \subseteq L$ eine Körpererweiterung und es sei $x_i \in L$, $i \in I$, ein Erzeugendensystem (als Körper) von L über K. Es sei $\varphi \in \mathrm{Gal}\,(L|K)$ mit $\varphi(x_i) = x_i$ für alle $i \in I$. Dann ist $\varphi = \mathrm{id}$.*

Beweis. Wir zeigen, dass die Teilmenge

$$M = \{x \in L |\, \varphi(x) = x\}$$

gleich L ist. Sei $E = \{x_i |\, i \in I\}$ das Erzeugendensystem und sei $P(x_1, \ldots, x_n)$ ein K-Polynom in einer endlichen Teilmenge $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq E$. Dann ist

$$\varphi(P(x_1, \ldots, x_n)) \;=\; P(\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_n)) \;=\; P(x_1, \ldots, x_n),$$

da ja φ ein K-Algebra-Automorphismus ist, und somit gehört $P \in M$. Das bedeutet, dass die von E über K erzeugte Algebra zu M gehört. Da L der von E erzeugte Körper ist, gibt es für $x \in L$, $x \neq 0$, eine Darstellung $x = y/z$ mit $y, z \in M$. Daher ist auch $x \in M$. □

Es ist eine grundlegende Frage, welche Eigenschaften eines Elementes $x \in L$ unter einem K-Algebra-Automorphismus erhalten bleiben und welche nicht.

Lemma 8.15. *Sei $K \subseteq L$ eine Körpererweiterung, $x \in L$, $F \in K[X]$ ein Polynom mit $F(x) = 0$ und sei $\varphi \in \mathrm{Gal}\,(L|K)$. Dann ist auch $F(\varphi(x)) = 0$.*

Beweis. Sei $F = a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n$ mit $a_i \in K$. Dann ist

$$F(\varphi(x)) \;=\; a_0 + a_1\varphi(x) + \ldots + a_n(\varphi(x))^n \;=\; \varphi(F(x)) \;=\; \varphi(0) \;=\; 0.$$

□

Satz 8.16. *Sei $K \subseteq L$ eine endliche Körpererweiterung. Dann ist die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}\,(L|K)$ endlich.*

Beweis. Die Körpererweiterung besitzt ein endliches K-Algebra-Erzeugendensystem, also $L = K[x_1, \ldots, x_n]$. Nach Lemma 8.14 ist ein K-Algebra-Automorphismus

$$\varphi : L \longrightarrow L$$

durch $\varphi(x_i)$, $i = 1, \ldots, n$, eindeutig festgelegt. Da jedes x_i nach Satz 8.4 algebraisch ist, gibt es Polynome $F_i \neq 0$ mit $F_i(x_i) = 0$. Nach Lemma 8.15 ist auch $F_i(\varphi(x_i)) = 0$. Die Polynome F_i besitzen aber nach Korollar Anhang 1.5 jeweils nur endlich viele Nullstellen, so dass nur endlich viele Werte für $\varphi(x_i)$ in Frage kommen. □

9. Vorlesung

9.1. **Graduierte Körpererweiterungen.**

Definition 9.1. Es sei K ein Körper und D eine kommutative Gruppe.[6] Eine K-Algebra A heißt *D-graduiert*, wenn es eine direkte Summenzerlegung

$$A = \bigoplus_{d \in D} A_d$$

mit K-Untervektorräumen A_d gibt derart, dass $K \subseteq A_0$ ist und für die Multiplikation auf A die Beziehung

$$A_d \cdot A_e \subseteq A_{d+e}$$

gilt.

Bemerkung 9.2. In einer D-graduierten K-Algebra besitzt jedes Element $a \in A$ eine eindeutige Darstellung

$$a = \sum_{d \in D} a_d \text{ mit } a_d \in A_d \,,$$

wobei nur endlich viele der a_d ungleich 0 sein können. Die a_d heißen dabei die *homogenen Komponenten* von a, die A_d heißen ebenfalls die *homogenen Komponenten* von A (oder d-te Stufe) und Elemente $a \in A_d$ heißen *homogen* vom *Grad* d. Die Gruppe D heißt die *graduierende Gruppe*. Der Fall $A_d = 0$ ist erlaubt.

Durch eine Graduierung wird die Multiplikation auf einer Algebra A übersichtlicher strukturiert. Man muss lediglich für homogene Elemente $a \in A_d$ und $b \in A_e$ die Produkte $ab \in A_{d+e}$ kennen, dadurch ist schon die gesamte Multiplikation distributiv festgelegt.

Beispiel 9.3. Die Körpererweiterung $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ ist graduiert durch die Gruppe $D = \mathbb{Z}/(2)$. Die 0-te homogene Komponente ist $\mathbb{R}$ und die 1-te Komponente ist $\mathbb{R}i$ (das i gehört da dazu, während man unter dem Imaginärteil einer komplexen Zahl die reelle Zahl vor dem i versteht). Die übliche Schreibweise $z = a + bi$ ist also die Zerlegung in die homogenen Komponenten.

[6] Diese Gruppe wird fast immer additiv geschrieben.

Beispiel 9.4. Es sei K ein Körper und $K[X_1, \ldots, X_n]$ der Polynomring in n Variablen über K. Dieser ist in naheliegender Weise $\mathbb{Z}$-graduiert. Man definiert für ein Monom $X_1^{k_1} X_2^{k_2} \cdots X_n^{k_n}$ den Grad durch $k_1 + k_2 + \ldots + k_n$ und setzt A_d als den Vektorraum aller Polynome an, die Linearkombinationen von Monomen von Grad d sind. Bei der Multiplikation von zwei Monomen verhält sich der Grad offensichtlich additiv, so dass dadurch eine graduierte K-Algebra entsteht. Es ist $A_0 = K$ und $A_n = 0$ für negativen Grad n. Diese Graduierung heißt auch die *Standardgraduierung* auf dem Polynomring.

Beispiel 9.5. Es sei K ein Körper, $a \in K$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann besitzt die Restklassenalgebra $A = K[X]/(X^n - a)$ eine Graduierung mit der graduierenden Gruppe $D = \mathbb{Z}/(n)$, und zwar setzt man (wobei x die Restklasse von X sei)

$$A_d = \{\lambda x^d | \, \lambda \in K\}.$$

Jedes Element $f \in A$ kann man durch ein Polynom repräsentieren, das maximal den Grad $n-1$ besitzt. Daher besitzt jedes f eine Summendarstellung in den A_d. Diese Summenzerlegung ist direkt, da man mit der einzigen gegebenen Gleichung $X^n = a$ nicht weiter reduzieren kann. Die Multiplikationseigenschaft folgt aus $\lambda x^d \cdot \mu x^e = \lambda\mu x^{d+e}$, und dies ist gleich $\lambda\mu a x^{d+e-n}$, falls $d + e \geq n$ ist, und andernfalls gleich $\lambda\mu x^{d+e}$. So oder so ist es ein Element aus A_{d+e}.

Im vorstehenden Beispiel ist es eine nicht-triviale Frage, unter welchen Bedingungen die Algebra A wieder ein Körper ist. Falls ja, so liegt eine graduierte Körpererweiterung im Sinne der folgenden Definition vor.

Definition 9.6. Es sei K ein Körper und D eine endliche kommutative Gruppe. Unter einer *D-graduierten Körpererweiterung* versteht man eine Körpererweiterung $K \subseteq L$, bei der auf L eine D-Graduierung $L = \bigoplus_{d \in D} L_d$ mit $L_0 = K$ und $L_d \neq 0$ für alle $d \in D$ gegeben ist.

Lemma 9.7. *Es sei K ein Körper, D eine endliche kommutative Gruppe und $K \subseteq L$ eine D-graduierte Körpererweiterung. Dann gelten folgende Eigenschaften*

(1) *Jede homogene Stufe L_d besitzt die K-Dimension* 1.
(2) *Es ist* $\operatorname{grad}_K L = \#(D)$.
(3) *Es sei $D = (d_1, \ldots, d_m)$ ein Erzeugendensystem von D und es sei $x_i \in L_{d_i}$, $x_i \neq 0$, fixiert. Dann ist $L = K[x_1, \ldots, x_m]$. Insbesondere wird L von homogenen Elementen erzeugt.*
(4) *Jedes homogene Element $x \in L_d$, $x \neq 0$ besitzt ein Minimalpolynom der Form $X^n - a$ mit $a \in K$.*
(5) *Die Körpererweiterung $K \subseteq L$ ist eine Radikalerweiterung.*

Beweis. (1). Nach Voraussetzung ist $L_d \neq 0$. Seien $a, b \in L_d$ von 0 verschieden und sei $c \in L_{-d}$ ebenfalls $\neq 0$. Dann sind ca und cb Elemente $\neq 0$ in $L_0 = K$ und daher besteht die Beziehung $ca = \lambda cb$ mit $\lambda \in K$, die sich durch

Multiplikation mit c^{-1} (dieses Element gibt es, da wir in einem Körper sind) zurückübersetzt zu $a = \lambda b$. (2) folgt direkt aus (1). (3) ist klar wegen (1). (4). Sei $n \in \mathbb{N}$ die Ordnung von $d \in D$. Für ein homogenes Element $x \in L_d$, $x \neq 0$, ist daher $a = x^n \in L_{nd} = L_0 = K$. Also ist $X^n - a \in K[X]$ ein annullierendes Polynom. Die Potenzen x^i, $0 \leq i \leq n-1$, liegen alle in verschiedenen homogenen Stufen. Daher sind sie linear unabhängig und es kann kein annullierendes Polynom von kleinerem Grad geben. (5) folgt aus (3) und (4). □

9.2. **Charaktergruppe und Automorphismengruppe bei einer graduierten Körpererweiterung.**

Wir wollen nun die Automorphismen auf einer graduierten Körpererweiterung kennenlernen. Die Graduierung erlaubt es, die Automorphismen übersichtlich zu beschreiben, was für eine beliebige Körpererweiterung keineswegs selbstverständlich ist. Die Automorphismen hängen eng mit den sogenannten Charakteren der graduierenden Gruppe zusammen, so dass wir zuerst über Charaktere sprechen.

Definition 9.8. Es sei G ein Monoid und K ein Körper. Dann heißt ein Monoidhomomorphismus

$$\chi : G \longrightarrow (K^\times, 1, \cdot)$$

ein *Charakter* von G in K.

Die Menge der Charaktere von G nach K bezeichen wir mit $\mathrm{Char}\,(G, K)$. Mit dem *trivialen Charakter* (also der konstanten Abbildung nach 1) und der Verknüpfung

$$(\chi_1 \cdot \chi_2)(g) := \chi_1(g) \cdot \chi_2(g)$$

ist $\mathrm{Char}\,(G, K)$ selbst ein Monoid, und zwar ein Untermonoid des Abbildungsmonoid von G nach $K^\times$. Da es zu jedem Charakter den inversen Charakter χ^{-1} gibt, der durch $\chi^{-1}(g) = (\chi(g))^{-1}$ definiert ist, bildet $\mathrm{Char}\,(G, K)$ sogar eine kommutative Gruppe (siehe unten).

Definition 9.9. Es sei G ein Gruppe und K ein Körper. Dann nennt man die Menge der Charaktere

$$G^\vee = \mathrm{Char}\,(G, K) = \{\chi : G \to K^\times \,|\, \chi \text{ Charakter}\}$$

die *Charaktergruppe* von G (in K).

Lemma 9.10. *Sei G eine Gruppe, K ein Körper und $G^\vee = \mathrm{Char}\,(G, K)$ die Charaktergruppe zu G. Dann gelten folgende Aussagen.*

(1) *$G^\vee$ ist eine kommutative Gruppe.*
(2) *Bei einer direkten Gruppenzerlegung $G = G_1 \times G_2$ ist $(G_1 \times G_2)^\vee = G_1^\vee \times G_2^\vee$.*

Beweis. Siehe Aufgabe 9.4. □

Lemma 9.11. *Es sei K ein Körper, D eine kommutative Gruppe und A eine D-graduierte kommutative K-Algebra. Dann gibt es einen Gruppenhomomorphismus*

$$D^\vee = \mathrm{Char}\,(D,K) \longrightarrow \mathrm{Aut}_K\,(A),\ \chi \longmapsto (a_d \mapsto \chi(d)a_d),$$

der Charaktergruppe von D in die K-Automorphismengruppe von A. Wenn alle $A_d \neq 0$ sind, so ist diese Zuordnung injektiv.

Beweis. Zu jedem Charakter

$$\chi : D \longrightarrow K^\times$$

ist die durch $\varphi_\chi(\sum_{d\in D} a_d) = \sum_{d\in D} \chi(d)\cdot a_d$ definierte Abbildung φ_χ mit der Addition verträglich. Die Verträglichkeit mit der Multiplikation folgt für homogene Elemente $a_d \in A_d$ und $a_e \in A_e$ aus

$$\varphi_\chi(a_d \cdot a_e) = \chi(d+e)a_d \cdot a_e = \chi(d)\cdot\chi(e)a_d\cdot a_e = \varphi_\chi(a_d)\cdot\varphi_\chi(a_e),$$

woraus sich aufgrund des Distributivgesetzes auch der allgemeine Fall ergibt. Für $a \in A_0 = K$ ist ferner $\varphi_\chi(a) = \chi(0)a = a$, so dass ein K-Algebra-Homomorphismus vorliegt. Der triviale (konstante) Charakter geht bei dieser Zuordnung auf die Identität. Es seien nun zwei Charaktere $\chi_1, \chi_2 \in \mathrm{Char}\,(D,K)$ gegeben. Für ein homogenes Element $a_d \in A_d$ ist

$$\begin{aligned}
\varphi_{\chi_1\cdot\chi_2}(a_d) &= (\chi_1\cdot\chi_2)(d)\cdot a_d \\
&= \chi_1(d)\cdot\chi_2(d)\cdot a_d \\
&= \chi_1(d)\cdot\varphi_{\chi_2}(a_d) \\
&= \varphi_{\chi_1}(\varphi_{\chi_2}(a_d)) \\
&= (\varphi_{\chi_1}\circ\varphi_{\chi_2})(a_d),
\end{aligned}$$

so dass die Gesamtzuordnung mit den Verknüpfungen verträglich ist. Daher gilt auch

$$\varphi_\chi \circ \varphi_{\chi^{-1}} = \varphi_{\chi\circ\chi^{-1}} = \varphi_1 = \mathrm{id}_A,$$

so dass jedes φ_χ ein K-Algebra-Automorphismus und die Gesamtzuordnung ein Gruppenhomomorphismus ist. Die Injektivität ergibt sich unter Verwendung von Lemma 4.9 folgendermaßen. Bei $\chi \neq 1$ gibt es ein $d \in D$ mit $\chi(d) \neq 1$. Nach Voraussetzung ist $A_d \neq 0$, sei also $a \in A_d$, $a \neq 0$. Damit ist $\varphi_\chi(a) = \chi(d)a \neq a$, da $\chi(d) - 1$ eine Einheit ist. Also ist $\varphi_\chi \neq \mathrm{id}_A$. □

Beispiel 9.12. Es sei K ein Körper, $a \in K$ und $n \in \mathbb{N}$ derart, dass $X^n - a$ irreduzibel ist. Dann ist $K \subseteq K[X]/(X^n - a)$ nach Korollar 7.7 und nach Beispiel 9.4 eine $\mathbb{Z}/(n)$-graduierte Körpererweiterung.

Eine notwendige Voraussetzung für die Irreduzibilität von $X^n - a$ ist, dass a in K keine n-te Wurzel besitzt, da sonst das Polynom sofort einen Linearfaktor besitzt. Bei $n = 2$ oder $n = 3$ ist diese Bedingung auch hinreichend. Bei $n = 2$ und wenn die Charakteristik von K nicht gleich 2 ist, so ist $1 \neq -1$ und der nichttriviale Charakter

$$\chi : D = \mathbb{Z}/(2) \longrightarrow K^\times$$

mit $\chi(0) = 1$ und $\chi(1) = -1$ definiert über Lemma 9.11 den nichttrivialen K-Körper-Automorphismus mit $x \mapsto -x$ (wobei x die Restklasse von X sei), also die Konjugation in der quadratischen Körpererweiterung $K \subseteq K[X]/(X^2 - a)$.

Beispiel 9.13. Die $\mathbb{Q}$-Algebra $\mathbb{Q}[X]/(X^4 + 4)$ ist eine $\mathbb{Z}/(4)$-graduierte $\mathbb{Q}$-Algebra. Das Polynom $X^4 + 4$ besitzt keine Nullstelle in $\mathbb{Q}$, es ist aber nicht irreduzibel, wie die Zerlegung

$$X^4 + 4 = (X^2 - 2X + 2)(X^2 + 2X + 2)$$

zeigt.

Beispiel 9.14. Wir betrachten den von $\sqrt{2}$ und $\sqrt{3}$ erzeugten Unterkörper $L = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$ von $\mathbb{C}$ (oder von $\mathbb{R}$). Die Elemente $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}$ bilden dabei unmittelbar ein $\mathbb{Q}$-Erzeugendensystem und sogar eine Basis, da man andernfalls $\sqrt{3}$ als rationale Linearkombination von 1 und $\sqrt{2}$ ausdrücken könnte. Damit liegt insgesamt eine Körpererweiterung vom Grad vier vor. Sei $D = \mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(2)$. Wir setzen

$$L_{(0,0)} = \mathbb{Q},\ L_{(1,0)} = \mathbb{Q} \cdot \sqrt{2},\ L_{(0,1)} = \mathbb{Q} \cdot \sqrt{3}\,, L_{(1,1)} = \mathbb{Q} \cdot \sqrt{6}\,,$$

und erhalten dadurch eine D-graduierte Körpererweiterung von $\mathbb{Q}$.

Beispiel 9.15. Wir betrachten die Körpererweiterung $\mathbb{Q} \subseteq L = \mathbb{Q}[i, \sqrt{2}]$ in $\mathbb{C}$. Diese besitzt eine $D = \mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(2)$-Graduierung, bei der $1, i, \sqrt{2}, i\sqrt{2}$ eine homogene Basis bilden. Das (in dieser Graduierung nicht homogene) Element $\zeta_8 = \frac{1}{2}(\sqrt{2} + \sqrt{2}i)$ ist eine 8-te primitive Einheitswurzel und wegen $\zeta^2 = i$ ist $L = \mathbb{Q}(\zeta_8)$ der achte Kreisteilungskörper.[7] Das Minimalpolynom zu ζ_8 ist $X^4 + 1$, so dass man auch $L \cong \mathbb{Q}[X]/(X^4 + 1)$ schreiben kann. Dies zeigt, dass L auch eine $\mathbb{Z}/(4)$-graduierte Körpererweiterung von $\mathbb{Q}$ ist, bei der ζ_8 homogen ist.

10. Vorlesung

10.1. **Endliche Untergruppen der Einheitengruppe eines Körpers.**

Wir wollen zeigen, dass die Einheitengruppe $\mathbb{Z}/(p)$, p Primzahl, zyklisch ist. Dafür brauchen wir einige gruppentheoretische Vorbereitungen.

Lemma 10.1. *Sei G eine kommutative Gruppe und $x, y \in G$ Elemente der endlichen Ordnungen $n = \operatorname{ord}(x)$ und $m = \operatorname{ord}(y)$, wobei n und m teilerfremd seien. Dann hat xy die Ordnung nm.*

Beweis. Sei $(xy)^k = 1$. Wir haben zu zeigen, dass k ein Vielfaches von nm ist. Es ist

$$1 = (x^k y^k)^n = x^{kn} y^{kn} = y^{kn}\,,$$

[7] Mit Kreisteilungskörpern werden wir uns später ausführlich beschäftigen.

da ja n die Ordnung von x ist. Aus dieser Gleichung erhält man, dass kn ein Vielfaches der Ordnung von y, also von m sein muss. Da n und m teilerfremd sind, folgt aus Lemma 3.17, dass k ein Vielfaches von m ist. Ebenso ergibt sich, dass k ein Vielfaches von n ist, so dass k, wieder aufgrund der Teilerfremdheit, ein Vielfaches von nm sein muss. □

Definition 10.2. Der *Exponent* $\exp(G)$ einer endlichen Gruppe G ist die kleinste positive Zahl n mit der Eigenschaft, dass $x^n = 1$ ist für alle $x \in G$.

Lemma 10.3. *Sei G eine endliche kommutative Gruppe und sei $\exp(G) = \operatorname{ord}(G)$, wobei $\exp(G)$ den Exponenten der Gruppe bezeichnet. Dann ist G zyklisch.*

Beweis. Sei $n = \operatorname{ord}(G) = p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k}$ die Primfaktorzerlegung der Gruppenordnung. Der Exponent der Gruppe ist

$$\exp(G) = \operatorname{kgV}(\operatorname{ord}(x) : x \in G).$$

Sei p_i ein Primteiler von n. Wegen $\exp(G) = \operatorname{ord}(G)$ gibt es ein Element $x \in G$, dessen Ordnung ein Vielfaches von $p_i^{r_i}$ ist. Dann gibt es auch (in der von x erzeugten zyklischen Untergruppe) ein Element x_i der Ordnung $p_i^{r_i}$. Dann hat das Produkt $x_1 \cdots x_k \in G$ nach Lemma 10.1 die Ordnung n. □

Satz 10.4. *Sei $U \subseteq K^\times$ eine endliche Untergruppe der multiplikativen Gruppe eines Körpers K. Dann ist U zyklisch.*

Beweis. Sei $n = \operatorname{ord}(U)$ und $e = \exp(U)$ der Exponent dieser Gruppe. Dies bedeutet, dass alle Elemente $x \in U$ eine Nullstelle des Polynoms $X^e - 1$ sind. Nach Korollar Anhang 1.5 ist die Anzahl der Nullstellen aber maximal gleich dem Grad, so dass $n = e$ folgt. Nach Lemma 10.1 ist dann U zyklisch. □

Satz 10.5. *Es sei K ein endlicher Körper. Dann ist die Einheitengruppe $K^\times$ eine zyklische Gruppe.*

Beweis. Dies folgt direkt aus Satz 10.4. □

Satz 10.6. *Sei p eine Primzahl. Dann ist die Einheitengruppe $(\mathbb{Z}/(p))^\times$ zyklisch der Ordnung $p - 1$. Es gibt also (sogenannte primitive) Elemente g mit der Eigenschaft, dass die Potenzen g^i, $i = 0, 1, \ldots, p-2$, alle Einheiten durchlaufen.*

Beweis. Dies folgt unmittelbar aus Satz 10.4, da $\mathbb{Z}/(p)$ ein endlicher Körper ist. □

Definition 10.7. Eine Einheit $u \in (\mathbb{Z}/(n))^\times$ heißt *primitiv* (oder eine *primitive Einheit*), wenn sie die Einheitengruppe erzeugt.

Beispiel 10.8. Wir betrachten die Einheitengruppe des Restklassenkörpers $\mathbb{Z}/(23)$. Nach Satz 10.6 ist sie zyklisch und es gibt daher Erzeuger der Einheitengruppe, also primitive Elemente. Wie kann man diese finden? Man ist

hierbei prinzipiell auf Probieren angewiesen, man kann dies allerdings deutlich vereinfachen. Man weiß, dass die Einheitengruppe 22 Elemente besitzt, als Ordnung von Elementen dieser Gruppe kommen also nur $1, 2, 11$ und 22, in Frage. Es gibt genau ein Element mit der Ordnung 1, nämlich 1, und ein Element mit der Ordnung 2, nämlich $-1 = 22$. Alle anderen Elemente haben also die Ordnung 11 oder 22, und genau die letzteren sind primitiv. Der erste Kandidat ist 2. Wir müssen also

$$2^{11} \mod 23$$

ausrechnen. Es ist $2^5 = 32 = 9$ und daher ist

$$2^{11} = 9 \cdot 9 \cdot 2 = 12 \cdot 2 = 24 = 1.$$

Die Ordnung ist also 11, und die 2 ist nicht primitiv. Betrachten wir die 3. Es ist $3^3 = 27 = 4$ und daher ist

$$3^{11} = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 9 = 18 \cdot 9 = 162 = 1,$$

also wieder nicht primitiv. Der nächste Kandidat 4 muss nicht gecheckt werden, denn wegen $4 = 2^2$ ist sofort $4^{11} = 2^{22} = 1$ (diese Beobachtung gilt für alle Quadratzahlen, und zwar auch für diejenigen Zahlen, die nur modulo 23 ein Quadrat sind). Betrachten wir also 5. Es ist $5^2 = 2$. Damit ist

$$5^{11} = 2^5 \cdot 5 = 9 \cdot 5 = 45 = -1 \neq 1.$$

Daher hat 5 die Ordnung 22 und ist ein primitives Element.

Man kann diesen Sachverhalt auch so ausdrücken, dass die Abbildung

$$\mathbb{Z}/(22) \longrightarrow (\mathbb{Z}/(23))^\times,\ k \longmapsto 5^k,$$

einen Gruppenisomorphismus definiert. Dieser übersetzt die Addition in die Multiplikation, daher spricht man von einer *diskreten Exponentialfunktion* und nennt die Umkehrabbildung auch einen *diskreten Logarithmus*. Solche Abbildungen spielen eine wichtige Rolle in der *Kryptologie*. Wenn man wie in diesem Beispiel einen solchen Isomorphismus gefunden hat, so kann man viele Eigenschaften der Einheitengruppe in der „einfacheren“ Gruppe entscheiden. Z.B. sind in $\mathbb{Z}/(22)$ alle ungeraden Elemente außer 11 ein Gruppenerzeuger, daher sind in der Einheitengruppe alle Elemente der Form

$$5^u, u \text{ ungerade}, u \neq 11,$$

primitiv.

10.2. **Primitive Einheitswurzeln.**

Die Menge der n-ten Einheitswurzeln in einem Körper K bilden eine endliche Untergruppe von $K^\times$, die wegen Satz 10.4 zyklisch ist.

Definition 10.9. Eine n-te Einheitswurzel heißt *primitiv*, wenn sie die Ordnung n besitzt.

Man beachte, dass ein Erzeuger der Gruppe der Einheitswurzeln nur dann primitiv heißt, wenn es n verschiedene Einheitswurzeln gibt. Wenn ζ eine primitive n-te Einheitswurzel ist, so sind genau die ζ^i mit $i < n$ und i teilerfremd zu n die primitiven Einheitswurzeln.[8]

10.3. **Endliche Körper.**

Definition 10.10. Ein Körper heißt *endlich*, wenn er nur endlich viele Elemente besitzt.

Über die Anzahl der Elemente in einem endlichen Körper gilt folgende wichtige Bedingung.

Lemma 10.11. *Sei K ein endlicher Körper. Dann besitzt K genau p^n Elemente, wobei p eine Primzahl ist und $n \geq 1$.*

Beweis. Der endliche Körper kann nicht Charakteristik null besitzen, und als Charakteristik eines Körpers kommt ansonsten nach Lemma 13.9 (Einführung in die Algebra (Osnabrück 2009)) nur eine Primzahl in Frage. Diese sei mit p bezeichnet. Das bedeutet, dass K den Körper $\mathbb{Z}/(p)$ enthält. Damit ist aber K ein Vektorraum über $\mathbb{Z}/(p)$, und zwar, da K endlich ist, von endlicher Dimension. Sei n die Dimension, $n \geq 1$. Dann hat man eine $\mathbb{Z}/(p)$-Vektorraum-Isomorphie $K \cong (\mathbb{Z}/(p))^n$ und somit besitzt K gerade p^n Elemente. □

Die vorstehende Aussage gilt allgemeiner für endliche Ringe, die einen Körper enthalten. Es sei schon jetzt erwähnt, dass es zu jeder Potenz p^n bis auf Isomorphie genau einen Körper mit p^n Elementen gibt. Dies werden wir in der nächsten Vorlesung beweisen. Für einige Beispiele siehe auch die Aufgaben.

Beispiel 10.12. Wir konstruieren einen Körper mit $23^2 = 529$ Elementen und knüpfen dabei an Beispiel 10.8 an. Da die $5 \in \mathbb{Z}/(23)$ primitiv ist, folgt, dass das Polynom $X^2 - 5 \in \mathbb{Z}/(23)[X]$ irreduzibel ist. Andernfalls müsste es eine Nullstelle haben und dann wäre $5 = a^2$ ein Quadrat mit $a \in \mathbb{Z}/(23)$. Doch dann wäre $5^{11} = a^{22} = 1$, was nicht der Fall ist.

Es folgt nach Satz 7.6, dass

$$K = \mathbb{Z}/(23)[X]/(X^2 - 5)$$

ein Körper ist. Dieser hat 23^2 Elemente, da man jede Restklasse auf genau eine Weise als $ax + b$ mit $a, b \in \mathbb{Z}/(23)$ schreiben kann (x bezeichne die Restklasse von X). Dieser Körper enthält $\mathbb{Z}/(23)$, und die Ordnungen dieser Elemente ändern sich nicht (und sie sind insbesondere nicht primitiv im größeren Körper).

[8] Insbesondere gibt es, wenn es überhaupt primitive Einheitswurzeln gibt, genau $\varphi(n)$ primitive Einheitswurzeln, wobei $\varphi(n)$ die eulersche φ-Funktion bezeichnet. Siehe Vorlesung 19.

Wir möchten eine primitive Einheit in diesem Körper finden. Die Ordnung von $K^\times$ ist $528 = 16 \cdot 3 \cdot 11$. Wir müssen für jede dieser Primzahlpotenzen ein Element mit dieser Ordnung finden. Die 2 hat die Ordnung 11. Das Element $11 - x$ hat die Ordnung 3, es ist nämlich

$$(11-x)^3 = 121 \cdot 11 - 3 \cdot 121x + 33x^2 - x^3 = 66 - 3 \cdot 6x + 50 - 5x = 116 - 23x = 1.$$

Um ein Element der Ordnung 16 zu finden, ziehen wir sukzessive Quadratwurzeln aus -1. Es ist

$$(3x)^2 = 9x^2 = 45 = -1.$$

Eine Quadratwurzel daraus ist $14 + 19x$, wegen

$$(14 + 19x)^2 = 196 + 361 \cdot 5 + 2 \cdot 14 \cdot 19x = 12 + 16 \cdot 5 + 5 \cdot 19x = 3x.$$

Um eine Quadratwurzel für $14+19x$ zu finden, setzen wir $(a+bx)^2 = 14+19x$ an, was zum Gleichungssystem $a^2+5b^2 = 14$ und $2ab = 19$ über $\mathbb{Z}/(23)$ führt. Es ist dann $a = 21 \cdot b^{-1}$, was zu $4b^{-2} + 5b^2 = 14$ bzw. zur *biquadratischen Gleichung*

$$5b^4 + 9b^2 + 4 = 0$$

führt. Normieren ergibt $b^4 + 11b^2 + 10 = 0$. *Quadratisches Ergänzen* führt zu

$$(b^2 + 17)^2 = 17^2 - 10 = 49.$$

Daher ist $b^2 = 13$ und somit $b = 6$ und $a = 15$, also ist $15 + 6x$ ein Element der Ordnung 16. Damit ist insgesamt

$$2(11 - x)(15 + 6x) = 2(165 - 30 + 51x) = 2(20 + 5x) = 17 + 10x$$

eine primitive Einheit nach Lemma 10.1.

Satz 10.13. *Sei K ein endlicher Körper. Dann ist das Produkt aller von 0 verschiedener Elemente aus K gleich -1.*

Beweis. Die Gleichung $x^2 = 1$ hat in einem Körper nur die Lösungen 1 und -1, die allerdings gleich sein können. Das bedeutet, dass für $x \neq 1, -1$ immer $x \neq x^{-1}$ ist. Damit kann man das Produkt aller Einheiten schreiben als

$$1(-1)x_1x_1^{-1} \cdots x_kx_k^{-1}\,.$$

Ist $-1 \neq 1$, so ist das Produkt -1. Ist hingegen $-1 = 1$, so fehlt in dem Produkt der zweite Faktor und das Produkt ist $1 = -1$. □

Die folgende Aussage heißt *Satz von Wilson.*

Korollar 10.14. *Sei p eine Primzahl. Dann ist*

$$(p-1)! = -1 \mod p\,.$$

Beweis. Dies folgt unmittelbar aus Satz 10.13, da ja die Fakultät durch alle Zahlen zwischen 1 und $p - 1$ läuft, also durch alle Einheiten im Restklassenkörper $\mathbb{Z}/(p)$. □

11. Vorlesung

11.1. **Zerfällungskörper.**

Wir wollen zu einem Polynom $F \in K[X]$ einen Körper konstruieren, über dem F in Linearfaktoren zerfällt. Dies beruht auf einer recht einfachen Konstruktion. Zu jedem Körper kann man sogar einen Körper $K \subseteq \overline{K}$ konstruieren, der algebraisch abgeschlossen ist, was wir aber nicht ausführen werden. Eine erste Anwendung ist die Konstruktion und die Charakterisierung von endlichen Körpern.

Lemma 11.1. *Sei K ein Körper und F ein Polynom aus $K[X]$. Dann gibt es einen Erweiterungskörper $K \subseteq L$ derart, dass F über L in Linearfaktoren zerfällt.*

Beweis. Sei $F = P_1 \cdots P_r$ die Zerlegung in Primpolynome in $K[X]$, und sei P_1 nicht linear. Dann ist

$$K \longrightarrow K[Y]/(P_1(Y)) =: K'$$

eine Körpererweiterung von K nach Satz 7.6. Wegen $P_1(Y) = 0$ in K' ist die Restklasse y von Y in K' eine Nullstelle von P_1. Daher gilt in $K'[X]$ die Faktorisierung

$$P_1 = (X - y)\tilde{P}\,,$$

wobei $\tilde{P}$ einen kleineren Grad als P_1 hat. Das Polynom F hat also über K' mindestens einen Linearfaktor mehr als über K. Induktive Anwendung von dieser Konstruktion liefert eine Kette von Erweiterungen $K \subset K' \subset K'' \ldots$, die stationär wird, sobald F in Linearfaktoren zerfällt. □

Definition 11.2. Es sei K ein Körper, $F \in K[X]$ ein Polynom und $K \subseteq L$ eine Körpererweiterung, über der F in Linearfaktoren zerfällt. Es seien $a_1, \ldots, a_n \in L$ die Nullstellen von F. Dann nennt man

$$K[a_1, \ldots, a_n] \subseteq L$$

einen *Zerfällungskörper* von F.[9]

Es handelt sich hierbei wirklich um einen Körper, wie wir gleich sehen werden. Häufig beschränkt man sich auf Polynome vom Grad ≥ 1, bei konstanten Polynomen sehen wir einfach K selbst als Zerfällungskörper an. Über dem Zerfällungskörper zerfällt das gegebene Polynom in Linearfaktoren, da er ja nach Definition alle Nullstellen enthält, mit denen alle beteiligten Linearfaktoren formuliert werden können.

[9]Der Sprachgebrauch ist nicht ganz einheitlich. Manche Autoren nennen jeden Körper, über dem das gegebene Polynom in Linearfaktoren zerfällt, einen Zerfällungskörper, und bezeichnen den von den Nullstellen erzeugten Zerfällungskörper als minimalen Zerfällungskörper.

Lemma 11.3. *Es sei K ein Körper, $F \in K[X]$ ein Polynom und $L = Z(F)$ der Zerfällungskörper von F. Es sei $K \subseteq K' \subseteq L$ ein Zwischenkörper. Dann ist L auch ein Zerfällungskörper des Polynoms $F \in K'[X]$.*

Beweis. Das ist trivial. □

Lemma 11.4. *Es sei K ein Körper, $F \in K[X]$ ein Polynom und $L = Z(F)$ der Zerfällungskörper von F. Dann ist $K \subseteq L$ eine endliche Körpererweiterung.*

Beweis. Es sei $L = K[a_1, \ldots, a_n]$, wobei $a_i \in L$ die Nullstellen von F seien und F über L in Linearfaktoren zerfällt. Es liegt die Kette von K-Algebren

$$K \subseteq K[a_1] \subseteq K[a_1, a_2] \subseteq \cdots \subseteq K[a_1, \ldots, a_n] = L$$

vor. Dabei ist sukzessive a_i algebraisch über $K[a_1, \ldots, a_{i-1}]$, da ja a_i eine Nullstelle von $F \in K[X]$ ist. Daher sind die Inklusionen nach Satz 8.1 endliche Körpererweiterungen und nach Satz 2.8 ist dann die Gesamtkörpererweiterung ebenfalls endlich. □

Satz 11.5. *Es sei K ein Körper und sei $F \in K[X]$ ein Polynom. Es seien $K \subseteq L_1$ und $K \subseteq L_2$ zwei Zerfällungskörper von F. Dann gibt es einen K-Algebra-Isomorphismus*

$$\varphi : L_1 \longrightarrow L_2.$$

Insbesondere gibt es bis auf Isomorphie nur einen Zerfällungskörper zu einem Polynom.

Beweis. Wir beweisen die Aussage durch Induktion über den Grad $\operatorname{grad}_K L_1$. Wenn der Grad eins ist, so ist $K = L_1$ und das Polynom F zerfällt bereits über K in Linearfaktoren. Dann gehören alle Nullstellen von F in einem beliebigen Erweiterungskörper $K \subseteq M$ zu K selbst. Also ist auch $L_2 = K$. Es sei nun $\operatorname{grad}_K L_1 \geq 2$ und die Aussage sei für kleinere Grade bewiesen. Dann zerfällt F über K nicht in Linearfaktoren. Daher gibt es einen irreduziblen Faktor P von F mit $\operatorname{grad}(P) \geq 2$ und $K' = K[X]/(P)$ ist nach Satz 7.6 und nach Proposition 7.9 eine Körpererweiterung von K vom Grad ≥ 2. Da P als Faktor von F ebenfalls über L_1 und über L_2 in Linearfaktoren zerfällt, gibt es Ringhomomorphismen $K' \to L_1$ und $K' \to L_2$. Diese sind injektiv, so dass K' sowohl von L_1 als auch von L_2 ein Unterkörper ist. Nach Lemma 11.3 sind dann L_1 und L_2 Zerfällungskörper von $F \in K'[X]$. Nach Satz 2.8 ist $\operatorname{grad}_{K'} L_1 < \operatorname{grad}_K L_1$, so dass wir auf K', L_1, L_2 die Induktionsvoraussetzung anwenden können. Es gibt also einen K'-Algebra-Isomorphismus

$$\varphi : L_1 \longrightarrow L_2.$$

Dieser ist erst recht ein K-Algebra-Isomorphismus. □

11.2. **Konstruktion endlicher Körper.**

Endliche Körper mit der Anzahl p^n konstruiert man, indem man ein in $(\mathbb{Z}/(p))[X]$ irreduzibles Polynom vom Grad n findet. Ob ein gegebenes Polynom irreduzibel ist, lässt sich dabei grundsätzlich in endlich vielen Schritten entscheiden, da es ja zu jedem Grad überhaupt nur endlich viele Polynome gibt, die als Teiler in Frage kommen können. Zur Konstruktion von einigen kleinen endlichen Körpern siehe Aufgabe 10.13 und Aufgabe 11.13. Generell kann man einen Körper mit $q = p^n$ Elementen als Zerfällungskörper des Polynoms $X^q - X$ erhalten.

Lemma 11.6. *Sei K ein Körper der Charakteristik p, sei $q = p^e$, $e \geq 1$. Es sei*

$$M = \{x \in K : x^q = x\}.$$

Dann ist M ein Unterkörper von K.

Beweis. Zunächst gilt für jedes Element $x \in \mathbb{Z}/(p) \subseteq K$, dass

$$x^{p^e} \; = \; (x^p)^{p^{e-1}} \; = \; x^{p^{e-1}} \; = \; \ldots \; = \; x$$

ist, wobei wir wiederholt den kleinen Fermat benutzt haben. Insbesondere ist also $0, 1, -1 \in M$. Es ist $z^q = F^e(z)$ und der Frobenius

$$F : K \longrightarrow K,\, x \longmapsto x^p,$$

ist ein Ringhomomorphismus.[10] Daher ist für $x, y \in M$ einerseits

$$(x+y)^q \; = \; F^e(x+y) \; = \; F^e(x) + F^e(y)$$

und andererseits

$$(xy)^q \; = \; x^q y^q \; = \; xy.$$

Ferner gilt für $x \in M$, $x \neq 0$, die Gleichheit

$$(x^{-1})^q = (x^q)^{-1} = x^{-1},$$

so dass auch das Inverse zu M gehört und in der Tat ein Körper vorliegt. □

Im Beweis der nächsten Aussage werden wir die Technik des *formalen Ableitens* verwenden. Ableiten ist eigentlich eine analytische Technik, und bekanntlich ist die Ableitung eines Monoms X^m gleich mX^{m-1}, und die Ableitung eines Polynoms ergibt sich durch lineare Fortsetzung dieser Regel. Da der Exponent der Variablen zum Vorfaktor wird, und da man jede ganze Zahl in jedem Körper eindeutig interpretieren kann, ergeben solche Ableitungen auch rein algebraisch für jeden Grundkörper Sinn. Wir definieren daher.

[10] Siehe dazu Aufgabe 11.4 und Vorlesung 15.

Definition 11.7. Sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K. Zu einem Polynom

$$F = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in K[X]$$

heißt das Polynom

$$F' = na_n X^{n-1} + (n-1)a_{n-1}X^{n-2} + \ldots + 3a_3X^2 + 2a_2X + a_1$$

die *formale Ableitung* von F.

Man beachte, dass, insbesondere bei positiver Charakteristik, das algebraische Ableiten einige überraschende Eigenschaften haben kann. In positiver Charakteristik p ist bspw.

$$(X^p)' = pX^{p-1} = 0.$$

Für einige grundlegende Eigenschaften des Ableitens siehe die Aufgaben. Wichtig ist für uns, dass man mit der formalen Ableitung testen kann, ob die Nullstellen eines Polynoms einfach oder mehrfach sind (eine Nullstelle a heißt *mehrfach*, wenn das zugehörige lineare Polynom $X-a$ das Polynom mehrfach teilt, d.h. wenn es in der Primfaktorzerlegung mit einem Exponenten ≥ 2 vorkommt).

Lemma 11.8. *Sei K ein Körper der Charakteristik $p > 0$, sei $q = p^e$, $e \geq 1$. Das Polynom $X^q - X$ zerfalle über K in Linearfaktoren. Dann ist*

$$M = \{x \in K : x^q = x\}$$

ein Unterkörper von K mit q Elementen.

Beweis. Nach Lemma 11.6 ist M ein Unterkörper von K, und nach Korollar Anhang 1.5 besitzt er höchstens q Elemente. Es ist also zu zeigen, dass $F = X^q - X$ keine mehrfache Nullstellen hat. Dies folgt aber aus $F' = -1$ und Aufgabe 11.19. □

Satz 11.9. *Sei p eine Primzahl und $e \in \mathbb{N}_+$. Dann gibt es bis auf Isomorphie genau einen Körper mit $q = p^e$ Elementen.*

Beweis. Existenz. Wir wenden Lemma 11.1 auf den Grundkörper $\mathbb{Z}/(p)$ und das Polynom $X^q - X$ an und erhalten einen Körper L der Charakteristik p, über dem $X^q - X$ in Linearfaktoren zerfällt. Nach Lemma 11.8 gibt es dann einen Unterkörper M von L, der aus genau q Elementen besteht.

Eindeutigkeit. Wir zeigen, dass ein Körper mit q Elementen der Zerfällungskörper des Polynoms $X^q - X$ sein muss, so dass er aufgrund dieser Eigenschaft nach Satz 11.5 eindeutig bestimmt ist. Sei also L ein Körper mit q Elementen, der dann $\mathbb{Z}/(p)$ als Primkörper enthält. Da $L^\times$ genau $q-1$ Elemente besitzt, gilt nach Korollar 4.17 die Gleichung $x^{q-1} = 1$ für jedes $x \in L^\times$ und damit auch $x^q = x$ für jedes $x \in L$. Dieses Polynom vom Grad q hat also in L genau q verschiedene Nullstellen, so dass es also über L zerfällt. Zugleich

ist der von allen Nullstellen erzeugte Unterkörper gleich L, so dass L der Zerfällungskörper ist. □

Notation 11.10. Sei p eine Primzahl und $e \in \mathbb{N}_+$. Der aufgrund von Satz 11.9 bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte endliche Körper mit $q = p^e$ Elementen wird mit

$$\mathbb{F}_q$$

bezeichnet.

Für $q = p$ ist $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/(p)$. Dagegen sind für $q = p^e$, $e \geq 2$, die Ringe $\mathbb{F}_q$ und $\mathbb{Z}/(q)$ verschieden, obwohl beide Ringe q Elemente besitzen. Dies liegt einfach daran, dass $\mathbb{F}_q$ ein Körper ist, $\mathbb{Z}/(q)$ aber nicht.

12. Vorlesung

Wir interessieren uns für die Frage, wann eine endliche Körpererweiterung $K \subseteq L$ einfach ist, also in der Form $L = K(x)$ mit einem Element $x \in L$ geschrieben werden kann. Antwort gibt der *Satz vom primitiven Element* (d.h. erzeugenden Element), der besagt, dass dies unter der recht schwachen Voraussetzung der Separabilität der Fall ist.

12.1. **Separable Körpererweiterungen.**

Definition 12.1. Es sei K ein Körper. Ein Polynom $P \in K[X]$ heißt *separabel*, wenn es über keinem Erweiterungskörper $K \subseteq L$ mehrfache Nullstellen besitzt.

Lemma 12.2. *Es sei K ein Körper und sei $P \in K[X]$ ein Polynom. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

(1) *P ist separabel.*
(2) *Es gibt eine Körpererweiterung $K \subseteq L$ derart, dass P über L in einfache Linearfaktoren zerfällt.*
(3) *P und die Ableitung P' sind teilerfremd.*
(4) *P und die Ableitung P' erzeugen das Einheitsideal.*

Beweis. (1) ⇒ (2). Dies folgt aus Lemma 11.1. (2) ⇒ (3). Nehmen wir an, dass P und P' einen gemeinsamen nichttrivialen Teiler in $K[X]$ besitzen. Dies ist dann auch in $L[X]$ der Fall. Dies bedeutet wiederum, dass ein Linearfaktor von P auch ein Teiler von P' ist. Daher besitzen P und P' eine gemeinsame Nullstelle und somit besitzt P eine mehrfache Nullstelle im Widerspruch zur Voraussetzung. (3) ⇒ (4). Dies folgt aus Lemma 3.16. (4) ⇒ (1). Sei $K \subseteq L$ eine Körpererweiterung, so dass $P \in L[X]$ in Linearfaktoren zerfällt. Nach Voraussetzung kann man 1 in $K[X]$ als Linearkombination von P und P' darstellen. Diese Eigenschaft überträgt sich direkt auf $L[X]$. Wenn P in L eine mehrfache Nullstelle hätte, so wäre diese Nullstelle auch eine Nullstelle der Ableitung. Das kann aber wegen der Darstellbarkeit der 1 nicht sein. □

Definition 12.3. Eine endliche Körpererweiterung $K \subseteq L$ heißt *separabel*, wenn für jedes Element $x \in L$ das Minimalpolynom separabel ist.

Lemma 12.4. *Es sei $K \subseteq L$ eine endliche separable Körpererweiterung und M, $K \subseteq M \subseteq L$, ein Zwischenkörper. Dann ist auch $M \subseteq L$ eine separable Körpererweiterung.*

Beweis. Siehe Aufgabe 12.5. □

Unser erstes wichtiges Ziel ist es, zu zeigen, dass eine endliche Körpererweiterung bereits dann separabel ist, wenn die Minimalpolynome zu einem Erzeugendensystem separabel sind.

Lemma 12.5. *Es sei $K \subseteq L = K[x] = K(x)$ eine einfache Körpererweiterung vom Grad $d = \operatorname{grad}_K L$. Es sei $K \subseteq M$ eine Körpererweiterung, unter der das Minimalpolynom F von x in Linearfaktoren zerfällt. Dann ist F genau dann ein separables Polynom, wenn es d verschiedene K-Einbettungen von L in M gibt.*

Beweis. Es sei also $K \subseteq L = K[x] = K[X]/(F)$ vom Grad d mit dem Minimalpolynom F gegeben. Dieses Polynom F ist genau dann separabel, wenn es in M genau d Nullstellen besitzt. Diese Nullstellen stehen gemäß Satz 6.4 in Bijektion zu den K-Algebra-Homomorphismen von $L = K[X]/(F)$ nach M. □

Lemma 12.6. *Es sei $K \subseteq L = K[x_1, \ldots, x_n]$ eine endliche Körpererweiterung vom Grad $d = \operatorname{grad}_K L$ mit der Eigenschaft, dass die Minimalpolynome $F_i \in K[X]$ zu den x_i separabel sind. Es sei $K \subseteq M$ eine Körpererweiterung, unter der die F_i in Linearfaktoren zerfallen. Dann gibt es d verschiedene K-Einbettungen von L in M.*

Beweis. Wir führen Induktion über n, bei $n = 0$ ist der Grad der Körpererweiterung gleich 1 und es gibt auch nur die K-Einbettung $K \subseteq M$. Sei die Aussage für n bewiesen. Wir betrachten die Körperkette

$$K \subseteq K' = K[x_1, \ldots, x_n] \subseteq K'[x_{n+1}] = L\,.$$

Wir wissen also, dass es $\operatorname{grad}_K K'$ verschiedene K-Einbettungen von K' nach M gibt. Aufgrund der Gradformel genügt es zu zeigen, dass es für $K' \subseteq K'[x_{n+1}] = L$ so viele K'-Einbettungen von L in M gibt, wie es der Körpergrad $\operatorname{grad}_{K'} L$ vorgibt. Es genügt also, den Fall $n = 1$ zu beweisen, und dieser folgt aus Lemma 12.5. □

Satz 12.7. *Es sei $K \subseteq L = K[x_1, \ldots, x_n]$ eine endliche Körpererweiterung. Es sei vorausgesetzt, dass die Minimalpolynome F_i der x_i separabel sind. Dann ist die Erweiterung $K \subseteq L$ separabel.*

Beweis. Es sei $x \in L$ mit Minimalpolynom $F \in K[X]$. Wir betrachten den zugehörigen Zwischenkörper $K \subseteq K[x] \cong K[X]/(F) \subseteq L$, wobei die Grade

mit $d_1 = \operatorname{grad}_K K[x]$, $d_2 = \operatorname{grad}_{K[x]} L$ und mit $d = d_1 d_2 = \operatorname{grad}_K L$ bezeichnet seien. Es sei $L \subseteq M$ ein Körper, über dem F und die F_i in Linearfaktoren zerfallen. Nach Lemma 12.6 gibt es d K-Algebra-Homomorphismen von L nach M. Wenn die Anzahl der Homomorphismen von $K[x]$ nach M kleiner als d_1 wäre, so würde es mehr als d_2 Homomorphismen $L \to M$ geben, deren Einschränkungen auf $K[x]$ übereinstimmen würden. Nach Lemma 12.4 ist $K[x] \subseteq L$ eine separable Körperweiterung vom Grad d_2 und daher gibt es nach Lemma 12.5 genau d_2 Homomorphismen von L nach M über $K[x]$ ist, so dass das nicht sein kann. Also gibt es d_1 Algebra-Homomorphismen von $K[x] \cong K[X]/(F)$ nach M und somit ist F, wiederum nach Lemma 12.5, ein separables Polynom. □

12.2. **Der Satz vom primitiven Element.**

Lemma 12.8. *Es sei $K \subseteq L = K(x)$ eine endliche einfache Körpererweiterung und $K \subseteq M \subseteq L$ ein Zwischenkörper. Es sei $G = \sum_{j=0}^{k} b_j X^j \in M[X]$ das Minimalpolynom von x über M. Dann ist $M = K(b_0, \ldots, b_k)$.*

Beweis. Wir gehen von der Inklusion $K' = K(b_0, \ldots, b_k) \subseteq M$ aus. Die Körpererweiterung $K' \subseteq L$ ist ebenfalls einfach mit dem Erzeuger x, und $G \in K'[X]$ ist irreduzibel, da es ja irreduzibel in $M[X]$ ist. Somit ist G nach Lemma 7.12 auch das Minimalpolynom von x über K'. Daher ist $L = M[X]/(G)$ und $L = K'[X]/(G)$ und insbesondere

$$\operatorname{grad}_M L \;=\; \operatorname{Grad}(G) \;=\; \operatorname{grad}_{K'} L.$$

Nach der Gradformel folgt $K' = M$. □

Satz 12.9. *Sei $K \subseteq L$ eine endliche Körpererweiterung. Dann ist $K \subseteq L$ genau dann eine einfache Körpererweiterung, wenn es nur endlich viele Zwischenkörper $K \subseteq M \subseteq L$ gibt.*

Beweis. Wenn K ein endlicher Körper ist, so ist auch L endlich und die Voraussetzung über die endlich vielen Zwischenkörper ist automatisch erfüllt. In diesem Fall ist aber auch nach Satz 10.5 die Körpererweiterung einfach. Wir können also annehmen, dass K unendlich ist. Sei zunächst vorausgesetzt, dass es in $K \subseteq L$ nur endlich viele Zwischenkörper gibt. Sei $\operatorname{grad}_K L = n$. Jeder von L verschiedene Zwischenkörper M_i ist ein maximal $(n-1)$-dimensionaler K-Untervektorraum von L und daher gibt es eine von 0 verschiedene K-lineare Abbildung

$$\varphi_i : L \longrightarrow K$$

mit $\varphi_i(M_i) = 0$. Zu φ_i gehört ein lineares Polynom P_i (in n Variablen)[11] mit der entsprechenden Eigenschaft. Das Polynom $P = \prod_{i=1}^{k} P_i$ ist dann auf der Vereinigung aller Zwischenkörper $M_i \neq L$ gleich 0. Da K unendlich ist, gibt es aber nach Aufgabe 12.11 auch Elemente $a = (a_1, \ldots, a_n) \in L$ mit $P(a) \neq 0$.

[11] Man fixiert hierzu eine K-Basis von L, die zugehörige Dualbasis entspricht dann den n Variablen. Die folgende Tupelschreibweise bezieht sich ebenfalls auf die Basis.

Der von einem solchen Element a über K erzeugte Körper muss gleich L sein, da er nach Konstruktion in keinem anderen Zwischenkörper liegt. Sei nun $L = K(x) = K[x] = K[X]/(F)$ eine einfache Körpererweiterung mit dem Minimalpolynom $F \in K[X]$. Für jeden Zwischenkörper M, $K \subseteq M \subseteq L$, ist $L = M(x)$ und das Minimalpolynom G von x über M ist in $M[X]$ und insbesondere in $L[X]$ ein Teiler von F. Nach Lemma 12.8 besteht die Beziehung $M = K(b_0, \ldots, b_k)$, wobei die b_j die Koeffizienten von G sind. Da F nur endlich viele (normierte) Teiler besitzt, gibt es nur endlich viele Zwischenkörper. □

Korollar 12.10. *Es sei $K \subseteq L$ eine endliche einfache Körpererweiterung und $K \subseteq M \subseteq L$ ein Zwischenkörper. Dann ist auch $K \subseteq M$ eine einfache Körpererweiterung.*

Beweis. Dies folgt unmittelbar aus Satz 12.9, da ja $K \subseteq M$ unter der Voraussetzung auch nur endlich viele Zwischenkörper besitzt. □

Der folgende Satz heißt *Satz vom primitiven Element.*

Satz 12.11. *Sei $K \subseteq L$ eine separable endliche Körpererweiterung. Dann wird L von einem Element erzeugt, d.h. es gibt ein $f \in L$ mit*

$$L = K(f) \cong K[X]/(P)$$

mit einem irreduziblen (Minimal-)Polynom $P \in K[X]$.

Beweis. Bei K endlich folgt die Aussage sofort aus Satz 10.5, wir können also K als unendlich annehmen. Es sei $K \subseteq L = K[x_1, \ldots, x_n]$. Es genügt zu zeigen, dass man sukzessive zwei Erzeuger davon durch einen Erzeuger ersetzen kann. Dabei ist $K \subseteq K[x_1, x_2]$ ebenfalls separabel. Sei also $L = K[x, y]$ gegeben und $n = \operatorname{grad}_K L$. Es sei $K \subseteq M$ eine Körpererweiterung, bei der die Minimalpolynome von x und von y in Linearfaktoren zerfallen. Es gibt gemäß Lemma 12.6 n K-Einbettungen

$$\sigma_1, \ldots, \sigma_n : L \longrightarrow M.$$

Wir betrachten das Polynom

$$P = \prod_{i \neq j} ((\sigma_i(y) - \sigma_j(y))X + \sigma_i(x) - \sigma_j(x)),$$

das zu $M[X]$ gehört. Dies ist nicht das Nullpolynom, da keiner der Linearfaktoren gleich 0 ist. Daher besitzt P nur endlich viele Nullstellen und somit gibt es, da K unendlich ist, ein $c \in K$ mit $P(c) \neq 0$. Die Elemente $\sigma_i(x + cy) = \sigma_i(x) + c\sigma_i(y)$ sind alle verschieden. Aus $\sigma_i(x) + c\sigma_i(y) = \sigma_j(x) + c\sigma_j(y)$ für $i \neq j$ folgt nämlich $(\sigma_i(y) - \sigma_j(y))c + \sigma_i(x) - \sigma_j(x) = 0$, und c wäre doch eine Nullstelle. Es gibt also n verschiedene Einbettungen von $K(x + cy)$ nach M und insbesondere ist $\operatorname{grad}_K K[x + cy] \geq n$, also ist $K(x + cy) = L$. □

13. Vorlesung

13.1. **Automorphismen und Nullstellen.**

Lemma 13.1. *Es sei K ein Körper, $F \in K[X]$ ein Polynom und $L = Z(F)$ der Zerfällungskörper von F. Es seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ die Nullstellen von F in L. Dann gibt es einen natürlichen injektiven Gruppenhomomorphismus*

$$\mathrm{Gal}\,(L|K) \longrightarrow S(\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\})$$

der Galoisgruppe in die Permutationsgruppe der Nullstellen.

Beweis. Sei $\varphi \in \mathrm{Gal}\,(L|K)$. Nach Lemma 8.15 ist $\varphi(\alpha_i)$ wieder eine Nullstelle von F, daher muss $\varphi(\alpha_i) = \alpha_j$ für ein gewisses j sein. Dies definiert ein Abbildung der Nullstellenmenge in sich selbst. Da φ injektiv ist, ist auch diese induzierte Abbildung injektiv, also nach Lemma 3.14 (Mathematik (Osnabrück 2009-2011)) bijektiv und somit eine Permutation. Die Gesamtzuordnung ist offenbar ein Gruppenhomomorphismus. Da die Nullstellen ein Erzeugendensystem des Zerfällungskörpers bilden, liegt nach Lemma 8.14 ein injektiver Homomorphismus vor. □

Definition 13.2. Es sei K ein Körper und A eine kommutative K-Algebra. Zwei über K algebraische Elemente $\alpha, \beta \in A$ heißen *konjugiert*, wenn ihre Minimalpolynome übereinstimmen.

Satz 13.3. *Es sei $K \subseteq L$ eine endliche Körpererweiterung und es seien α und β konjugierte Elemente aus L. Es sei L der Zerfällungskörper des gemeinsamen Minimalpolynoms F dieser beiden Elemente. Dann gibt es einen K-Algebra-Automorphismus φ von L mit $\varphi(\alpha) = \beta$.*

Beweis. Zunächst gibt es wegen

$$K[\alpha] \cong K[X]/(F) \cong K[\beta]$$

einen K-Algebra-Homomorphismus φ von $K[\alpha]$ nach $K[\beta]$. Der Körper L ist über diesen beiden Unterkörpern der Zerfällungskörper von F. Daher gibt es nach Satz 11.5 einen K-Algebra-Homomorphismus von L nach L, der φ fortsetzt. □

13.2. **Das Lemma von Dedekind.**

Richard Dedekind (1831-1916)

Die Menge der Charaktere auf einem Monoid G in einen Körper K, also $\mathrm{Char}\,(G,K)$, ist selbst ein Monoid, und zwar ein Untermonoid des Abbildungsmonoids von G nach $K^\times$. Da Charaktere insbesondere Abbildungen von G nach K sind, kann man von Linearkombinationen von Charakteren sprechen. Diese sind im Allgemeinen keine Charaktere mehr. Es gilt die folgende bemerkenswerte Aussage, das *Lemma von Dedekind*.

Satz 13.4. *Es sei G ein Monoid, K ein Körper und $\chi_1,\ldots,\chi_n \in \mathrm{Char}\,(G,K)$ seien n Charaktere. Dann sind diese Charaktere linear unabhängig (als Elemente in $\mathrm{Hom}_K(G,K)$).*

Beweis. Es sei

$$a_1\chi_1 + \ldots + a_n\chi_n = 0\,,$$

wobei die χ_i verschiedene Charaktere seien und alle $a_i \in K$ von 0 verschieden seien. Darüber hinaus sei n minimal gewählt mit dieser Eigenschaft. Wegen $\chi(e_G) = 1$ ist ein einzelner Charakter nicht die Nullabbildung, also linear unabhängig und somit ist zumindest $n \geq 2$. Wegen $\chi_1 \neq \chi_2$ gibt es auch ein $g \in G$ mit $\chi_1(g) \neq \chi_2(g)$. Wir behaupten die Gleichheit (wieder von Abbildungen von G nach K)

$$a_1\chi_1(g)\chi_1 + \ldots + a_n\chi_n(g)\chi_n = 0\,.$$

Für ein beliebiges $h \in G$ ist nämlich

$$\begin{array}{rcl}(a_1\chi_1(g)\chi_1 + \ldots + a_n\chi_n(g)\chi_n)(h) & = & a_1\chi_1(g)\chi_1(h) + \ldots + a_n\chi_n(g)\chi_n(h)\\ & = & a_1\chi_1(g\cdot h) + \ldots + a_n\chi_n(g\cdot h)\\ & = & 0\end{array}$$

wegen der Ausgangsgleichung. Wenn man vom $\chi_1(g)$-fachen der Ausgangsgleichung die zweite Gleichung abzieht, so kann man χ_1 elimineren und erhält eine nichttriviale (wegen $a_2 \neq 0$ und der Wahl von g) lineare Relation zwischen $\chi_2,\ldots,\chi_n$ im Widerspruch zur Minimalitätseigenschaft von n. □

13.3. **Galoiserweiterungen.**

Aus dem Lemma von Dedekind ergibt sich eine direkte Abschätzung zwischen der Ordnung der Galoisgruppe und dem Grad einer endlichen Körpererweiterung.

Satz 13.5. *Sei $K \subseteq L$ eine endliche Körpererweiterung. Dann ist*

$$\#(\mathrm{Gal}\,(L|K)) \leq \mathrm{grad}_K\, L.$$

Beweis. Nach Satz 8.16 ist $\#(\mathrm{Gal}\,(L|K))$ endlich. Wir setzen

$$m = \#(\mathrm{Gal}\,(L|K))$$

und $n = \mathrm{grad}_K\, L$ und müssen $m \leq n$ zeigen. Nehmen wir also $m > n$ an. Es sei $v_1, \ldots, v_n$ eine K-Basis von L und die Elemente in der Galoisgruppe seien $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$. Wir betrachten die Matrix

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(v_1) & \cdots & \varphi_m(v_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1(v_n) & \cdots & \varphi_m(v_n) \end{pmatrix}.$$

Ihr Rang ist maximal gleich n, da sie nur n Zeilen besitzt. Daher gibt es eine nicht-triviale Relation zwischen den m Spalten, sagen wir

$$b_1 \begin{pmatrix} \varphi_1(v_1) \\ \vdots \\ \varphi_1(v_n) \end{pmatrix} + \ldots + b_m \begin{pmatrix} \varphi_m(v_1) \\ \vdots \\ \varphi_m(v_n) \end{pmatrix} = 0,$$

wobei nicht alle b_j gleich 0 sind. Wir betrachten nun

$$\sum_{j=1}^{m} b_j \varphi_j\,,$$

wobei wir die Automorphismen φ_j als Charaktere von $L^\times$ nach $L^\times$ auffassen. Für ein beliebiges Element $v \in L$ schreiben wir $v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$. Mit diesen Bezeichnungen gilt

$$\begin{aligned} (\sum_{j=1}^{m} b_j\varphi_j)(v) &= (\sum_{j=1}^{m} b_j\varphi_j)(\sum_{i=1}^{n} a_i v_i) \\ &= \sum_{j=1}^{m} b_j(\varphi_j(\sum_{i=1}^{n} a_i v_i)) \\ &= \sum_{j=1}^{m} b_j(\sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_j(v_i)) \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i(\sum_{j=1}^{m} b_j \varphi_j(v_i)) \\ &= 0, \end{aligned}$$

da ja wegen der obigen linearen Abhängigkeit die Zeilensummen

$$\sum_{j=1}^{m} b_j \varphi_j(v_i) = 0$$

sind für jedes i. Also liegt eine nicht-triviale Relation zwischen Charakteren vor, was nach Satz 13.4 nicht sein kann. □

Eine wichtige Frage ist, wann in der vorstehenden Abschätzung Gleichheit vorliegt. Dies machen wir zur Grundlage der folgenden Definition. Wir werden später noch viele äquivalente Eigenschaften kennenlernen.

Definition 13.6. Sei $K \subseteq L$ eine endliche Körpererweiterung. Sie heißt eine *Galoiserweiterung*, wenn

$$\#(\mathrm{Gal}\,(L|K)) \,=\, \mathrm{grad}_K\, L$$

gilt.

Lemma 13.7. *Es sei K ein Körper mit einer Charakeristik $\neq 2$ und sei $K \subseteq L$ eine quadratische Körpererweiterung. Dann ist $K \subseteq L$ eine Galoiserweiterung.*

Beweis. Siehe Aufgabe 13.6. □

Die vorstehende Aussage ist ein Spezialfall der Aussage, dass graduierte Körpererweiterungen unter der Voraussetzung, dass hinreichend viele Einheitswurzeln im Grundkörper vorhanden sind, Galois-Erweiterungen sind. Dazu brauchen wir ein vorbereitendes Lemma.

Lemma 13.8. *Es sei G eine endliche kommutative Gruppe mit dem Exponenten m, und es sei K ein Körper, der eine primitive m-te Einheitswurzel besitzt. Dann sind G und $G^\vee$ isomorphe*[12] *Gruppen.*

Beweis. Nach Lemma 9.10 und Korollar Anhang 4.2 kann man annehmen, dass $G = \mathbb{Z}/(n)$ eine endliche zyklische Gruppe ist, und dass K eine n-te primitive Einheitswurzel besitzt. Jeder Gruppenhomomorphismus

$$\varphi : G \longrightarrow K^\times$$

ist durch $\zeta = \varphi(1)$ eindeutig festgelegt, und wegen

$$\zeta^n \,=\, (\varphi(1))^n \,=\, \varphi(n) \,=\, \varphi(0) \,=\, 1$$

ist ζ eine n-te Einheitswurzel. Umgekehrt kann man zu jeder n-ten Einheitswurzel ζ durch die Zuordnung $1 \mapsto \zeta$ nach Lemma 4.4 und Satz 5.10 einen Gruppenhomomorphismus von $\mathbb{Z}/(n)$ nach $K^\times$ definieren. Die Menge der n-ten Einheitswurzeln ist, da eine primitive Einheitswurzel vorhanden ist, eine zyklische Gruppe der Ordnung n. Also gibt es n solche Homomorphismen.

[12] Diese Isomorphie ist nicht kanonisch, es gibt keine natürliche Beziehung zwischen den Elementen aus G und den Charaktern auf G.

Wenn ζ eine primitive Einheitswurzel ist, dann besitzt der durch $1 \mapsto \zeta$ festgelegte Homomorphismus die Ordnung n und ist damit ein Erzeuger der Charaktergruppe, also $(\mathbb{Z}/(n))^\vee \cong \mathbb{Z}/(n)$. □

Satz 13.9. *Es sei K ein Körper, D eine endliche kommutative Gruppe und $K \subseteq L$ eine D-graduierte Körpererweiterung. Zu jedem Primpotenzteiler p^r von $\#(D)$ enthalte K eine p^r-te primitive Einheitswurzel. Dann ist $K \subseteq L$ eine Galoiserweiterung mit Galoisgruppe $D^\vee = \operatorname{Char}(D, K)$.*

Beweis. Die Voraussetzung über die primitiven Einheitswurzeln in Verbindung mit Lemma 13.8 und Lemma 9.7 sichern

$$\#(D^\vee) \,=\, \#(D) \,=\, \operatorname{grad}_K L.$$

Nach Lemma 9.11 ist

$$\#(D^\vee) \,\leq\, \#(\operatorname{Gal}(L|K)).$$

Also ist

$$\operatorname{grad}_K L \,\leq\, \#(\operatorname{Gal}(L|K)),$$

und somit haben wir nach Satz 13.5 hier Gleichheit, also liegt eine Galoiserweiterung vor. Damit ist auch der nach Lemma 9.11 injektive Gruppenhomomorphismus

$$D^\vee \longrightarrow \operatorname{Gal}(L|K)$$

bijektiv. □

Beispiel 13.10. Sei $n \in \mathbb{N}_+$ und sei K ein Körper, der eine n-te primitive Einheitswurzel enthält. Es sei $a \in K$ derart, dass das Polynom $X^n - a$ irreduzibel sei. Dann ist

$$K \subseteq L = K[X]/(X^n - a)$$

eine nach Beispiel 9.4 $D = \mathbb{Z}/(n)$-graduierte Körpererweiterung, und nach Satz 13.9 handelt es sich um eine Galoiserweiterung mit Galoisgruppe

$$\operatorname{Gal}(L|K) = D^\vee \cong \mathbb{Z}/(n)\,.$$

Dabei ist L auch der Zerfällungskörper von $X^n - a$. Wenn x die Restklasse von X bezeichnet, so sind die n verschiedenen Nullstellen dieses Polynoms gleich

$$\zeta x \text{ mit } \zeta \in \mu_n(K) = \{z \in K |\, z^n = 1\},$$

die allesamt homogene Elemente der Stufe $1 \in D$ sind. Ein Charakter $\chi \in D^\vee$ bzw. der zugehörige Automorphismus φ_χ operiert gemäß Lemma 13.1 auf dieser Nullstellenmenge M (die nichtkanonisch isomorph zu $\mu_n(K)$ ist) durch

$$\varphi_\chi : M \longrightarrow M,\, \zeta x \longmapsto \chi(1)\zeta x.$$

Die graduierende Gruppe D, sein Charakterdual $D^\vee$, die Gruppe der n-ten Einheitswurzeln $\mu_n(K)$, die Galoisgruppe $\operatorname{Gal}(L|K)$ und die Nullstellenmenge M bestehen aus n Elementen, die Permutationsgruppe von M besteht somit aus $n!$ Elementen. Zu je zwei Nullstellen $x_1 = \zeta_1 x$ und $x_2 = \zeta_2 x$ gibt es

einen eindeutigen Charakter bzw. Automorphismus, dessen zugehörige Permutation x_1 in x_2 überführt, nämlich derjenige Charakter χ mit $\chi(1) = \zeta_2\zeta_1^{-1}$.

Bei $K = \mathbb{Q}$ und $L = \mathbb{Q}[i] = \mathbb{Q}[X]/(X^2+1)$ sind $M = \{i, -i\}$ die beiden Nullstellen und der nichtkonstante Charakter vertauscht die beiden Nullstellen. Wegen $2! = 2$ rührt jede Permutation von einem Automorphismus bzw. einem Charakter her.

Bei $K = \mathbb{Q}[i]$ und $X^4 - 3 \in K[X]$ ist $L = K[X]/(X^4-3)$ eine $\mathbb{Z}/(4)$-graduierte Körpererweiterung. Die vier Nullstellen sind $\sqrt[4]{3}$, $-\sqrt[4]{3}$, $i\sqrt[4]{3}$ und $-i\sqrt[4]{3}$. Die Irreduzibilität von $X^4 - 3$ ergibt sich dadurch, dass das Produkt von je zwei Linearfaktoren nicht zu $K[X]$ gehört. Jeder Charakter χ ist durch $\chi(1)$ bestimmt und die zugehörige Permutation ist die Multiplikation mit $\chi(1)$. Bei $\chi(1) = -1$ ist das die Permutation $1 \leftrightarrow -1$, $i \leftrightarrow -i$, bei $\chi(1) = i$ ist das die Permutation $1 \to i \to -1 \to -i$ und bei $\chi(1) = -i$ ist das die Permutation $1 \to -i \to -1 \to i$. Unter den 24 Permutationen rühren also nur 4 von einem Charakter her, eine Permutation wie $1 \leftrightarrow 1$, $-1 \leftrightarrow -1$, und $i \leftrightarrow -i$ z.B. nicht.

14. Vorlesung

14.1. **Normale Körpererweiterungen.**

Definition 14.1. Eine Körpererweiterung $K \subseteq L$ heißt *normal*, wenn es zu jedem $x \in L$ ein Polynom $F \in K[X]$, $F \neq 0$, mit $F(x) = 0$ gibt, das über L zerfällt.

Eine normale Körpererweiterung ist insbesondere algebraisch. Wir werden gleich noch dazu äquivalente Eigenschaften kennenlernen. Einfache Eigenschaften von normalen Erweiterungen werden im folgenden Lemma zusammengefasst.

Lemma 14.2.

(1) *Die Identität ist eine normale Körpererweiterung.*
(2) *Jede quadratische Körpererweiterung ist normal.*
(3) *Wenn $K \subseteq L$ eine normale Körpererweiterung ist und $K \subseteq M \subseteq L$ ein Zwischenkörper, so ist auch $M \subseteq L$ normal.*
(4) *Eine Erweiterung von endlichen Körpern ist normal.*

Beweis. (1) ist trivial. (2). Sei $x \in L$ mit dem Minimalpolynom F, das den Grad 1 oder 2 besitzt. In $L[X]$ besitzt F einen Linearfaktor, der andere Faktor ist wegen der Gradbedingung konstant oder auch ein Linearfaktor. (3). Zu jedem $x \in L$ gibt es ein Polynom $F \in K[X]$, $F \neq 0$, mit $F(x) = 0$, das über $L[X]$ zerfällt. Wegen $K[X] \subseteq M[X]$ gilt diese Eigenschaft auch für $M \subseteq L$. (4). Nach (3) können wir sofort eine Körpererweiterung

$$\mathbb{Z}/(p) \subseteq \mathbb{F}_q$$

mit einer Primzahl p und einer Primzahlpotenz $q = p^e$ betrachten. Jedes Element $x \in \mathbb{F}_q$ ist nach dem Satz von Lagrange eine Nullstelle des Polynoms $X^q - X$, so dass dieses Polynom über $\mathbb{F}_q$ zerfällt. □

Satz 14.3. *Sei $K \subseteq L$ eine endliche Körpererweiterung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

(1) *Die Körpererweiterung ist normal.*
(2) *Wenn ein irreduzibles Polynom $P \in K[X]$ eine Nullstelle in L besitzt, so zerfällt es in $L[X]$.*
(3) *Es gibt ein K-Algebra-Erzeugendensystem $x_i \in L$, $i \in I$, von L und über L zerfallende Polynome $F_i \in K[X]$, $F_i \neq 0$, $i \in I$, mit $F_i(x_i) = 0$.*
(4) *Für jede Körpererweiterung $L \subseteq M$ und jeden K-Algebra-Homomorphismus*
$$\varphi : L \longrightarrow M$$
ist $\varphi(L) \subseteq L$.

Beweis. (1) $\Rightarrow$ (2). Sei $P \in K[X]$ irreduzibel und $P(x) = 0$. Dann ist P nach Lemma 7.12 das Minimalpolynom zu x. Nach (1) gibt es ein über L zerfallendes Polynom F mit $F(x) = 0$. Da F ein Vielfaches von P ist, muss auch P über L zerfallen. (2) $\Rightarrow$ (1). Zu $x \in L$ gehört das Minimalpolynom P, das nach Lemma 7.12 irreduzibel ist und nach Voraussetzung (2) in Linearfaktoren zerfällt. (2) $\Rightarrow$ (3). Die Familie aller Elemente mit ihren Minimalpolynomen besitzt diese Eigenschaft. (3) $\Rightarrow$ (4). Seien $L \subseteq M$ und $\varphi : L \to M$ gegeben. Sei $x_i \in L$ ein Element aus der erzeugenden Familie und sei $F_i \neq 0$ das zugehörige zerfallende Polynom mit $F_i(x) = 0$, das wir als irreduzibel annehmen dürfen. Es ist

$$F_i(\varphi(x_i)) \;=\; \varphi(F_i(x_i)) \;=\; \varphi(0) \;=\; 0,$$

daher ist $\varphi(x_i) \in M$ eine Nullstelle des über L zerfallenden Polynoms F_i. Das heißt aber, dass $\varphi(x_i) \in L$ ist. Diese Zugehörigkeit gilt dann für alle $x \in L$, da sie für ein Algebra-Erzeugendensystem gilt. (4) $\Rightarrow$ (2). Sei $P \in K[X]$ irreduzibel und sei $x \in L$ mit $P(x) = 0$. Wir können nach Lemma 7.12 annehmen, dass P das Minimalpolynom von x ist. Wir setzen $x_1 = x$ und ergänzen dies zu einem K-Algebra-Erzeugendensystem von L, sagen wir

$$L = K[x_1, \ldots, x_n]\,.$$

Es seien $P_1 = P, P_2, \ldots, P_n$ die Minimalpolynome von x_i über K. Wir betrachten das Produkt $F = P_1 \cdots P_n$ und den Zerfällungskörper M von F über L, der zugleich der Zerfällungskörper über K ist. Sei $y \in M$ eine Nullstelle von P. Wir müssen $y \in L$ zeigen. Es gibt einen K-Isomorphismus

$$\varphi : K[x] \cong K[X]/(P) \longrightarrow K[y]$$

mit $\varphi(x) = y$. Der Körper M ist der Zerfällungskörper von F über $K[x]$ als auch über $K[y]$. Daher gibt es nach Satz 11.5 ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} K[x] & \stackrel{\varphi}{\longrightarrow} & K[y] \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \stackrel{\tilde{\varphi}}{\longrightarrow} & M \end{array}$$

mit einem K-Isomorphismus $\tilde{\varphi}$. Nach Voraussetzung ist dabei $\tilde{\varphi}(L) \subseteq L$, also ist $y = \varphi(x) \in L$. □

Bemerkung 14.4. Insbesondere die zweite Eigenschaft von Satz 14.3 zeigt, dass es sich hierbei um eine recht starke Eigenschaft handelt. Wenn man mit einem Primpolynom $P \in K[X]$ startet und sich den Restklassenkörper $L = K[X]/(P)$ anschaut, so besitzt P in L eine Nullstelle, nämlich die Restklasse x von X. Daher gilt in $L[X]$ die Beziehung $P = (X-x)Q$ mit einem Polynom $Q \in L[X]$. Es gibt aber keinen allgemeinen Grund, warum Q über L in Linearfaktoren zerfallen sollte.

Wir setzen weiterhin voraus, dass eine endliche Körpererweiterung vorliegt. Dann sind die normalen Körpererweiterungen genau die Zerfällungskörper von Polynomen.

Satz 14.5. *Sei $K \subseteq L$ eine endliche Körpererweiterung. Dann ist $K \subseteq L$ genau dann eine normale Körpererweiterung, wenn L Zerfällungskörper eines Polynoms $F \in K[X]$ ist.*

Beweis. Sei $K \subseteq L$ normal. Wegen der vorausgesetzten Endlichkeit ist $L = K[x_1, \ldots, x_n]$. Zu x_i sei $F_i \in K[X]$ das Minimalpolynom. Wegen der Normalität zerfällt jedes F_i in $L[X]$ in Linearfaktoren. Daher ist L der Zerfällungskörper des Produktes $F = F_1 \cdots F_n$. Sei nun $L = Z(F)$ ein Zerfällungskörper, und sei $F = (X-\alpha_1)\cdots(X-\alpha_n)$ die Faktorzerlegung zu den Nullstellen $\alpha_i \in L$, die den Körper L erzeugen. Wir werden das Kriterium Satz 14.3 (4) anwenden. Sei also $L \subseteq M$ eine Körpererweiterung und sei

$$\varphi : L \longrightarrow M$$

ein K-Algebra-Homomorphismus. Es ist dann

$$F(\varphi(\alpha_i)) \;=\; \varphi(F(\alpha_i)) \;=\; 0,$$

da sich die Koeffizienten von F nicht ändern (vergleiche Lemma 8.15), und somit gehört $\varphi(\alpha_i)$ zur Nullstellenmenge $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ und damit insbesondere zu L. Daher gilt generell $\varphi(L) \subseteq L$. □

Korollar 14.6. *Sei $K \subseteq L$ eine endliche normale Körpererweiterung und M, $K \subseteq M \subseteq L$, ein Zwischenkörper. Es sei $\varphi : M \to L$ ein K-Algebra-Homomorphismus. Dann besitzt φ eine Fortsetzung zu einem Automorphismus auf L.*

Beweis. Aufgrund von Satz 14.5 wissen wir, dass L der Zerfällungskörper eines Polynoms $F \in K[X]$ ist. L ist auch der Zerfällungskörper von $F \in$

$M[X]$. Sei $M' = \varphi(M)$ das isomorphe Bild von M in L unter φ. Somit ist L auch der Zerfällungskörper von $F \in M'[X]$. Daher gibt es nach Satz 11.5 einen Isomorphismus $\tilde{\varphi} : L \to L$, der mit den Abbildungen $M \to L$ und $M \xrightarrow{\varphi} M' \to L$ verträglich ist. □

Korollar 14.7. *Sei $K \subseteq L$ eine endliche normale Körpererweiterung und es seien $\alpha, \beta \in L$. Dann sind α und β genau dann konjugiert, wenn es einen K-Automorphismus $\varphi : L \to L$ mit $\varphi(\alpha) = \beta$ gibt.*

Beweis. Wenn es einen K-Automorphismus φ mit $\varphi(\alpha) = \beta$ gibt, so induziert dieser einen Isomorphismus $K[\alpha] \to K[\beta]$. Da diese erzeugten Unterkörper jeweils durch die Minimalpolynome von α bzw. β festgelegt sind, müssen die Minimalpolynome übereinstimmen. Also sind α und β konjugiert. Wenn umgekehrt[13] die beiden Elemente konjugiert sind, so gibt es einen K-Isomorphismus $K[\alpha] \to K[\beta]$. Mit der Inklusion $K[\beta] \subseteq L$ führt dies zu einem K-Homomorphismus

$$K[\alpha] \longrightarrow L,$$

den man nach Korollar 14.6 zu einem Automorphismus auf L fortsetzen kann. □

Korollar 14.8. *Sei $K \subseteq L$ eine endliche normale Körpererweiterung und sei M, $K \subseteq M \subseteq L$, ein Zwischenkörper. Dann ist $K \subseteq M$ genau dann normal, wenn für jeden K-Algebra-Automorphismus*

$$\varphi : L \longrightarrow L$$

die Beziehung $\varphi(M) \subseteq M$ gilt.

Beweis. Wenn $K \subseteq M$ normal ist, so gilt die Homomorphismuseigenschaft aufgrund von Satz 14.3. Zur Umkehrung verwenden wir das Kriterium Satz 14.3. Sei also $P \in K[X]$ ein irreduzibles (normiertes) Polynom, das in M eine Nullstelle, sagen wir α, besitzt. Dieses Polynom zerfällt über L in Linearfaktoren, und wir müssen zeigen, dass die zugehörigen Nullstellen zu M gehören. Sei $\beta \in L$ eine weitere Nullstelle von P. Wegen der Irreduzibilität und Lemma 7.12 ist P das Minimalpolynom von α und auch von β, d.h. die beiden Elemente sind konjugiert. Nach Korollar 14.7 gibt es daher einen K-Automorphismus $\varphi : L \to L$ mit $\varphi(\alpha) = \beta$. Nach Voraussetzung ist $\beta \in M$. □

Beispiel 14.9. Wir betrachten die Körperkette $\mathbb{Q} \subseteq M \subseteq L$, wobei $M = \mathbb{Q}(\sqrt{3})$ und $L = M(\sqrt{1+\sqrt{3}})$ ist. Das sind zwei quadratische Körpererweiterungen, die beide nach Lemma 14.2 normal sind. Wir setzen $u = \sqrt{1+\sqrt{3}}$, und dieses Element erzeugt L über $\mathbb{Q}$. Wir können L als einen Unterkörper

[13] Die Umkehrung folgt auch aus Satz 13.2.

von $\mathbb{R}$ auffassen, indem wir für $\sqrt{3}$ und dann für $\sqrt{1+\sqrt{3}}$ die positiven reellen Wurzeln wählen. Wir haben

$$u^4 - 2u^2 - 2 = (u^2-1)^2 - 3 = 0,$$

d.h. das Polynom X^4-2X^2-2 wird von u annuliert. Dieses Polynom besitzt über L die Zerlegung

$$\begin{aligned} X^4 - 2X^2 - 2 &= (X^2-1)^2 - 3 \\ &= (X^2 - 1 - \sqrt{3})(X^2 - 1 + \sqrt{3}) \\ &= (X^2 - u^2)(X^2 - 1 + \sqrt{3}) \\ &= (X-u)(X+u)(X^2 - 1 + \sqrt{3}). \end{aligned}$$

Wegen $L \subseteq \mathbb{R}$ und $\sqrt{3} - 1 > 0$ ist das hintere quadratische Polynom über L unzerlegbar. Dieses Polynom zerfällt also über L nicht in Linearfaktoren und somit ist $\mathbb{Q} \subseteq L$ nicht normal.

15. Vorlesung

15.1. **Fixkörper.**

Definition 15.1. Es sei L ein Körper und $H \subseteq \mathrm{Aut}\,(L)$ eine Untergruppe der Automorphismengruppe von L. Dann heißt

$$\mathrm{Fix}\,(H) = \{x \in L | \, \varphi(x) = x \text{ für alle } \varphi \in H\}$$

der *Fixkörper* zu H.

Es ist unmittelbar klar, dass es sich dabei um einen Unterkörper von L handelt. Dies gilt auch dann, wenn H eine beliebige Menge von Ringhomomorphismen ist, die nicht notwendigerweise bijektiv sein müssen.

Lemma 15.2. *Es sei L ein Körper und $G = \mathrm{Aut}\,(L)$ die Automorphismengruppe von L. Dann gelten folgende Eigenschaften.*

(1) *Für Untergruppen $H_1 \subseteq H_2 \subseteq G$ ist $\mathrm{Fix}\,(H_1) \supseteq \mathrm{Fix}\,(H_2)$.*
(2) *Für Unterkörper $M_1 \subseteq M_2 \subseteq L$ ist $\mathrm{Gal}\,(L|M_1) \supseteq \mathrm{Gal}\,(L|M_2)$.*
(3) *Für eine Untergruppe $H \subseteq G$ ist $H \subseteq \mathrm{Gal}\,(L|\,\mathrm{Fix}\,(H))$.*
(4) *Für einen Unterkörper $M \subseteq L$ ist $M \subseteq \mathrm{Fix}\,(\mathrm{Gal}\,(L|M))$.*

Beweis. Siehe Aufgabe 15.3. □

Bemerkung 15.3. Zur trivialen Untergruppe $\{\mathrm{id}\} \subseteq \mathrm{Aut}\,(L)$ gehört der Fixkörper L, und für jede andere Untergruppe ist der Fixkörper ein echter Unterkörper. Den Fixkörper zur gesamten Automorphismengruppe kann man dagegen nicht einfach charakterisieren (es ist nicht immer der Primkörper).

15.2. **Charakterisierung von Galoiserweiterungen.**

Wir streben eine umfassende Charakterisierung von Galoiserweiterungen an, was einige Vorbereitungen erfordert.

Lemma 15.4. *Es sei L ein Körper und sei $H \subseteq \mathrm{Aut}\,(L)$ eine endliche Untergruppe der Automorphismengruppe von L. Es sei $K = \mathrm{Fix}\,(H)$. Dann ist $K \subseteq L$ eine algebraische Körpererweiterung, die normal und separabel ist. Für jedes $x \in L$ ist der Grad des Minimalpolynoms von x maximal gleich $\#(H)$.*

Beweis. Sei $x \in L$ fixiert. Wir betrachten die endliche Menge

$$M = \{\varphi(x) |\, \varphi \in H\} = \{x_1, \ldots, x_n\}\,,$$

wobei $x_1 = x$ sei. Wir setzen

$$F \;=\; (X-x_1)(X-x_2)\cdots(X-x_n) \;=\; a_0+a_1X+a_2X^2+\ldots+a_{n-1}X^{n-1}+X^n$$

($\in L[X]$). Es ist $F(x) = 0$. Wir zeigen zuerst, dass die Koeffizienten a_i dieses Polynoms zu K gehören. Sei dazu $\varphi \in H$. Dann ist

$$\sum_{i=0}^{n} \varphi(a_i)X^i \;=\; \prod_{i=1}^{n}(X-\varphi(x_i)) \;=\; \prod_{i=1}^{n}(X-x_i) \;=\; \sum_{i=0}^{n} a_iX^i.$$

Daher ist $\varphi(a_i) = a_i$. Somit gehören die Koeffizienten zum Fixkörper $K = \mathrm{Fix}\,(H)$ und daher ist $F \in K[X]$. Dies bedeutet, dass x algebraisch über K ist, und dass sein Minimalpolynom einen Grad

$$\leq \mathrm{Grad}\,(F) \;=\; n \;=\; \#(M) \;\leq\; \#(H)$$

besitzt. Da F über L in Linearfaktoren zerfällt, und da alle Nullstellen von F einfach sind, ist die Erweiterung normal und separabel. □

Emil Artin (1898-1962)

Der folgende Satz heißt *Satz von Artin.*

Satz 15.5. *Es sei L ein Körper und sei $H \subseteq \operatorname{Aut}(L)$ eine endliche Untergruppe der Automorphismengruppe von L. Es sei $K = \operatorname{Fix}(H)$. Dann ist*

$$\operatorname{grad}_K L = \#(H).$$

Insbesondere ist $K \subseteq L$ eine Galoiserweiterung mit Galoisgruppe H.

Beweis. Nehmen wir an, dass $\#(H) < \operatorname{grad}_K L$ ist. Wir können annehmen, dass L endlich über K ist, da wir L durch einen (über K endlichen) Zwischenkörper der Form $K[\varphi(x_i), \varphi \in H,\, i = 1, \ldots, n]$ mit beliebig hohem Grad ersetzen können. Nach Lemma 15.4 ist die Körpererweiterung separabel und nach dem Satz vom primitiven Element kann man $L = K[x]$ schreiben. Dabei ist der Grad des Minimalpolynoms von x gleich dem Grad der Körpererweiterung, so dass sich ein Widerspruch zu Lemma 15.4 ergibt. Also ist $K \subseteq L$ eine endliche Körpererweiterung mit $\#(H) \geq \operatorname{grad}_K L$. Nach Satz 13.5 muss hierbei Gleichheit gelten. Die Inklusion $H \subseteq \operatorname{Gal}(L|K)$ ist trivial. Da H nach Satz 13.5 schon die maximal mögliche Anzahl von Automorphismen enthält, gilt hier Gleichheit. □

Der nächste Satz fasst die verschiedenen Charakterisierungen einer Galoiserweiterung zusammen.

Satz 15.6. *Sei $K \subseteq L$ eine endliche Körpererweiterung und sei $G = \operatorname{Gal}(L|K)$ die Galoisgruppe. Dann sind folgende Eigenschaften äquivalent.*

(1) *Die Körpererweiterung $K \subseteq L$ ist eine Galoiserweiterung.*
(2) *Es ist $\operatorname{Fix}(G) = K$.*
(3) *Die Körpererweiterung $K \subseteq L$ ist normal und separabel.*
(4) *L ist Zerfällungskörper eines separablen Polynoms $F \in K[X]$.*

Beweis. Zum Beweis der Implikation von (1) nach (2) betrachten wir die Körperkette $K \subseteq \operatorname{Fix}(G) \subseteq L$. Nach der Gradformel und da eine Galoiserweiterung vorliegt ist

$$\operatorname{grad}_K \operatorname{Fix}(G) \cdot \operatorname{grad}_{\operatorname{Fix}(G)} L = \operatorname{grad}_K L = \#(G).$$

Nach dem Satz von Artin ist $\operatorname{grad}_{\operatorname{Fix}(G)} L = \#(G)$, also ist $\operatorname{grad}_K \operatorname{Fix}(G) = 1$ und somit $K = \operatorname{Fix}(G)$. Die Implikation von (2) nach (3) folgt aus Lemma 15.4. Die Äquivalenz von (3) und (4) ergibt sich sofort aus Satz 14.5. Sei nun (3) erfüllt. Wir schreiben $L = K[x_1, \ldots, x_m]$. Die Minimalpolynome $F_i \in K[X]$ der x_i zerfallen wegen der Normalität in $L[X]$ in Linearfaktoren. Daher können wir Lemma 12.6 mit $M = L$ anwenden und erhalten $n = \operatorname{grad}_K L$ Einbettungen von L nach L (über K), und somit besitzt die Galoisgruppe n Elemente. □

Korollar 15.7. *Es sei $K \subseteq L$ eine endliche Galoiserweiterung und M, $K \subseteq M \subseteq L$, ein Zwischenkörper. Dann ist auch $M \subseteq L$ eine Galoiserweiterung.*

Beweis. Nach Lemma 14.2 ist $M \subseteq L$ eine normale Körpererweiterung. Nach Lemma 12.4 ist sie auch separabel. Somit handelt es sich aufgrund von Satz 15.6 um eine Galoiserweiterung. □

15.3. **Endliche Körper als Galoiserweiterung.**

Wir besprechen zuerst endliche Körper im Rahmen der Galoistheorie.

Ferdinand Georg Frobenius (1849-1917)

Definition 15.8. Sei R ein kommutativer Ring, der einen Körper der positiven Charakteristik $p > 0$ enthalte. Der *Frobenius-Homomorphismus* ist der Ringhomomorphismus

$$R \longrightarrow R,\ f \longmapsto f^p.$$

Zu jeder Primzahl p und jedem Exponenten m gibt es nach Satz 11.9 einen eindeutig bestimmten endlichen Körper mit p^m Elementen.

Lemma 15.9. *Sei L ein endlicher Körper der Charakteristik p. Dann ist der Frobenius-Homomorphismus*

$$\Phi : L \longrightarrow L,\ x \longmapsto x^p,$$

ein Automorphismus, dessen Fixkörper $\mathbb{Z}/(p)$ ist.

Beweis. Der Frobenius-Homomorphismus ist stets ein Ringhomomorphismus. Die Injektivität ergibt sich aus Korollar 13.17, und daraus ergibt sich die Surjektivität wegen der Endlichkeit aus Lemma 3.14 (Mathematik (Osnabrück 2009-2011)) . Wegen $\Phi(1) = 1$ werden die Elemente aus $\mathbb{Z}/(p)$ auf sich selbst abgebildet. Daher gibt es p Elemente in K mit $x^p = x$. Mehr kann es wegen Korollar Anhang 1.5 nicht geben. □

Satz 15.10. *Es sei p eine Primzahl und $m \in \mathbb{N}$, $q = p^m$. Dann ist die Körpererweiterung $\mathbb{F}_p \subseteq \mathbb{F}_q$ eine Galoiserweiterung mit einer zyklischen Galoisgruppe der Ordnung m, die vom Frobenius-Homomorphismus erzeugt wird.*

Beweis. Es sei

$$\Phi : \mathbb{F}_q \longrightarrow \mathbb{F}_q$$

der Frobenius-Homomorphismus, der nach Lemma 15.9 ein $\mathbb{F}_p$-Automorphismus ist. Daher sind auch die Iterationen Φ^k Automorphismen, und zwar gilt

$$\Phi^k(x) = x^{p^k}.$$

Bei $k = m$ ist nach Korollar 4.17 $x^{p^m} = x$ für alle $x \in \mathbb{F}_q$, also ist $\Phi^m = \mathrm{id}$. Für $k < m$ kann Φ^k nicht die Identität sein, da dies sofort Korollar Anhang 1.5 widersprechen würde. Also gibt es m verschiedene Potenzen des Frobenius-Automorphismus. Nach Satz 13.5 kann es keine weiteren Automorphismen geben und die Körpererweiterung ist galoissch mit der vom Frobenius erzeugten Gruppe als Galoisgruppe. □

Korollar 15.11. *Es sei p eine Primzahl und $m, n \in \mathbb{N}_+$. Es seien K und L endliche Körper mit p^m bzw. p^n Elementen. Dann ist K genau dann ein Unterkörper von L, wenn m ein Teiler von n ist. In diesem Fall ist $K \subseteq L$ eine Galoiserweiterung vom Grad n/m mit einer zyklischen Galoisgruppe der Ordnung n/m, die von der m-ten Iteration des Frobenius erzeugt wird.*

Beweis. Sei $q = p^m$. Wenn K ein Unterkörper von L ist, so ist L ein K-Vektorraum einer gewissen endlichen Dimension. Daher muss die Elementanzahl eine Potenz von q sein. Aus

$$p^n = q^k = (p^m)^k = p^{mk}$$

ergibt sich sofort, dass n ein Vielfaches von m ist. Sei umgekehrt m ein Teiler von n. Die Frobeniusiteration Φ^m auf L erzeugt eine Untergruppe H der nach Satz 15.10 zyklischen Galoisgruppe von $\mathbb{F}_p \subseteq L$. Die Ordnung von H ist n/m. Es sei $M = \mathrm{Fix}\,(H) \subseteq L$ der zugehörige Fixkörper. Dann besitzt die Körpererweiterung $M \subseteq L$ nach Korollar 15.7 den Grad n/m und somit besitzt $\mathbb{F}_p \subseteq M$ den Grad m. Daher besitzt M gerade p^m Elemente und ist daher wegen Satz 11.9 isomorph zu K. □

16. Vorlesung

16.1. **Die Galoiskorrespondenz.**

Der folgende Satz heißt auch *Hauptsatz der Galoistheorie* oder *Satz über die Galoiskorrespondenz*. Er stiftet eine unmittelbare Beziehung zwischen den Zwischenkörpern einer endlichen Galoiserweiterung und Untergruppen der Galoisgruppe. Er bildet die Grundlage dafür, gruppentheoretische Aussagen auf Körpererweiterungen anzuwenden.

Satz 16.1. *Es sei $K \subseteq L$ eine endliche Galoiserweiterung mit der Galoisgruppe $G = \mathrm{Gal}\,(L|K)$. Dann sind die Zuordnungen*

$$M \longmapsto \mathrm{Gal}\,(L|M) \text{ und } H \longmapsto \mathrm{Fix}\,(H)$$

zueinander inverse Abbildungen zwischen der Menge der Zwischenkörper M, $K \subseteq M \subseteq L$, und der Menge der Untergruppen von G. Bei dieser Korrespondenz werden die Inklusionen umgekehrt.

Beweis. Diese Abbildungen sind wohldefiniert und kehren nach Lemma 15.2 die Inklusion um. Sei M ein Zwischenkörper. Nach Korollar 15.7 ist $M \subseteq L$ eine Galoiserweiterung, also ist $\mathrm{Fix}\,(\mathrm{Gal}\,(L|M)) = M$ nach Satz 15.6. Sei nun H vorgegeben mit dem Fixkörper $M = \mathrm{Fix}\,(H)$. Nach dem Satz von Artin ist $M \subseteq L$ eine Galoiserweiterung mit Galoisgruppe $H = \mathrm{Gal}\,(L|M)$. □

Für einen Automorphismus $\varphi \in \mathrm{Gal}\,(L|K)$ und einen Zwischenkörper M, $K \subseteq M \subseteq L$, ist $M' = \varphi(M)$ wieder ein Zwischenkörper, der zu M K-isomorph ist. Zwischen den zugehörigen Galoisgruppen $\mathrm{Gal}\,(L|M)$ und $\mathrm{Gal}\,(L|M')$ gilt die folgende Beziehung.

Satz 16.2. *Es sei $K \subseteq L$ eine endliche Galoiserweiterung und sei M, $K \subseteq M \subseteq L$, ein Zwischenkörper. Es sei $\psi \in G = \mathrm{Gal}\,(L|K)$ und $M' = \psi(M)$. Dann gilt in der Galoisgruppe G die Beziehung*

$$\mathrm{Gal}\,(L|M') \;=\; \psi\,\mathrm{Gal}\,(L|M)\psi^{-1}.$$

Beweis. Sei $\varphi \in \mathrm{Gal}\,(L|M')$. Wir schreiben $\varphi = \psi(\psi^{-1}\varphi\psi)\psi^{-1}$ und müssen zeigen, dass $\psi^{-1}\varphi\psi$ zu $\mathrm{Gal}\,(L|M)$ gehört. Sei dazu $x \in M$. Dann ist

$$(\psi^{-1}\varphi\psi)(x) \;=\; \psi^{-1}(\varphi(\psi(x))).$$

Dabei gehört $\psi(x) \in M'$ und somit ist $\varphi(\psi(x)) = \psi(x)$. Also ist

$$\psi^{-1}(\varphi(\psi(x))) \;=\; \psi^{-1}(\psi(x)) \;=\; x.$$

Die umgekehrte Inklusion ergibt sich genauso bzw. folgt direkt daraus, dass beide Gruppen die gleiche Anzahl besitzen. □

Korollar 16.3. *Es sei $K \subseteq L$ eine endliche Galoiserweiterung und sei M, $K \subseteq M \subseteq L$, ein Zwischenkörper. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

(1) *Für alle $\psi \in \mathrm{Gal}\,(L|K)$ ist $\psi(M) = M$.*
(2) *Die Untergruppe $\mathrm{Gal}\,(L|M) \subseteq \mathrm{Gal}\,(L|K)$ ist nur zu sich selbst konjugiert.*

Beweis. Siehe Aufgabe 16.12. □

Wir wissen bereits, dass bei einer Galoiserweiterung $K \subseteq L$ und einen Zwischenkörper $K \subseteq M \subseteq L$ auch die hintere Erweiterung $M \subseteq L$ galoissch ist. Die Erweiterung $K \subseteq M$ muss hingegen nicht galoisch sein, vielmehr liefert die folgende Aussage ein Kriterium.

Satz 16.4. *Es sei $K \subseteq L$ eine endliche Galoiserweiterung und M, $K \subseteq M \subseteq L$, ein Zwischenkörper. Dann gelten folgende Aussagen.*

(1) *Die Körpererweiterung $K \subseteq M$ ist genau dann eine Galoiserweiterung, wenn die Untergruppe $\mathrm{Gal}\,(L|M) \subseteq \mathrm{Gal}\,(L|K)$ ein Normalteiler ist.*
(2) *Sei $K \subseteq M$ eine Galoiserweiterung. Dann besteht zwischen den Galoisgruppen die natürliche Restklassenbeziehung*

$$\mathrm{Gal}\,(M|K) \;=\; \mathrm{Gal}\,(L|K)/\,\mathrm{Gal}\,(L|M).$$

Bei dieser Zuordnung wird ein Automorphismus $\varphi \in \mathrm{Gal}\,(L|K)$ auf M eingeschränkt.

Beweis. (1). Da die Körpererweiterung $K \subseteq M$ separabel ist, muss aufgrund von Satz 15.6 nur die Normalität betrachtet werden. Nach Satz 14.3 ist die Körpererweiterung $K \subseteq M$ genau dann normal, wenn jeder K-Automorphismus von L den Unterkörper M in sich selbst überführt. Dies ist wegen Korollar 16.3 genau dann der Fall, wenn $\mathrm{Gal}\,(L|M)$ unter jeder Konjugation auf sich selbst abgebildet wird, also ein Normalteiler ist. (2). Sei nun $K \subseteq M$ normal. Dann ist $\varphi(M) = M$ für jedes $\varphi \in \mathrm{Gal}\,(L|K)$ und somit gibt es eine natürliche Abbildung

$$\mathrm{Gal}\,(L|K) \longrightarrow \mathrm{Gal}\,(M|K),\ \varphi \longmapsto \varphi|_M.$$

Diese ist offensichtlich ein Gruppenhomomorphismus. Aufgrund von Satz 14.3 gibt es für einen Automorphismus $\psi \in \mathrm{Gal}\,(M|K)$ eine Fortsetzung zu einem Automorphismus $\tilde{\psi} \in \mathrm{Gal}\,(L|K)$. Daher ist der Gruppenhomomorphismus surjektiv. Der Kern davon ist offenbar $\mathrm{Gal}\,(L|M)$, so dass sich die behauptete Isomorphie aus Korollar 5.10 ergibt. □

16.2. **Beispiele zur Galoiskorrespondenz.**

Die zuletzt genannte Aussage ist natürlich im Fall, dass eine Galoiserweiterung mit abelscher Galoisgruppe vorliegt, unmittelbar anwendbar. In dieser Situation ist also jeder Zwischenkörper über dem Grundkörper galoissch.

Beispiel 16.5. Es sei $\mathbb{F}_p \subseteq \mathbb{F}_q$ mit $q = p^n$ eine Körpererweiterung endlicher Körper. Nach Satz 15.10 ist dies eine Galoiserweiterung mit zyklischer Galoisgruppe der Ordnung m, die vom Frobenius-Homomorphismus Φ erzeugt wird. Die Galoisgruppe ist also isomorph zu $\mathbb{Z}/(n)$. Die Untergruppen von $\mathbb{Z}/(n)$ sind von der Form

$$H = \langle m \rangle = \{0, m, 2m, \ldots, (k-1)m\}$$

mit einem Teiler m von n, wobei $k = \frac{n}{m}$ die Ordnung der Untergruppe ist. Der zugehörige Fixkörper ist der Fixkörper zu Φ^m, der nach Korollar 15.11 isomorph zu $\mathbb{F}_{p^m}$ ist, und H ist die Galoisgruppe von $\mathbb{F}_{p^m} \subseteq \mathbb{F}_{p^n}$.

Zu jeder Untergruppe $H = \langle m \rangle$ gibt es die Restklassenabbildung

$$\mathbb{Z}/(n) \longrightarrow (\mathbb{Z}/(n))/H \cong \mathbb{Z}/(m).$$

Gemäß Satz 16.4 ist die Restklassengruppe dabei die Galoisgruppe von $\mathbb{F}_p \subseteq \mathbb{F}_{p^m}$, und der Frobenius Φ von $\mathbb{F}_{p^n}$ wird dabei auf den Frobenius von $\mathbb{F}_{p^m}$ eingeschränkt.

Insbesondere hängen die Anzahl und die Inklusionsbeziehungen der Zwischenkörper von $\mathbb{F}_p \subseteq \mathbb{F}_{p^n}$ nur von n und nicht von der Primzahl ab.

Proposition 16.6. *Es sei K ein Körper, D eine endliche kommutative Gruppe und $K \subseteq L$ eine D-graduierte Körpererweiterung. Der Körper K enthalte eine m-te primitive Einheitswurzel, wobei m der Exponent von D sei. Dann ist jeder Zwischenkörper M, $K \subseteq M \subseteq L$, von der Form $M = \bigoplus_{d \in E} L_d$ mit einer eindeutig bestimmten Untergruppe $E \subseteq D$.*

Beweis. Die Körpererweiterung $K \subseteq L$ ist nach Satz 13.9 eine Galoiserweiterung mit Galoisgruppe $G = \operatorname{Char}(D, K)$. Da K hinreichend viele Einheitswurzeln besitzt, entsprechen sich die Untergruppen von D und von G über die Charakter-Korrespondenz

$$E \longmapsto E^\perp = \{\chi \in G | \, \chi(d) = 1 \text{ für alle } d \in E\}$$

und

$$H \longmapsto H^\perp = \{d \in D | \, \chi(d) = 1 \text{ für alle } \chi \in H\}.$$

Zu jeder Untergruppe $E \subseteq D$ ist $\bigoplus_{d \in E} L_d$ ein Zwischenkörper. Da wegen der Galoiskorrespondenz die Anzahl der Zwischenkörper mit der Anzahl der Untergruppen der Galoisgruppe, und diese mit der Anzahl der Untergruppen in D übereinstimmt, ist jeder Zwischenkörper graduiert. □

Zu einer Untergruppe $H \subseteq G$ ist dabei

$$\operatorname{Fix}(H) = \bigoplus_{d \in H^\perp} L_d,$$

und zu einem Unterkörper $M = L_E = \bigoplus_{d \in E} L_d$ ist

$$\operatorname{Gal}(L|M) = E^\perp = \{\chi \in D^\vee | \, \chi(d) = 1 \text{ für alle } d \in E\}.$$

Die Galoisgruppe von $M = L_E$ über K ist gleich

$$\operatorname{Gal}(M|K) = E^\vee = D^\vee / E^\perp.$$

Die bijektive Beziehung zwischen Zwischenkörpern und Untergruppen der graduierenden Gruppe im Galoisfall wird manchmal auch als *Kogaloiskorrespondenz* bezeichnet. Bei ihr werden Inklusionen erhalten und drehen sich nicht wie bei der Galoiskorrespondenz um (bei der Bijektion zwischen Untergruppen und ihrem Charakterdual drehen sich die Inklusionen um).

Beispiel 16.7. Wir knüpfen an Beispiel 9.14 an. Aufgrund von Satz 13.9 liegt eine Galoiserweiterung vor. Die graduierende Gruppe ist $D = \mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(2)$. Neben der trivialen Untergruppe und D selbst gibt es noch die drei Untergruppen $\{(0,0),(1,0)\}$, $\{(0,0),(0,1)\}$, $\{(0,0),(1,1)\}$, die den Zwischenkörpern

$$\mathbb{Q},\ \mathbb{Q}(\sqrt{2}),\ \mathbb{Q}(\sqrt{3}),\ \mathbb{Q}(\sqrt{6}),\ L$$

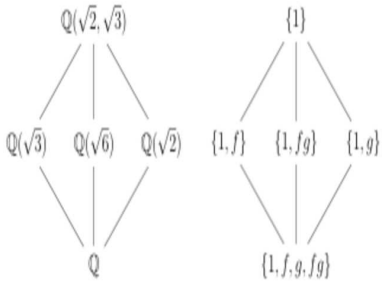
entsprechen. Wegen Proposition 16.6 gibt es keine weiteren Zwischenkörper. Die Galoisgruppe ist $G = D^\vee \cong \mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(2)$. Zur Untergruppe $E = \{(0,0),(1,0)\} \subseteq D$ gehört dabei $E^\perp$ (das der Galoisgruppe $\mathrm{Gal}\,(E|L_E)$ entspricht), das aus dem konstanten Charakter und der Abbildung

$$\chi : D \longrightarrow \mathbb{Q}^\times$$

besteht, die E auf 1 und $D \setminus E$ auf -1 abbildet. Dazu gehört wiederum der durch

$$1 \longmapsto 1,\ \sqrt{2} \longmapsto \sqrt{2},\ \sqrt{3} \longmapsto -\sqrt{3},\ \sqrt{6} \longmapsto -\sqrt{6}$$

festgelegte $\mathbb{Q}$-Automorphismus φ.



Beispiel 16.8. Wir betrachten die $\mathbb{Z}/(6)$-graduierte Körpererweiterung

$$\mathbb{Q} \subseteq L = \mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}, \sqrt{-3}] = \mathbb{Q}[\sqrt[6]{-108}] = \mathbb{Q}[X]/(X^6 + 108)\,.$$

Die Graduierung ist durch $L_i = \mathbb{Q} \cdot x^i$ mit $x = \sqrt[6]{-108} = \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{-3}$ gegeben. Es ist $\sqrt{-3} = -\frac{1}{6}x^3$ und $\sqrt[3]{2} = \frac{1}{18}x^4$. Da es in $\mathbb{Q}$ keine primitive dritte Einheitswurzel gibt, ist $\mathrm{Char}\,(\mathbb{Z}/(6), \mathbb{Q}^\times) \cong \mathbb{Z}/(2)$ und daher gibt es nur zwei homogene Automorphismen (somit ist dies auch keine Kummererweiterung.[14]) Dennoch handelt es sich um eine Galoiserweiterung. Zunächst gehört

$$\zeta_3 = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} = \frac{-6 - x^3}{12}$$

zu L, und es ist $\mathbb{Q}(\zeta_3) = \mathbb{Q}(\sqrt{-3}) = L_0 \oplus L_3$. Ein weiterer (mit der Graduierung verträglicher) Zwischenkörper ist $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) = L_0 \oplus L_2 \oplus L_4$. Die durch $x^i \mapsto (-1)^i x^i$ gegebene Abbildung ist ein homogener Automorphismus φ

[14] Siehe die nächste Vorlesung.

mit $\varphi^2 = \mathrm{id}$. Aber auch die Zuordnung $x^i \mapsto (\zeta_3)^i x^i$ definiert einen (nichthomogenen) Automorphismus ψ mit $\psi^3 = \mathrm{id}$. Es gibt also insgesamt 6 Automorphismen und daher liegt eine Galoiserweiterung vor. Dabei ist

$$(\varphi \circ \psi)(x) \;=\; \varphi(\psi(x)) \;=\; \varphi(\zeta_3 x) \;=\; \varphi(\frac{-6x - x^4}{12}) \;=\; \frac{6x - x^4}{12}$$

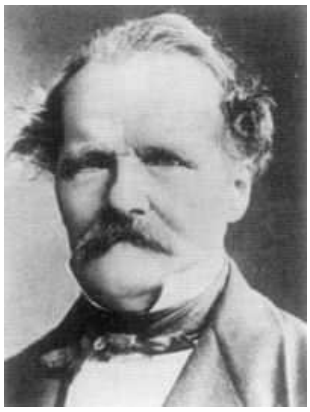
und

$$(\psi \circ \varphi)(x) \;=\; \psi(\varphi(x)) \;=\; \psi(-x) \;=\; -\psi(x) \;=\; -\frac{-6x - x^4}{12} \;=\; \frac{6x + x^4}{12}.$$

Daher ist die Galoisgruppe nicht kommutativ, und es muss $\mathrm{Gal}\,(L|\mathbb{Q}) = S_3$ sein.

17. Vorlesung

17.1. **Kummererweiterungen.**



Ernst Eduard Kummer (1810-1893)

Wir haben in der letzten Vorlesung gesehen, dass sich einige Eigenschaften einer Galoiserweiterung vereinfachen, wenn die Galoisgruppe abelsch sind. Beispielsweise ist dann jeder Zwischenkörper selbst galoissch über dem Grundkörper. Man spricht von *abelschen Galoiserweiterungen*.[15] Wichtige Beispiele solcher abelschen Körpererweiterungen sind Erweiterungen von endlichen Körpern und graduierte Körpererweiterungen, wenn hinreichend viele Einheitswurzeln im Grundkörper vorhanden sind.[16] Unter dieser Bedingung folgt umgekehrt, dass sich eine abelsche Erweiterung graduieren lässt. Dies ist der Inhalt der Kummertheorie.

[15]Es ist eine generelle Bezeichnungsphilosophie, dass ein Eigenschaftswort zu einer Galoiserweiterung sich auf die Galoisgruppe bezieht.

[16]Eine weitere wichtige Beispielsklasse sind die Kreisteilungskörper, siehe die beiden nächsten Vorlesungen.

Definition 17.1. Sei $m \in \mathbb{N}$ und sei K ein Körper, die eine m-te primitive Einheitswurzel enthält. Eine Galoiserweiterung $K \subseteq L$ heißt eine *Kummererweiterung* zum Exponenten m, wenn ihre Galoisgruppe abelsch und ihr Exponent ein Teiler von m ist.

Satz 17.2. *Sei $m \in \mathbb{N}$ und sei K ein Körper, der eine m-te primitive Einheitswurzel enthält. Es sei $K \subseteq L$ eine endliche Körpererweiterung. Dann gelten folgende Aussagen.*

(1) *Wenn $L = \bigoplus_{d \in D} L_d$ eine D-graduierte Körpererweiterung ist, so ist $K \subseteq L$ eine Kummererweiterung zum Exponenten m.*
(2) *Sei $K \subseteq L$ eine Kummererweiterung zum Exponenten m mit Galoisgruppe G. Es sei $D = \mathrm{Char}\,(G, K)$ die Charaktergruppe von G. Zu $\delta \in D$ sei*[17]

$$L_\delta = \{x \in L |\, \varphi(x) = \delta(\varphi) \cdot x \text{ für alle } \varphi \in G\}\,.$$

Dann ist $L = \bigoplus_{\delta \in D} L_\delta$ eine D-graduierte Körpererweiterung.

Beweis. (1). Dies ist eine Neuformulierung von Satz 13.9. (2). Nach Korollar Anhang 7.3 sind sämtliche Automorphismen $\varphi \in G = \mathrm{Gal}\,(L|K)$ diagonalisierbar. Da die Galoisgruppe abelsch ist, folgt aus Satz Anhang 7.4 die simultane Diagonalisierbarkeit aller Automorphismen $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ $(n = \#(G))$. Das heißt, dass man $L = \bigoplus_{i=1}^n L_i$ mit eindimensionalen K-Untervektorräumen L_i schreiben kann, die unter jedem $\varphi \in \mathrm{Gal}\,(L|K)$ auf sich abgebildet werden. Zu jedem L_i und jedem φ ist dabei $\varphi(x) = \zeta_{i,\varphi} \cdot x$ für jedes $x \in L_i$, das Element $\zeta_{i,\varphi}$ beschreibt also den Eigenwert von φ auf L_i. Die Zuordnung

$$\delta_i : G \longrightarrow K^\times,\ \varphi \longmapsto \zeta_{i,\varphi},$$

ist dabei ein Charakter. Es ist $L_i \subseteq L_{\delta_i}$, da ja L_i die zu δ_i gehörende Eigenraumbedingung erfüllt. Wegen

$$n \;=\; \mathrm{grad}_K\, L \;=\; \#(G) \;=\; \#(D)$$

ist $L_i = L_{\delta_i}$ und jeder Charakter δ tritt als ein δ_i auf. Also ist $L = \bigoplus_{\delta \in D} L_\delta$. Die Stufe zum konstanten Charakter ist K. Für $x_1 \in L_{\delta_1}$ und $x_2 \in L_{\delta_2}$ und $\varphi \in G$ ist

$$\varphi(x_1x_2) \;=\; \varphi(x_1)\varphi(x_2) \;=\; \delta_1(\varphi)x_1\delta_2(\varphi)x_2 \;=\; \delta_1(\varphi)\delta_2(\varphi)x_1x_2 \;=\; (\delta_1{\cdot}\delta_2)(\varphi)x_1x_2,$$

also $x_1x_2 \in L_{\delta_1 \cdot \delta_2}$, so dass in der Tat eine graduierte Körpererweiterung vorliegt. □

Korollar 17.3. *Sei $m \in \mathbb{N}$ und sei K ein Körper, der eine m-te primitive Einheitswurzel enthält. Es sei $K \subseteq L$ eine Kummererweiterung*

[17] Hier orientiert sich die Indizierung - entgegen der sonst üblichen additiven Schreibweise für eine graduierende Gruppe - an der multiplikativen Struktur von $\mathrm{Char}\,(G, K)$. Insbesondere ist L_1 die Stufe zum neutralen Element.

zum Exponenten m mit Galoisgruppe G, zugehöriger Charaktergruppe $D = \mathrm{Char}\,(G,K)$ und zugehöriger Graduierung

$$L = \bigoplus_{d\in D} L_d\,.$$

Es seien $H^\times$ die homogenen Elemente $\neq 0$ von L. Dann ist die natürliche Inklusion

$$H^\times \longrightarrow \{a \in L^\times |\, a^m \in K\}$$

ein Gruppenisomorphismus.

Beweis. Die Charaktergruppe $D = \mathrm{Char}\,(G,K)$ besitzt wegen der Voraussetzung über die Einheitswurzeln nach Lemma 13.8 den gleichen Exponenten wie G. Für ein homogenes Element $x \in L_d$ gilt also insbesondere $x^m \in L_{dm} = L_0 = K$,[18] so dass die linke Menge eine Teilmenge der rechten ist. Die Multiplikation ist links und rechts gleich, so dass eine Untergruppe vorliegt. Zum Nachweis der Surjektivität sei $a \in L^\times$ mit $a^m \in K$ vorgegeben. Wir zeigen, dass ein solches Element einen Charakter der Galoisgruppe definiert. Zu $\varphi \in \mathrm{Gal}\,(L|K)$ ist

$$(\frac{\varphi(a)}{a})^m \;=\; \frac{(\varphi(a))^m}{a^m} \;=\; \frac{\varphi(a^m)}{a^m} \;=\; \frac{a^m}{a^m} \;=\; 1.$$

Der Bruch $\delta_a(\varphi) = \frac{\varphi(a)}{a}$ ist also eine m-te Einheitswurzel und gehört somit zu $K^\times$. Für zwei Automorphismen $\varphi, \psi \in \mathrm{Gal}\,(L|K)$ ist dabei

$$\begin{aligned}
\frac{(\varphi\circ\psi)(a)}{a} &= \frac{\varphi(\psi(a))}{a} \\
&= \frac{\varphi(a)}{a}\cdot\frac{\varphi(\psi(a))}{\varphi(a)} \\
&= \frac{\varphi(a)}{a}\cdot\varphi(\frac{\psi(a)}{a}) \\
&= \frac{\varphi(a)}{a}\cdot\frac{\psi(a)}{a},
\end{aligned}$$

so dass

$$\delta_a : \mathrm{Gal}\,(L|K) \longrightarrow K^\times,\ \varphi \longmapsto \frac{\varphi(a)}{a},$$

ein Charakter ist. Wegen $\varphi(a) = \frac{\varphi(a)}{a}a = \delta_a(\varphi)a$ ist $a \in L_{\delta_a}$, also homogen. □

Korollar 17.4. *Sei $m \in \mathbb{N}$ und sei K ein Körper, der eine m-te primitive Einheitswurzel enthält. Es sei $K \subseteq L$ eine Kummererweiterung zum Exponenten m. Dann ist $K \subseteq L$ eine Radikalerweiterung.*

Beweis. Dies folgt direkt aus Satz 17.2 und aus Lemma 9.7. □

[18] Hier verwenden wir wieder additive Schreibweise.

Innerhalb der Radikalerweiterungen sind die Kummererweiterungen speziell, nämlich von der folgenden Gestalt.

Satz 17.5. *Sei $m \in \mathbb{N}$ und sei K ein Körper, der eine m-te primitive Einheitswurzel enthält. Es sei $K \subseteq L$ eine Körpererweiterung. Dann ist $K \subseteq L$ genau dann eine Kummererweiterung zum Exponenten m, wenn es eine Beschreibung*

$$L = K(\sqrt[m]{a_1}, \ldots, \sqrt[m]{a_r})$$

mit $a_i \in K$ gibt.

Beweis. Aus Satz 17.2 und Lemma 9.7 folgt, dass eine Kummererweiterung die angegebene Radikaldarstellung besitzt. Zum Beweis der Umkehrung sei $L = K(x_1, \ldots, x_r)$ mit $x_i^m = a_i \in K$. Wir müssen zeigen, dass diese Erweiterung galoissch mit abelscher Galoisgruppe ist. Es sei $\zeta \in K$ eine primitive m-te Einheitswurzel. Die Produkte $\zeta^\ell x_i$ erfüllen ebenfalls $(\zeta^\ell x_i)^m = a_i$. Da man die x_i als von 0 verschieden annehmen kann, und ζ primitiv ist, sind diese Produkte für jedes i untereinander verschieden. Dies bedeutet, dass die Polynome $X^m - a_1, \ldots, X^m - a_r$ über L in verschiedene Linearfaktoren zerfallen. Damit ist L der Zerfällungskörper dieser separablen Polynome, so dass nach Satz 15.6 eine Galoiserweiterung vorliegt. Sei $G = \mathrm{Gal}\,(L|K)$ die Galoisgruppe dieser Erweiterung. Für jedes $\varphi \in G$ und jedes i ist $\varphi(x_i)$ ebenfalls eine Lösung der Gleichung $X^m = a_i$ und daher ist $\varphi(x_i) = \zeta^\ell x_i$ mit einem gewissen (von φ und i abhängigen) ℓ. Für zwei Automorphismen $\varphi_1, \varphi_2 \in G$ ist daher

$$(\varphi_1 \circ \varphi_2)(x_i) = \varphi_1(\varphi_2(x_i)) = \varphi_1(\zeta^{\ell_2} x_i) = \zeta^{\ell_2}\varphi_1(x_i) = \zeta^{\ell_2}\zeta^{\ell_1} x_i = \zeta^{\ell_2+\ell_1} x_i.$$

Somit wirken die Automorphismen auf dem Erzeugendensystem kommutativ und daher ist $\varphi_1 \circ \varphi_2 = \varphi_2 \circ \varphi_1$. Damit ist die Galoisgruppe abelsch. Für jedes x_i ist ferner

$$\varphi^m(x_i) = (\zeta^\ell)^m x_i = x_i$$

mit einem gewissen ℓ. Also ist $\varphi^m = \mathrm{id}$, so dass m ein Vielfaches des Exponenten ist. □

Beispiel 17.6. Der achte Kreisteilungskörper über $\mathbb{Q}$, also die (siehe Beispiel 9.15) (mehrfach) graduierte Körpererweiterung

$$\mathbb{Q} \subseteq L = K_8 = \mathbb{Q}[i, \sqrt{2}] = \mathbb{Q}[X]/(X^4 + 1)$$

ist eine Kummererweiterung zum Exponenten 2 mit Galoisgruppe $\mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(2)$. Die gemäß Satz 17.2 zugehörige $\mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(2)$-Graduierung ist

$$\mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}i \oplus \mathbb{Q}\sqrt{2} \oplus \mathbb{Q}i\sqrt{2}\,.$$

Nach Korollar 17.3 gilt

$$H^\times = \{a \in L^\times \,|\, a^2 \in \mathbb{Q}\}\,,$$

d.h. die Menge der rationalen Quadratwurzeln von L sind einfach beschreibbar. Es gibt aber auch noch weitere Wurzeln aus rationalen Zahlen in L, bspw. die achte Einheitswurzel ζ_8, die eine vierte Wurzel von -1 ist.

17.2. **Das Lemma von Gauss und das Eisensteinkriterium.**

In der nächsten Vorlesung werden wir uns mit Kreisteilungskörpern beschäftigen. Dazu brauchen wir einige wichtige Irreduzibilitätskriterien für Polynome aus $\mathbb{Q}[X]$.

Die folgende Aussage heißt *Lemma von Gauß*.

Lemma 17.7. *Es sei $f \in \mathbb{Z}[X]$ ein nichtkonstantes Polynom derart, dass in $\mathbb{Z}[X]$ nur Faktorzerlegungen $f = gh$ mit $g \in \mathbb{Z}$ oder $h \in \mathbb{Z}$ möglich sind. Dann ist f irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$.*

Beweis. Nehmen wir an, es gebe eine nicht-triviale Faktorzerlegung $f = gh$ mit nicht-konstanten Polynomen $g, h \in \mathbb{Q}[X]$. Sowohl in g als auch in h kommen nur endlich viele Nenner aus $\mathbb{Z}$ vor, so dass man mit einem gemeinsamen Hauptnenner $r \in \mathbb{Z}$ multiplizieren kann und somit eine Darstellung $rf = \tilde{g}\tilde{h}$ mit $\tilde{g}, \tilde{h} \in \mathbb{Z}[X]$ erhält. Dabei haben sich die Grade der beteiligten Polynome nicht geändert. Es sei $r = p_1 \cdots p_n$ die Primfaktorzerlegung von r. Nach Lemma 20.12 (Einführung in die Algebra (Osnabrück 2009))[19] ist p_1 auch im Polynomring $\mathbb{Z}[X]$ prim. Da es das Produkt $\tilde{g}\tilde{h}$ teilt, muss es einen der Faktoren teilen, sagen wir $\tilde{h}$. Dann kann man mit p_1 kürzen und erhält eine Gleichung der Form

$$r'f = \tilde{g}\tilde{h}' .$$

Dabei ändern sich wieder die Grade nicht. So kann man sukzessive alle Primfaktoren wegkürzen und erhält schließlich eine Zerlegung

$$f = g'h'$$

mit nicht konstanten Polynomen $h', g' \in \mathbb{Z}[X]$ im Widerspruch zur Voraussetzung. □

Lemma 17.8. *Sei R ein Integritätsbereich und sei $F = \sum_{i=0}^{n} c_i X^i \in R[X]$ ein Polynom. Es sei $p \in R$ ein Primelement mit der Eigenschaft, dass p den Leitkoeffizienten c_n nicht teilt, alle anderen Koeffizienten teilt, aber dass p^2 nicht den konstanten Koeffizienten c_0 teilt. Dann besitzt F keine Zerlegung $F = GH$ mit nicht-konstanten Polynomen $G, H \in R[X]$.*

Beweis. Sei angenommen, dass es eine Zerlegung $F = GH$ mit nicht-konstanten Polynomen $G, H \in R[X]$ gäbe, und sei $G = \sum_{i=0}^{k} a_i X^i$ und $H = \sum_{j=0}^{m} b_j X^j$. Dann ist $c_0 = a_0 b_0$ und dies ist ein Vielfaches von p, aber nicht von p^2. Da p prim ist, teilt es einen der Faktoren, sagen wir a_0, aber nicht den anderen. Es ist nicht jeder Koeffizient von G ein Vielfaches von p, da sonst G und damit auch F ein Vielfaches von p wäre, was aber aufgrund der Bedingung an den Leitkoeffizienten ausgeschlossen ist. Es sei r der kleinste Index derart, dass a_r kein Vielfaches von p ist. Es ist $r \leq \operatorname{grad}(G) < \operatorname{grad}(F)$,

[19] Siehe Aufgabe 18.1

da H nicht konstant ist. Wir betrachten den Koeffizienten c_r, für den

$$c_r = a_0 b_r + a_1 b_{r-1} + \ldots + a_{r-1} b_1 + a_r b_0$$

gilt. Hierbei sind c_r und alle Summanden $a_i b_{r-i}$, $i = 0, \ldots, r-1$, Vielfache von p. Daher muss auch der letzte Summand $a_r b_0$ ein Vielfaches von p sein. Dies ist aber ein Widerspruch, da $p \not| a_r$ und $p \not| b_0$. □

Das folgende Kriterium für die Irreduzibilität von Polynomen heißt *Eisenstein-Kriterium*.

Satz 17.9. *Es sei $F = \sum_{i=0}^{n} c_i X^i \in \mathbb{Z}[X]$ ein Polynom. Es sei $p \in \mathbb{Z}$ eine Primzahl mit der Eigenschaft, dass p den Leitkoeffizienten c_n nicht teilt, aber alle anderen Koeffizienten teilt, aber dass p^2 nicht den konstanten Koeffizienten c_0 teilt. Dann ist F irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$.*

Beweis. Dies folgt aus Lemma 17.8 und Lemma 17.7. □

18. Vorlesung

18.1. **Kreisteilungskörper.**

Definition 18.1. Der n-te *Kreisteilungskörper* ist der Zerfällungskörper des Polynoms

$$X^n - 1$$

über $\mathbb{Q}$.

Offenbar ist 1 eine Nullstelle von $X^n - 1$. Daher kann man $X^n - 1$ durch $X - 1$ teilen und erhält, wie man schnell nachrechen kann,

$$X^n - 1 = (X-1)(X^{n-1} + X^{n-2} + \ldots + X + 1)\,.$$

Wegen $1 \in \mathbb{Q}$ ist daher der n-te Kreisteilungskörper auch der Zerfällungskörper von

$$X^{n-1} + X^{n-2} + \ldots + X + 1\,.$$

Es gibt auch Kreisteilungskörper über anderen Körpern, da es ja stets Zerfällungskörper gibt. Wir beschränken uns aber weitgehend auf die Kreisteilungskörper über $\mathbb{Q}$, die wir auch mit K_n bezeichnen. Da $X^n - 1$ auf die in der zweiten Vorlesung beschriebenen Art über $\mathbb{C}$ in Linearfaktoren zerfällt, kann man K_n als Unterkörper von $\mathbb{C}$ realisieren, und zwar ist K_n der von allen n-ten Einheitswurzeln erzeugte Unterkörper von $\mathbb{C}$. Dieser wird sogar schon von einer einzigen primitiven Einheitswurzel erzeugt.

Lemma 18.2. *Sei $n \in \mathbb{N}_+$. Dann wird der n-te Kreisteilungskörper über $\mathbb{Q}$ von $e^{2\pi i/n}$ erzeugt. Der n-te Kreisteilungskörper ist also*

$$K_n = \mathbb{Q}(e^{2\pi i/n}) = \mathbb{Q}[e^{2\pi i/n}]\,.$$

Insbesondere ist jeder Kreisteilungskörper eine einfache Körpererweiterung von $\mathbb{Q}$.[20]

Beweis. Es sei K_n der n-te Kreisteilungskörper über $\mathbb{Q}$. Wegen $(e^{2\pi i/n})^n = 1$ ist $\mathbb{Q}[e^{2\pi i/n}] \subseteq K_n$. Wegen $(e^{2\pi i/n})^k = e^{2\pi ik/n}$ gehören auch alle anderen Einheitswurzeln zu $\mathbb{Q}[e^{2\pi i/n}]$, also ist $\mathbb{Q}[e^{2\pi i/n}] = K_n$. □

Statt $e^{\frac{2\pi i}{n}}$ kann man auch jede andere n-te primitive Einheitswurzel aus $\mathbb{C}$ als Erzeuger nehmen.

Beispiel 18.3. Wir bestimmen einige Kreisteilungskörper für kleine n. Bei $n = 1$ oder 2 ist der Kreisteilungskörper gleich $\mathbb{Q}$. Bei $n = 3$ ist

$$X^3 - 1 = (X - 1)(X^2 + X + 1)$$

und der zweite Faktor zerfällt

$$X^2 + X + 1 = (X + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})(X + \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) .$$

Daher ist der dritte Kreisteilungskörper der von $\sqrt{-3} = \sqrt{3}i$ erzeugte Körper, es ist also $K_3 = \mathbb{Q}[\sqrt{-3}]$ eine quadratische Körpererweiterung der rationalen Zahlen.

Bei $n = 4$ ist natürlich

$$\begin{aligned} X^4 - 1 &= (X^2 - 1)(X^2 + 1) \\ &= (X - 1)(X + 1)(X^2 + 1) \\ &= (X - 1)(X + 1)(X - i)(X + i). \end{aligned}$$

Der vierte Kreisteilungskörper ist somit $\mathbb{Q}[i] \cong \mathbb{Q}[X]/(X^2+1)$, also ebenfalls eine quadratische Körpererweiterung von $\mathbb{Q}$.

Lemma 18.4. *Sei p eine Primzahl. Dann ist der p-te Kreisteilungskörper gleich*

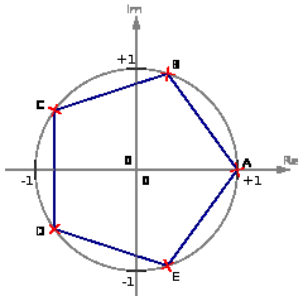
$$\mathbb{Q}[X]/(X^{p-1} + X^{p-2} + \ldots + X^1 + 1)$$

Insbesondere besitzt der p-te Kreisteilungskörper den Grad $p - 1$ über $\mathbb{Q}$.

Beweis. Der p-te Kreisteilungskörper wird nach Lemma 18.2 von $e^{2\pi i/p}$ erzeugt, er ist also isomorph zu $\mathbb{Q}[X]/(P)$, wobei P das Minimalpolynom von $e^{2\pi i/p}$ bezeichnet. Als Einheitswurzel ist $e^{2\pi i/p}$ eine Nullstelle von $X^p - 1$ und wegen $e^{2\pi i/p} \neq 1$ ist $e^{2\pi i/p}$ eine Nullstelle von $X^{p-1} + X^{p-2} + \ldots + X^1 + 1$. Das Polynom $X^{p-1} + X^{p-2} + \ldots + X^1 + 1$ ist irreduzibel nach Aufgabe 17.11 und daher handelt es sich nach Lemma 7.12 um das Minimalpolynom von $e^{2\pi i/p}$. □

Weiter unten werden wir für jedes n die Minimalpolynome der primitiven n-ten Einheitswurzeln bestimmen.

[20] Dies ist natürlich auch klar aufgrund des Satzes vom primitiven Element.



Beispiel 18.5. Der fünfte Kreisteilungskörper wird von der komplexen Zahl $e^{2\pi i/5}$ erzeugt. Er hat aufgrund von Lemma 18.4 die Gestalt

$$K_5 \cong \mathbb{Q}[X]/(X^4+X^3+X^2+X+1)\,,$$

wobei die Variable X als $e^{2\pi i/5}$ (oder eine andere primitive Einheitswurzel) zu interpretieren ist. Sei $x = e^{2\pi i/5}$ und setze $u = 2x^4+2x+1$. Aus Symmetriegründen muss dies eine reelle Zahl sein. Es ist

$$\begin{aligned} u^2 &= 4x^8+4x^2+1+8x^5+4x^4+4x \\ &= 4x^3+4x^2+1+8+4x^4+4x \\ &= 5+4(x^4+x^3+x^2+x+1) \\ &= 5. \end{aligned}$$

Es ist also $u = \sqrt{5}$ (die positive Wurzel) und somit haben wir eine Folge von quadratischen Körpererweiterungen

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}[\sqrt{5}] \subset K_5\,.$$

Definition 18.6. Zu einer natürlichen Zahl n bezeichnet $\varphi(n)$ die Anzahl der Elemente von $(\mathbb{Z}/(n))^\times$. Man nennt $\varphi(n)$ die *Eulersche φ-Funktion*.

Die Zahl $\varphi(n)$ gibt also an, wie viele natürliche Zahlen k, $1 \leq k \leq n$, teilerfremd zu n sind. In einem Körper, in dem es überhaupt eine n-te primitive Einheitswurzel gibt, gibt es genau $\varphi(n)$ primitive Einheitswurzeln, da dann die Gruppe der n-ten Einheitswurzeln isomorph zur zyklischen Gruppe der Ordnung n ist.

18.2. **Kreisteilungspolynome.**

Definition 18.7. Sei $n \in \mathbb{N}_+$ und seien $z_1, \ldots, z_{\varphi(n)}$ die primitiven komplexen Einheitswurzeln. Dann heißt das Polynom

$$\Phi_n = \prod_{i=1}^{\varphi(n)} (X - z_i) \in \mathbb{C}[X]$$

das n-te *Kreisteilungspolynom*.

Nach Konstruktion hat das n-te Kreisteilungspolynom den Grad $\varphi(n)$.

Lemma 18.8. *Sei $n \in \mathbb{N}_+$. Dann gilt in $\mathbb{C}[X]$ die Gleichung*

$$X^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d \, .$$

Beweis. Jede der n verschiedenen n-ten Einheitswurzeln besitzt eine Ordnung d, die ein Teiler von n ist. Eine n-te Einheitswurzel der Ordnung d ist eine primitive d-te Einheitswurzel. Die Aussage folgt daher aus

$$\begin{aligned} X^n - 1 &= \prod_{z \text{ ist } n\text{-te Einheitswurzel}} (X - z) \\ &= \prod_{d|n} \Big(\prod_{z \text{ ist primitive } d\text{-te Einheitswurzel}} (X - z) \Big) \\ &= \prod_{d|n} \Phi_d . \end{aligned}$$

□

Lemma 18.9. *Die Koeffizienten der Kreisteilungspolynome liegen in $\mathbb{Z}$.*

Beweis. Induktion über n. Für $n = 1$ ist $\Phi_1 = X - 1 \in \mathbb{Z}[X]$. Für beliebiges n betrachten wir die in Lemma 18.9 bewiesene Darstellung

$$X^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d = \Big(\prod_{d|n,\, d \neq n} \Phi_d \Big) \cdot \Phi_n \, .$$

Der linke Faktor ist ein normiertes Polynom und er besitzt nach der Induktionsvoraussetzung Koeffizienten in $\mathbb{Z}$. Daraus folgt mit Aufgabe 18.2, dass auch Φ_n Koeffizienten in $\mathbb{Z}$ besitzt. □

Grundlegend ist die folgende Aussage.

Satz 18.10. *Die Kreisteilungspolynome Φ_n sind irreduzibel über $\mathbb{Q}$.*

Beweis. Nehmen wir an, dass Φ_n nicht irreduzibel über $\mathbb{Q}$ ist. Dann gibt es nach Lemma 17.7 eine Zerlegung $\Phi_n = FG$ mit normierten Polynomen $F, G \in \mathbb{Z}[X]$ von kleinerem Grad. Wir fixieren eine primitive n-te Einheitswurzel ζ. Dann ist nach Definition der Kreisteilungspolynome $\Phi_n(\zeta) = 0$ und daher ist (ohne Einschränkung) $F(\zeta) = 0$. Wir können annehmen, dass F irreduzibel und normiert ist, also das Minimalpolynom von ζ ist.Wir werden zeigen, dass jede primitive n-te Einheitswurzel ebenfalls eine Nullstelle von F ist. Dann folgt aus Gradgründen $\operatorname{grad}(F) = \varphi(n) = \operatorname{grad}(\Phi_n)$ im Widerspruch zur Reduzibilität. Jede primitive Einheitswurzel kann man schreiben als ζ^k mit einer zu n teilerfremden Zahl k. Es genügt dabei, den Fall ζ^p mit einer zu n teilerfremden Primzahl p zu betrachten, da sich jedes ζ^k sukzessive als p-Potenz erhalten lässt (wobei man ζ sukzessive durch ζ^p ersetzt und $F(\zeta^p) = 0$ verwendet). Nehmen wir also an, dass $F(\zeta^p) \neq 0$ ist. Dann muss $G(\zeta^p) = 0$ sein. Daher ist ζ eine Nullstelle des Polynoms $G(X^p)$ und daher gilt $FH = G(X^p)$ mit $H \in \mathbb{Q}[X]$, da ja F das Minimalpolynom von ζ ist. Wegen

Aufgabe 18.2 gehören die Koeffizienten von H zu $\mathbb{Z}$. Wir betrachten nun die Polynome Φ_n, F, G, H modulo p, also als Polynome in $\mathbb{Z}/(p)[X]$, wobei wir dafür $\overline{\Phi_n}, \overline{F}$ usw. schreiben. Aufgrund des Frobenius-Homomorphismus in Charakteristik p und Aufgabe 7.8 gilt

$$\overline{G}(X^p) = (\overline{G}(X))^p \, .$$

Daher ist

$$\overline{FH} \, = \, \overline{G}(X^p) \, = \, (\overline{G}(X))^p .$$

Sei nun $\mathbb{Z}/(p) \subseteq L$ der Zerfällungskörper von $X^n - 1$ über $\mathbb{Z}/(p)$, so dass über L insbesondere auch $\overline{\Phi_n}$ und damit auch $\overline{F}$ in Linearfaktoren zerfällt. Sei $u \in L$ eine Nullstelle von $\overline{F}$. Dann ist u wegen der obigen Teilbarkeitsbeziehung auch eine Nullstelle von $\overline{G}$. Wegen $\overline{\Phi_n} = \overline{FG}$ ist dann u eine mehrfache Nullstelle von $\overline{\Phi_n}$. Damit besitzt auch $X^n - 1$ eine mehrfache Nullstelle in L. Nach dem formalen Ableitungskriterium ist aber $(X^n - 1)' = (n \bmod p)X^{n-1}$ und dieser Koeffizient ist nicht null. Also erzeugt das Polynom $X^n - 1$ und seine Ableitung das Einheitsideal, so dass es nach Aufgabe 11.19 keine mehrfache Nullstellen geben kann und wir einen Widerspruch erhalten. □

Korollar 18.11. *Der n-te Kreisteilungskörper K_n über $\mathbb{Q}$ hat die Beschreibung*

$$K_n = \mathbb{Q}[X]/(\Phi_n) \, ,$$

wobei Φ_n das n-te Kreisteilungspolynom bezeichnet. Der Grad des n-ten Kreisteilungskörpers ist $\varphi(n)$.

Beweis. Es ist $K_n = \mathbb{Q}[\zeta]$, wobei ζ eine primitive n-te Einheitswurzel ist. Nach Definition des Kreisteilungspolynoms ist $\Phi_n(\zeta) = 0$ und Satz 18.10 ist das Kreisteilungspolynom irreduzibel, so dass es sich um das Minimalpolynom von ζ handeln muss. Also ist nach Satz 7.11 $K_n \cong \mathbb{Q}[X]/(\Phi_n)$. □

19. Vorlesung

In dieser Vorlesung möchten wir zunächst nachweisen, dass es sich bei einem Kreisteilungskörper über $\mathbb{Q}$ um eine Galoiserweiterung handelt, deren Galoisgruppe abelsch ist und eine Struktur besitzt, die unmittelbar mit den Einheitswurzeln zusammenhängt.

19.1. **Kreisteilungskörper als Galoiserweiterung.**

Wir kommen nun zur Galoiseigenschaft der Kreisteilungskörper über $\mathbb{Q}$.

Satz 19.1. *Es sei K_n der n-te Kreisteilungskörper. Dann ist $\mathbb{Q} \subseteq K_n$ eine Galoiserweiterung mit der Galoisgruppe*

$$\mathrm{Gal}\,(K_n|\mathbb{Q}) \cong (\mathbb{Z}/(n))^\times \, .$$

Dabei entspricht der Einheit $a \in (\mathbb{Z}/(n))^\times$ derjenige Automorphismus $\varphi_a \in \mathrm{Gal}\,(K_n|\mathbb{Q})$, der eine n-te Einheitswurzel ζ auf ζ^a abbildet.

Beweis. Nach Korollar 18.10 ist

$$K_n = \mathbb{Q}[X]/(\Phi_n)\,,$$

wobei Φ_n das n-te Kreisteilungspolynom ist. Dieses ist das Produkt $\Phi_n = \prod_{i=1}^{\varphi(n)}(X - z_i)$ über die $\varphi(n)$ primitiven Einheitswurzeln und damit vom Grad $\varphi(n)$. Da der Kreisteilungskörper all diese primitiven Einheitswurzeln enthält, zerfällt das Kreisteilungspolynom über K_n in Linearfaktoren und daher ist K_n der Zerfällungskörper des Kreisteilungspolynoms und somit nach Satz 15.6 eine Galoiserweiterung.

Es sei nun ζ eine primitive n-te Einheitswurzel, und zwar diejenige, die bei der obigen Restklassenidentifizierung der Variablen X entspricht. Zu $a \in (\mathbb{Z}/\mathbb{Z}n)^\times$ ist ζ^a ebenfalls eine primitive Einheitswurzel. Wir betrachten den Einsetzungshomomorphismus

$$\mathbb{Q}[X] \longrightarrow \mathbb{Q}[X]/(\Phi_n),\ X \longmapsto \zeta^a.$$

Dieser ist surjektiv, da ζ^a den Kreisteilungskörper erzeugt. Wegen $\Phi_n(\zeta^a) = 0$ induziert dies einen Automorphismus

$$\mathbb{Q}[X]/(\Phi_n) \longrightarrow \mathbb{Q}[X]/(\Phi_n),\ \zeta \longmapsto \zeta^a.$$

Dadurch erhalten wir eine Zuordnung

$$(\mathbb{Z}/\mathbb{Z}n)^\times \longrightarrow \mathrm{Gal}\,(K_n|\mathbb{Q}),\ a \longmapsto \varphi_a.$$

Für $a, a' \in (\mathbb{Z}/\mathbb{Z}n)^\times$ ist

$$\varphi_{aa'}(\zeta) = \zeta^{aa'} = (\zeta^{a'})^a = \varphi_a(\zeta^{a'}) = \varphi_a(\varphi_{a'}(\zeta)) = (\varphi_a \circ \varphi_{a'})(\zeta),$$

so dass $\varphi_{aa'} = \varphi_a \circ \varphi_{a'}$ gilt (da die Automorphismen auf dem Erzeuger ζ festgelegt sind). Die Zuordnung ist also ein Gruppenhomomorphismus. Für verschiedene Einheiten $a \neq a'$ ist $\zeta^a \neq \zeta^{a'}$ und somit $\varphi_a \neq \varphi_{a'}$. Die Abbildung ist also injektiv. Da es links und rechts $\varphi(n)$ Elemente gibt, ist die Abbildung eine Bijektion. □

Beispiel 19.2. Wir betrachten den achten Kreisteilungskörper K_8. Die Einheitengruppe $(\mathbb{Z}/(8))^\times$ ist $\{1, 3, 5, 7\}$, wobei $3, 5, 7$ die Ordnung 2 besitzen. Die nach Satz 19.1 zugehörigen Körperautomorphismen sind neben der Identität die Abbildungen φ_3, φ_5, φ_7, die auf den Einheitswurzeln (ζ sei eine primitive achte Einheitswurzel) folgendermaßen wirken.

$$\varphi_3 : \zeta \longleftrightarrow \zeta^3,\ \zeta^2 = i \longleftrightarrow \zeta^6 = -i,\ \zeta^5 \longleftrightarrow \zeta^7\,,$$

$$\varphi_5 : \zeta \longleftrightarrow \zeta^5,\ i = \zeta^2 \longleftrightarrow \zeta^{10} = i,\ \zeta^3 \longleftrightarrow \zeta^7,\ -i \longleftrightarrow -i\,,$$

und

$$\varphi_7 : \zeta \longleftrightarrow \zeta^7,\ i = \zeta^2 \longleftrightarrow \zeta^{14} = -i,\ \zeta^3 \longleftrightarrow \zeta^5\,.$$

Korollar 19.3. *Zu jeder endlichen abelschen Gruppe G gibt es eine endliche Galoiserweiterung $\mathbb{Q} \subseteq L$, deren Galoisgruppe gleich G ist.*

Beweis. Nach einem elementaren Satz, den wir hier nicht beweisen, lässt sich G als Restklassengruppe einer Einheitengruppe $(\mathbb{Z}/(n))^\times$ auffassen. Es sei

$$q : (\mathbb{Z}/(n))^\times \longrightarrow G$$

der zugehörige surjektive Restklassenhomomorphismus und H der Kern davon. Nach Satz 19.1 ist $(\mathbb{Z}/(n))^\times$ die Galoisgruppe der n-ten Kreisteilungserweiterung $\mathbb{Q} \subseteq K_n$. Es sei $M \subseteq K_n$ der Fixkörper zu H. Nach Satz 16.4 ist $\mathbb{Q} \subseteq M$ eine Galoiserweiterung mit Galoisgruppe G. □

Es ist ein offenes Problem, ob jede endliche Gruppe als Galoisgruppe einer Galoiserweiterung von $\mathbb{Q}$ auftritt. Diese Fragestellung gehört zur sogenannten *inversen Galoistheorie*.

19.2. **Galoiseigenschaften des Kompositums.**

Wir betrachten eine wichtige Konstruktion, das sogenannte Kompositum.

Definition 19.4. Sei $K \subseteq L$ eine Körpererweiterung und seien $K \subseteq M_1$, $M_2 \subseteq L$ zwei Zwischenkörper. Dann nennt man den von M_1 und M_2 erzeugten Unterkörper das *Kompositum* der beiden Körper (in L). Es wird mit M_1M_2 bezeichnet.

Lemma 19.5. *Es sei $K \subseteq L$ eine endliche separable Körpererweiterung und sei $K \subseteq K'$ eine weitere Körpererweiterung mit dem gemeinsamen Oberkörper M, in dem das Kompositum $L' = LK'$ gebildet sei. Dann ist $K' \subseteq L'$ ebenfalls eine endliche separable Körpererweiterung.*

Beweis. Es sei $K \subseteq L = K[x_1, \ldots, x_n]$ separabel, und seien $F_i \in K[X]$ die zu x_i gehörigen (separablen) Minimalpolynome. Dann ist $L' = K'[x_1, \ldots, x_n]$ und die Minimalpolynome G_i der x_i über K' sind in $K'[X]$ Teiler der F_i und daher selbst separabel. Nach Satz 12.7 ist $K' \subseteq L'$ eine separable Körpererweiterung. □

Lemma 19.6. *Es sei $K \subseteq L$ eine endliche normale Körpererweiterung und sei $K \subseteq K'$ eine weitere Körpererweiterung mit dem gemeinsamen Oberkörper M, in dem das Kompositum $L' = LK'$ gebildet sei. Dann ist $K' \subseteq L'$ ebenfalls eine normale Körpererweiterung.*

Beweis. Wir können $L = K[x_1, \ldots, x_n]$ schreiben, und wir wissen, dass es zugehörige Polynome $F_i \in K[X]$ mit $F_i(x_i) = 0$ gibt, die über L zerfallen. Daher ist $L' = K'[x_1, \ldots, x_n]$ und dieselben Polynome, aufgefasst in $K'[X]$, erfüllen die gleichen Eigenschaften. Aus Satz 14.3 ergibt sich die Normalität. □

Aus diesen zwei Lemmata ergibt sich der folgende Satz, der für die Charakterisierung der auflösbaren Körpererweiterungen wichtig ist.

Satz 19.7. *Es sei $K \subseteq L$ eine endliche Galoiserweiterung, und es sei $K \subseteq K'$ eine weitere Körpererweiterung mit dem gemeinsamen Oberkörper M, in dem das Kompositum $L' = LK'$ gebildet sei. Dann ist $K' \subseteq L'$ ebenfalls eine endliche Galoiserweiterung, und für ihre Galoisgruppe gilt die natürliche Isomorphie*

$$\mathrm{Gal}\,(L'|K') \cong \mathrm{Gal}\,(L|L \cap K').$$

Beweis. Die Erweiterung $K' \subseteq L'$ ist normal nach Lemma 19.6 und separabel nach Lemma 19.5, also eine Galoiserweiterung aufgrund von Satz 15.6. Zur Berechnung der Galoisgruppe gehen wir von der Einschränkungsabbildung

$$\Psi : \mathrm{Gal}\,(L'|K') \longrightarrow \mathrm{Gal}\,(L|K),\ \varphi \longmapsto \varphi|_L,$$

aus, die wegen der Normalität von $K \subseteq L$ nach Satz 14.3 ein wohldefinierter Gruppenhomomorphismus ist. Es sei $\varphi \in \mathrm{Gal}\,(L'|K')$ ein Automorphismus, dessen Bild unter diesem Homomorphismus trivial sei, also $\varphi|_L = \mathrm{id}_L$. Da auch $\varphi|_{K'} = \mathrm{id}_{K'}$ gilt, ist φ auf dem Kompositum $L' = LK'$ die Identität, also das neutrale Element. Daher ist Ψ nach Lemma 4.9 injektiv. Das Bild von Ψ ist eine Untergruppe $H = \mathrm{bild}\ \Psi \subseteq \mathrm{Gal}\,(L|K)$. Aufgrund der Galoiskorrespondenz gibt es einen Zwischenkörper Z, $K \subseteq Z \subseteq L$, mit $H = \mathrm{Gal}\,(L|Z)$, und zwar ist Z der Fixkörper von H. Für jedes $\varphi \in \mathrm{Gal}\,(L'|K')$ ist $\varphi|_{K'} = \mathrm{id}_{K'}$, und daher ist auch $(\varphi|_L)|_{L\cap K'} = \mathrm{id}_{L\cap K'}$. Also ist $L \cap K' \subseteq Z$. Wenn $x \in Z$ ist, so bedeutet dies, dass für jedes $\varphi \in \mathrm{Gal}\,(L'|K')$ die Gleichheit $(\varphi|_L)(x) = x$ gilt. Dann ist aber $x \in K'$, wegen Satz 15.6 und da eine Galoiserweiterung vorliegt, und somit ist $x \in L \cap K'$. Insgesamt ist also

$$\mathrm{Gal}\,(L'|K') = \mathrm{bild}\ \Psi = \mathrm{Gal}\,(L|L \cap K').$$

□

20. Vorlesung

In den nächsten drei Vorlesungen möchten wir auflösbare Körpererweiterungen galoistheoretisch charakterisieren und insbesondere zeigen, dass nicht jede Körpererweiterung auflösbar ist, also sich nicht jedes Polynom durch (sukzessive) Radikale (auf)lösen lässt. In dieser Vorlesung bereiten wir dazu das gruppentheoretische Fundament.

20.1. **Auflösbare Gruppen.**

Definition 20.1. Eine Gruppe G heißt *auflösbar*, wenn es eine Filtrierung

$$\{e\} = G_0 \subseteq G_1 \subseteq G_2 \subseteq \ldots \subseteq G_{k-1} \subseteq G_k = G$$

gibt derart, dass G_i ein Normalteiler in G_{i+1} ist und die Restklassengruppe G_{i+1}/G_i abelsch ist (für jedes $i = 0, \ldots, k-1$).

Die in dieser Definition auftretende Filtrierung nennt man auch eine *auflösende Filtrierung*. Eine kommutative Gruppe ist natürlich auflösbar, wie die triviale Filtrierung $\{e\} \subseteq G$ zeigt.

Lemma 20.2. *Es sei G eine auflösbare Gruppe. Dann ist auch jede Untergruppe $H \subseteq G$ auflösbar.*

Beweis. Wir gehen von einer auflösenden Filtrierung

$$\{e\} = G_0 \subseteq G_1 \subseteq G_2 \subseteq \ldots \subseteq G_{k-1} \subseteq G_k = G$$

aus, d.h., dass die G_i Normalteiler in G_{i+1} und die Restklassengruppen G_{i+1}/G_i kommutativ sind. Die Untergruppe $H \subseteq G$ besitzt durch $H_i = H \cap G_i$ eine induzierte Filtrierung. Dabei liegt das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H \cap G_i & \longrightarrow & H \cap G_{i+1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ G_i & \longrightarrow & G_{i+1} \end{array}$$

vor. Wir betrachten den Homomorphismus

$$f : H \cap G_{i+1} \longrightarrow G_{i+1}/G_i.$$

Der Kern von f ist offenbar $H \cap G_i$. Daher ist H_i nach Lemma 5.6 ein Normalteiler in H_{i+1}, und der Quotient H_{i+1}/H_i ist nach Satz 5.12 eine Untergruppe von G_{i+1}/G_i und damit kommutativ. Also bilden die H_i eine auflösende Filtrierung von H. □

Lemma 20.3. *Es sei G eine Gruppe, $N \subseteq G$ ein Normalteiler und G/N die zugehörige Restklassengruppe. Dann ist G genau dann auflösbar, wenn dies für N und G/N gilt.*

Beweis. Sei zunächst G auflösbar. Nach Lemma 20.2 ist $N \subseteq G$ auflösbar. Betrachten wir also die Restklassengruppe $H = G/N$ und fixieren wir eine auflösende Filtrierung

$$\{e\} = G_0 \subseteq G_1 \subseteq G_2 \subseteq \ldots \subseteq G_{k-1} \subseteq G_k = G\,.$$

Es sei

$$q : G \longrightarrow H$$

der Restklassenhomomorphismus. Wir setzen $H_i = q(G_i)$, dies ist eine Filtrierung von H mit Untergruppen. Wir betrachten das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} G_i & \longrightarrow & G_{i+1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_i & \longrightarrow & H_{i+1}\ , \end{array}$$

wobei die vertikalen Homomorphismen surjektiv sind. Wir behaupten, dass H_i ein Normalteiler in H_{i+1} ist, und ziehen dazu

Lemma 5.4 heran. Sei also $h \in H_i$ und $x \in H_{i+1}$, die wir durch $\tilde{h} \in G_i$ bzw. $\tilde{x} \in G_{i+1}$ repräsentieren. Dann ist $xhx^{-1} = q(\tilde{x}\tilde{h}\tilde{x}^{-1})$ und wegen der Normalität von G_i ist $\tilde{x}\tilde{h}\tilde{x}^{-1} \in G_i$ und somit $xhx^{-1} \in H_i$. Wir betrachten die zusammengesetzte surjektive Abbildung

$$G_{i+1} \longrightarrow H_{i+1} \longrightarrow H_{i+1}/H_i\,.$$

Da G_i zum Kern dieser Abbildung gehört, gibt es aufgrund von Satz 5.10 eine surjektive Abbildung

$$G_{i+1}/G_i \longrightarrow H_{i+1}/H_i,$$

weshalb H_{i+1}/H_i ebenfalls kommutativ ist.

Seien nun N und $H = G/N$ auflösbar, sei $q : G \to G/N$ der Restklassenhomomorphismus und seien

$$\{e\} = N_0 \subseteq N_1 \subseteq N_2 \subseteq \ldots \subseteq N_{k-1} \subseteq N_k = N$$

und

$$\{e\} = H_0 \subseteq H_1 \subseteq H_2 \subseteq \ldots \subseteq H_{\ell-1} \subseteq H_\ell = H$$

auflösende Filtrierungen. Wir ergänzen die Filtrierung von N durch die Urbilder $G_j = q^{-1}(H_j)$ zu einer Filtrierung von G. Die surjektive Abbildung

$$G_{j+1} \longrightarrow H_{j+1} \longrightarrow H_{j+1}/H_j$$

besitzt den Kern G_j und zeigt, dass G_j ein Normalteiler in G_{j+1} mit kommutativer Restklassengruppe ist. □

Die Definition einer auflösbaren Gruppe legt nicht nahe, wie man eine solche Filtrierung finden könnte. Ein systematischer Weg, eine solche Filtrierung zu finden, falls es denn eine gibt, wird durch iterierte Kommutatorgruppen gegeben. Ein Kommutator ist ein Element der Form $aba^{-1}b^{-1}$.

Definition 20.4. Zu einer Gruppe G heißt die von allen Kommutatoren $aba^{-1}b^{-1}$, $a, b \in G$, erzeugte Untergruppe die *Kommutatorgruppe* von G. Sie wird mit $K(G)$ bezeichnet.

Lemma 20.5. *Es sei G eine Gruppe und $K(G)$ ihre Kommutatorgruppe. Dann gelten folgende Aussagen.*

(1) *$K(G)$ ist ein Normalteiler in G.*
(2) *Die Restklassengruppe $G/K(G)$ ist abelsch.*
(3) *Die Gruppe G ist genau dann abelsch, wenn $K(G)$ trivial ist.*

Beweis. (1). Es ist zu zeigen, dass für jedes $x \in G$ der Automorphismus

$$G \longrightarrow G,\ g \longmapsto xgx^{-1},$$

die Untergruppe $K(G)$ in sich selbst überführt. Für einen Kommutator $aba^{-1}b^{-1}$ ist

$$\begin{aligned} xaba^{-1}b^{-1}x^{-1} &= (xax^{-1})(xbx^{-1})(xa^{-1}x^{-1})(xb^{-1}x^{-1}) \\ &= (xax^{-1})(xbx^{-1})(xax^{-1})^{-1}(xbx^{-1})^{-1} \end{aligned}$$

wieder ein Kommutator. Daher wird auch jedes Produkt von Kommutatoren auf ein Produkt von Kommutatoren abgebildet und somit ist $xK(G)x^{-1} \subseteq K(G)$. (2). In der Restklassengruppe $G/K(G)$ ist

$$[a][b] = [a][b][b^{-1}a^{-1}ba] = [a][b][b^{-1}][a^{-1}][b][a] = [b][a].$$

(3). Eine Gruppe ist genau dann abelsch, wenn sämtliche Kommutatoren trivial sind. □

Definition 20.6. Es sei G eine Gruppe. Die i-te *iterierte Kommutatoruntergruppe* wird induktiv durch

$$K^0(G) = G \text{ und } K^i(G) = K(K^{i-1}(G))$$

definiert.

Die erste Kommutatorgruppe ist einfach die Kommutatorgruppe, die zweite Kommutatorgruppe ist die Kommutatorgruppe der Kommutatorgruppe, u.s.w. Dies ergibt insgesamt eine absteigende Filtrierung

$$G \supseteq K(G) \supseteq K^2(G) \supseteq K^3(G) \supseteq \ldots \supseteq .$$

Diese Filtrierung kann unendlich absteigend sein oder aber stationär werden, d.h. es kann $K^i(G) = K^{i+1}(G)$ gelten. Die Auflösbarkeit einer Gruppe kann mit dieser Filtrierung folgendermaßen charakterisiert werden.

Lemma 20.7. *Eine Gruppe ist genau dann auflösbar, wenn es ein i gibt derart, dass die i-te iterierte Kommutatorgruppe $K^i(G)$ trivial wird.*

Beweis. Wenn die Filtrierung der iterierten Kommutatorgruppen trivial wird, sagen wir

$$G \supseteq K(G) \supseteq K^2(G) \supseteq \ldots \supseteq K^{i-1}(G) \supseteq K^i(G) = \{e\},$$

so liegt unmittelbar eine auflösende Filtrierung vor, da ja

$$K^{j+1}(G) = K(K^j(G)) \subseteq K^j(G)$$

nach Lemma 20.5 ein Normalteiler ist mit einer abelschen Restklassengruppe. Sei nun G auflösbar. Wir zeigen durch Induktion über die Anzahl k der beteiligten Untergruppen in einer auflösenden Filtrierung von G, dass die Filtrierung der iterierten Kommutatorgruppen trivial wird. Dabei sind die Fälle $k = 0, 1$ klar. Wir betrachten die Untergruppe $G_{k-1} \subset G_k = G$ in der Filtrierung. Da die Restklassengruppe G/G_{k-1} kommutativ ist, wird die Kommutatorgruppe $K(G)$ unter der Restklassenabbildung auf 0 abgebildet und daher ist $K(G) \subseteq G_{k-1}$. Dabei besitzt natürlich G_{k-1} eine auflösende Filtrierung mit $k-1$ Untergruppen, und der Beweis zu Lemma 20.2 zeigt, dass dies auch für die Untergruppe $K(G)$ gilt. Nach Induktionsvoraussetzung wird also die Filtrierung von $K(G)$ durch die iterierten Kommutatorgruppen trivial. □

Lemma 20.8. *Für $n \leq 4$ sind die Permutationsgruppen S_n auflösbar.*

Beweis. Siehe Aufgabe 20.9. □

Lemma 20.9. *Für $n \geq 5$ sind die Permutationsgruppen S_n nicht auflösbar.*

Beweis. Wir betrachten eine Filtrierung

$$G_0 \subseteq G_1 \subseteq G_2 \subseteq \ldots \subseteq G_{k-1} \subseteq G_k = S_n$$

derart, dass die $G_i \subseteq G_{i+1}$ Normalteiler sind mit kommutativen Restklassengruppen. Wir werden zeigen, dass jedes G_i sämtliche Dreierzykel (also Permutationen, bei denen drei Elemente zyklisch vertauscht werden, und alle übrigen festgelassen werden), enthält. Daher kann diese Filtrierung nicht bei der trivialen Gruppe enden, also ist $G_0 \neq \{e\}$. Die Aussage über die Dreierzykel beweisen wir durch absteigende Induktion, wobei der Fall $G_k = S_n$ klar ist. Sei also vorausgesetzt, dass G_{i+1} alle Dreierzykel enthält. Sei $\langle z_1, z_2, z_3 \rangle$ ein Dreierzyklus (mit verschiedenen Elementen $z_1, z_2, z_3 \in \{1, \ldots, n\}$.) Wegen $n \geq 5$ gibt es noch zwei weitere Elemente $x, y \in \{1, \ldots, n\}$, die von z_1, z_2, z_3 und untereinander verschieden sind. Nach Induktionsvoraussetzung gehören die Dreierzykel

$$\sigma = \langle z_1, z_2, x \rangle \text{ und } \tau = \langle z_1, z_3, y \rangle$$

zu G_{i+1}. Eine elementare Überlegung zeigt

$$\langle z_1, z_2, z_3 \rangle = \langle z_3, y, z_2 \rangle \circ \langle z_1, y, z_3 \rangle = (\sigma\tau\sigma^{-1}) \circ \tau^{-1} = \sigma\tau\sigma^{-1}\tau^{-1}.$$

Dieses Element wird unter der Restklassenabbildung

$$G_{i+1} \longrightarrow G_{i+1}/G_i$$

auf das neutrale Element abgebildet, da ja die Restklassengruppe kommutativ ist. Also ist $\langle z_1, z_2, z_3 \rangle \in G_i$. □

21. Vorlesung

Definition 21.1. Es sei $K \subseteq L$ eine algebraische Körpererweiterung. Man nennt einen Körper N mit $L \subseteq N$ eine *normale Hülle* von L über K, wenn N der gemeinsame Zerfällungskörper aller Minimalpolynome von Elementen aus L ist.

Lemma 21.2. *Sei $K \subseteq L$ eine endliche Körpererweiterung. Dann existiert die normale Hülle $L \subseteq N$.*

Beweis. Es sei $L = K(x_1, \ldots, x_n)$ und seien $P_1, \ldots, P_n$ die zugehörigen Minimalpolynome. Wir setzen $P = P_1 \cdots P_n$, und es sei N der Zerfällungskörper von P über L. Nach Satz 14.5 ist die Körpererweiterung $K \subseteq N$ normal. □

21.1. **Auflösbare Körpererweiterungen.**

Wir kommen nun zu einer Ausgangsfrage zurück, nämlich zur Frage, ob man für jedes gegebene Polynom $P \in \mathbb{Q}[X]$ eine Kette von einfachen Radikalerweiterungen $\mathbb{Q} \subseteq K_1 \subseteq \ldots \subseteq K_n = K$ finden kann, so dass K die Nullstellen von P enthält. Dies ist die körpertheoretische Variante der Frage, ob es entsprechend zur Lösungsformel von Cardano auch für höhere Grade eine Lösung mit Radikalen gibt. Diese Fragestellung führt zu den folgenden Begriffen.

Definition 21.3. Eine Körpererweiterung $K \subseteq L$ heißt *auflösbar*, wenn es eine Radikalerweiterung $K \subseteq M$ mit $L \subseteq M$ gibt.

Definition 21.4. Es sei K ein Körper und $F \in K[X]$ ein Polynom. Man sagt, dass das Polynom F *auflösbar* ist (bzw., dass die Gleichung $F(x) = 0$ *auflösbar* ist), wenn die Körpererweiterung $K \subseteq Z(F)$ auflösbar ist.

Wir erinnern daran, dass eine Radikalerweiterung aus einer Kette von einfachen Radikalerweiterungen besteht, wobei eine einfache Radikalerweiterung durch die Adjunktion einer gewissen Wurzel eines Elements gegeben ist.[21] Eine Radikalerweiterung $K \subseteq L$ nennt man eine *m-Radikalerweiterung*, wenn es eine Körperkette aus einfachen Radikalerweiterungen $L_{i+1} = L_i(x_i)$ gibt, wobei die Beziehung $x_i^m \in L_i$ gilt. Jede Radikalerweiterung ist eine *m-Radikalerweiterung* für viele m, beispielsweise kann man jedes gemeinsame Vielfache der Einzelexponenten der beteiligten einfachen Radikalerweiterungen nehmen. Ein solches m hat (ähnlich wie der Exponent bei Kummererweiterungen) lediglich die Funktion, gewisse numerische Daten durch eine „gemeinsame Schranke“ zu kontrollieren.

Lemma 21.5. *Es sei $K \subseteq L$ eine m-Radikalerweiterung. Dann ist auch die normale Hülle N von L eine m-Radikalerweiterung von K.*

Beweis. Es sei eine Körperkette aus einfachen Radikalerweiterungen gegeben, also

$$K = L_0 \subseteq L_1 \subseteq \ldots \subseteq L_n = L$$

mit $L_{i+1} = L_i(x_i)$ und $x_i^m \in L_i$. Wir zeigen durch Induktion über n, dass die normale Hülle von L über K ebenfalls eine m-Radikalerweiterung ist. Bei $n = 0$ ist nichts zu zeigen. Wir nehmen also an, dass die Aussage schon für kleinere Zahlen $n' < n$ bewiesen sei. Es sei $L \subseteq N$ die normale Hülle, die die normale Hülle N_{n-1} von L_{n-1} enthält. Nach Induktionsvoraussetzung ist $K \subseteq N_{n-1}$ eine m-Radikalerweiterung. In N_{n-1} zerfallen die Minimalpolynome der x_i, $i \leq n-2$, und in N zerfallen die Minimalpolynome der x_i, $i \leq n-1$. Daher ist $N = N_{n-1}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$, wobei die α_j die Nullstellen des Minimalpolynoms von x_{n-1} sind. Wegen $x_{n-1}^m = a_{n-1} \in L_{n-1}$ sind diese α_j auch Nullstellen des Polynoms $X^m - a_{n-1}$. □

[21] Man beachte, dass eine einfache Radikalerweiterung *nicht* das gleiche ist wie eine Radikalerweiterung, die zugleich eine einfache Körpererweiterung ist.

Wir kommen nun zur gruppentheoretischen Charakterisierung von auflösbaren Körpererweiterungen. Dabei beschränken wir auf Charakteristik null. Dies sichert, dass es zu jeder Zahl n primitive n-te Einheitswurzeln in einem Erweiterungskörper gibt. Durch die Hinzunahme von Einheitswurzeln können wir auf eine Situation hin transformieren, in der wir mittels Kummertheorie aus der Kommutativität von gewissen Galoisgruppen auf die Existenz von Wurzeln schließen können.

Satz 21.6. *Es sei K ein Körper der Charakteristik 0 und sei $K \subseteq L$ eine Galoiserweiterung. Dann ist die Körpererweiterung $K \subseteq L$ genau dann auflösbar, wenn ihre Galoisgruppe $\mathrm{Gal}\,(L|K)$ auflösbar ist.*

Beweis. Es sei zuerst die Körpererweiterung $K \subseteq L$ auflösbar, und zwar sei $L \subseteq M$ eine Körpererweiterung derart, dass $K \subseteq M$ eine Radikalerweiterung ist. Es sei m dabei ein gemeinsamer „Radikalexponent“ der einfachen Radikalerweiterungen. Da wir in Charakteristik null sind, können wir zu M eine m-te primitive Einheitswurzel ζ adjungieren und erhalten eine Radikalerweiterung $K \subseteq M' = M(\zeta)$. Wir ersetzen M' durch seine normale Hülle M'', die nach Lemma 21.5 ebenfalls eine m-Radikalerweiterung von K ist. Da wir in Charakteristik 0 sind, ist $K \subseteq M''$ eine Galoiserweiterung. Wir können also davon ausgehen, dass eine Kette

$$K = L_0 \subseteq K(\zeta) = L_1 \subseteq L_2 \subseteq \ldots \subseteq L_k = M$$

vorliegt, wobei $K \subseteq M$ galoissch ist und wo die sukzessiven Körpererweiterungen $L_i \subseteq L_{i+1}$ einfache Radikalerweiterungen sind. Es sei $G = \mathrm{Gal}\,(M|K)$ und wir setzen

$$G_i \,=\, \mathrm{Gal}\,(M|L_i).$$

Dabei gelten nach Lemma 15.2 die natürlichen Inklusionen

$$G_k = \{\mathrm{id}\} \subseteq G_{k-1} \subseteq G_{k-2} \subseteq \ldots \subseteq G_1 \subseteq G_0 = G\,.$$

Da die Zwischenerweiterungen $L_i \subseteq L_{i+1}$ für $i \geq 1$ einfache Radikalerweiterungen und in L_1 die benötigten Einheitswurzeln vorhanden sind, folgt aus Satz 17.5, dass es sich um Galoiserweiterungen mit abelscher Galoisgruppe handelt. Aufgrund von Satz 16.4 sind daher die G_{i+1} Normalteiler in G_i und die Restklassengruppen G_i/G_{i+1} sind kommutativ. Die Erweiterung $K \subseteq K(\zeta) = L_1$ besitzt nach Aufgabe 19.11 ebenfalls eine abelsche Galoisgruppe. Daher liegt insgesamt eine Filtrierung vor, die G als auflösbar erweist. Da $K \subseteq L$ eine Galoiserweiterung ist, gilt wieder nach Satz 16.4 die Beziehung

$$\mathrm{Gal}\,(L|K) \,=\, G/\,\mathrm{Gal}\,(M|L),$$

so dass auch $\mathrm{Gal}\,(L|K)$ wegen Lemma 20.3 eine auflösbare Gruppe ist.

Sei nun vorausgesetzt, dass die Galoisgruppe $G = \mathrm{Gal}\,(L|K)$ auflösbar ist, und sei

$$\{\mathrm{Id}\} = G_k \subseteq G_{k-1} \subseteq G_{k-2} \subseteq \ldots \subseteq G_1 \subseteq G_0 = G$$

eine Filtrierung mit Untergruppen derart, dass jeweils $G_{i+1} \subseteq G_i$ ein Normalteiler ist mit abelscher Restklassengruppe G_i/G_{i+1}. Wir setzen $L_i = \mathrm{Fix}\,(G_i)$, so dass nach Lemma 15.2 und Satz 15.6 die Körperkette

$$K = L_0 \subseteq L_1 \subseteq \ldots \subseteq L_k = L$$

vorliegt. Dabei sind nach Korollar 15.7 die Körpererweiterungen $L_i \subseteq L$ galoissch, und ihre Galoisgruppen sind G_i gemäß Satz 16.1. Da die G_{i+1} Normalteiler in G_i sind, sind aufgrund von Satz 16.4 die Körpererweiterungen $L_i \subseteq L_{i+1}$ galoissch mit Galoisgruppe $\mathrm{Gal}\,(L_{i+1}|L_i) = G_i/G_{i+1}$. Diese sukzessiven Erweiterungen sind also Galoiserweiterungen mit abelscher Galoisgruppe. Es sei m der Exponent von G. Es sei $L \subseteq M$ ein m-ter Kreisteilungskörper, also ein Zerfällungskörper von X^m-1 über L, und sei $\zeta \in M$ eine m-te primitive Einheitswurzel. Es ist somit $M = L(\zeta)$. Wir setzen $M_i = L_i(\zeta)$ (innerhalb von M) und haben dann die Körperkette

$$K \subseteq M_0 = K(\zeta) \subseteq M_1 \subseteq \ldots \subseteq M_k = M\,.$$

Hierbei gilt $M_{i+1} = M_i L_{i+1}$. Nach Satz 19.6 ist $M_i \subseteq M_{i+1}$ ebenfalls galoissch, und es gilt die Untergruppenbeziehung

$$\mathrm{Gal}\,(M_{i+1}|M_i) = \mathrm{Gal}\,(L_{i+1}|L_{i+1} \cap M_i) \subseteq \mathrm{Gal}\,(L_{i+1}|L_i)\,,$$

so dass diese Galoisgruppen auch abelsch sind. Da die m-te primitive Einheitswurzel ζ zu M_0 gehört, sind die Erweiterungen $M_i \subseteq M_{i+1}$ allesamt Kummererweiterungen und damit nach Korollar 17.4 auch Radikalerweiterungen. Da auch $K \subseteq M_0 = K(\zeta)$ eine (einfache) Radikalerweiterung ist, ist insgesamt $K \subseteq M$ eine Radikalerweiterung, die L umfasst. Somit ist $K \subseteq L$ auflösbar. □

Korollar 21.7. *Es sei K ein Körper der Charakteristik 0 und sei $F \in K[X]$ ein Polynom. Dann ist F genau dann auflösbar, wenn die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}\,(Z(F)|K)$ des Zerfällungskörpers von F auflösbar ist.*

Beweis. Wegen Satz 15.6 ist $K \subseteq Z(F)$ eine Galoiserweiterung, so dass die Aussage direkt aus Satz 21.6 folgt. □

Ein wichtiges unmittelbares Korollar aus der vorstehenden Charakterisierung ist die Auflösbarkeit mit Radikalen von polynomialen Gleichungen vom Grad vier, wobei man dieses Ergebnis auch direkt über die (recht komplizierten, aber) expliziten Cardanoschen Lösungsformeln zum vierten Grad erhalten kann.

Korollar 21.8. *Es sei K ein Körper der Charakteristik 0 und sei $F \in K[X]$ ein Polynom vom Grad ≤ 4. Dann ist F auflösbar. D.h. es gibt eine Radikalerweiterung $K \subseteq M$, so dass F über M in Linearfaktoren zerfällt.*

Beweis. Es sei L der Zerfällungskörper von F über K, der aufgrund der Voraussetzung über die Charakteristik nach Satz 15.6 eine Galoiserweiterung ist. Sei $G = \mathrm{Gal}\,(L|K)$. Über L besitzt F maximal $d = \mathrm{grad}\,(F)$ Nullstellen.

Nach Lemma 13.1 ist G eine Untergruppe der Permutationsgruppe der Nullstellen, also ist jedenfalls $G \subseteq S_4$. Wegen Lemma 20.8 und Lemma 20.2 ist somit G eine auflösbare Gruppe. Aus Satz 21.6 folgt daher die Auflösbarkeit des Zerfällungskörpers über K. □

Das entscheidende Schlussfolgerung aus der obigen Charakterisierung ist aber, dass nicht alle Gleichungen auflösbar sind. Das ist Gegenstand der nächsten Vorlesung.

22. Vorlesung

22.1. **Polynome mit unauflösbarer Galoisgruppe.**

Wir möchten nun zeigen, dass gewisse Körpererweiterungen, und zwar die Zerfällungskörper von gewissen Polynomen vom Grad ≥ 5, nicht auflösbar sind. Dazu müssen wir aufgrund der Galoistheorie für auflösbare Körpererweiterungen und den gruppentheoretischen Überlegungen zu den Permutationsgruppen S_n, $n \geq 5$, (Lemma 20.8) lediglich nachweisen, dass diese Permutationsgruppen als Galoisgruppen auftreten. Dazu bedarf es einiger Vorbereitungen über Permutationsgruppen.

Zu einer Permutationsgruppe $S(M)$ auf einer Menge M liefert jede Teilmenge $T \subseteq M$ eine Untergruppe $S(T) \subseteq S(M)$. Man setzt einfach die Permutation auf T durch die Identität auf $M \setminus T$ zu einer Permutation auf ganz M fort.

Lemma 22.1. *Es sei M eine endliche Menge und $T_1, T_2 \subseteq M$ seien Teilmengen mit $T_1 \cap T_2 \neq \emptyset$. Es sei $G \subseteq S(M)$ eine Untergruppe der Permutationsgruppe, die sowohl $S(T_1)$ als auch $S(T_2)$ umfasst. Dann ist $S(T_1 \cup T_2) \subseteq G$.*

Beweis. Jedes Element $\sigma \in S(T_1 \cup T_2)$ lässt sich nach Lemma Anhang 3.6 als Produkt von Transpositionen auf $T_1 \cup T_2$ schreiben. Es muss also lediglich gezeigt werden, dass solche Transpositionen zu G gehören. Sei $\sigma \in S(T_1 \cup T_2)$ eine Transposition, und zwar vertausche σ die Elemente a und b, also $\sigma = \langle a, b \rangle$. Wenn beide Elemente zu T_1 (oder zu T_2) gehören, sind wir fertig. Sei also $a \in T_1$ und $b \in T_2$. Es sei ferner $c \in T_1 \cap T_2$, und c sei von a und b verschieden (sonst gehören beide zu einer der Teilmengen). Dann ist

$$\sigma = \langle a, b \rangle = \langle a, c \rangle \circ \langle b, c \rangle \circ \langle a, c \rangle$$

und diese drei Transpositionen gehören zu $S(T_1)$ oder zu $S(T_2)$ und damit zu G. □

Definition 22.2. Es sei M eine Menge und sei $G = S(M)$ die zugehörige Permutationsgruppe. Eine Untergruppe $H \subseteq G$ heißt *transitiv*, wenn es zu je zwei Elementen $x, y \in M$ ein $\sigma \in H$ gibt mit $\sigma(x) = y$.

Lemma 22.3. *Es sei p eine Primzahl und S_p die Permutationsgruppe zu $\{1, \ldots, p\}$. Es sei $H \subseteq S_p$ eine transitive Untergruppe, die eine Transposition enthalte. Dann ist $H = S_p$.*

Beweis. Sei $M = \{1, \ldots, p\}$. Wir betrachten Teilmengen $T \subseteq M$ derart, dass $S(T) \subseteq H$ ist, und wollen $T = M$ zeigen. Sei dazu T_1 eine solche Teilmenge mit maximaler Elementzahl, die wir k nennen. Da es mindestens eine Transposition in H gibt, ist $k \geq 2$. Für jedes $\sigma \in H$ ist $T_\sigma = \sigma(T_1)$ ebenfalls eine k-elementige Menge mit $S(T_\sigma) \subseteq H$. Für $\tau \in S(T_\sigma)$ ist nämlich

$$\tau = \sigma(\sigma^{-1}\tau\sigma)\sigma^{-1},$$

und $\sigma^{-1}\tau\sigma$ ist eine Permutation auf T_1, so dass $\tau \in H$ gilt. Für Permutationen $\sigma_1, \sigma_2 \in H$ ist entweder $T_{\sigma_1} = T_{\sigma_2}$ oder $T_{\sigma_1} \cap T_{\sigma_2} = \emptyset$, da andernfalls nach Lemma 22.1 $S(T_1 \cup T_2) \subseteq H$ wäre im Widerspruch zur Maximalität von k. Sei nun $x \in M$ vorgegeben und ein $y \in T_1$ fixiert. Aufgrund der Transitivität gibt es ein $\sigma \in H$ mit $\sigma(y) = x$. Dann ist natürlich $x \in T_\sigma$. Das bedeutet, dass die Mengen T_σ, $\sigma \in H$, die Gesamtmenge M überdecken. Wegen der Gleichmächtigkeit dieser Mengen ist p ein Vielfaches von k und somit ist $p = k$, also $M = T_1$. □

Lemma 22.4. *Sei p eine Primzahl und $F \in \mathbb{Q}[X]$ ein irreduzibles Polynom vom Grad p, das genau $p-2$ reelle Nullstellen besitzt. Dann ist die Galoisgruppe des Zerfällungskörpers $\mathbb{Q} \subseteq Z(F)$ gleich der Permutationsgruppe S_p. Bei $p \geq 5$ ist diese Körpererweiterung nicht auflösbar.*

Beweis. Es seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-2}$ die reellen Nullstellen und α_{p-1}, α_p die beiden nichtreellen komplexen Nullstellen. Nach Lemma 13.1 ist die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}\,(Z(F)|\mathbb{Q})$ in natürlicher Weise eine Untergruppe der Permutationsgruppe der Nullstellen. Wir zeigen, dass es sich um die volle Permutationsgruppe handelt. Die komplexe Konjugation induziert einen $\mathbb{Q}$-Automorphismus auf L, der die reellen Nullstellen unverändert lässt und die beiden nichtreellen Nullstellen α_{p-1} und α_p ineinander überführt. Daher bewirkt dieser Automorphismus auf den Nullstellen eine Transposition. Da F über $\mathbb{Q}$ irreduzibel ist, ist F für jede Nullstelle das Minimalpolynom und daher sind alle Nullstellen zueinander konjugiert. Nach Satz 13.2 gibt es somit für je zwei Nullstellen α und β einen Automorphismus φ mit $\varphi(\alpha) = \beta$. Damit sind die Voraussetzungen von Lemma 22.3 erfüllt und somit ist die Galoisgruppe die volle Permutationsgruppe. □

Korollar 22.5. *Sei a eine Primzahl und sei*

$$F = X^5 + a^2X^4 - a \in \mathbb{Q}[X]\,.$$

Dann gelten folgende Aussagen.

(1) *Das Polynom F ist irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$.*
(2) *F besitzt drei reelle Nullstellen und darüber hinaus zwei komplexe nichtreelle Nullstellen.*
(3) *Die Galoisgruppe des Zerfällungskörpers $\mathbb{Q} \subseteq Z(F)$ ist die Permutationsgruppe S_5.*
(4) *Die Körpererweiterung $\mathbb{Q} \subseteq Z(F)$ ist nicht auflösbar.*

Beweis. (1) ergibt sich aus dem Kriterium von Eisenstein. (2). Wir berechnen einige Funktionswerte von F. Es ist

$$F(-a^2) = -a^{10} + a^{10} - a = -a < 0,$$
$$F(-1) = -1 + a^2 - a = -1 + a(a-1) > 0,$$
$$F(0) = -a < 0$$

und schließlich

$$F(1) = 1 + a^2 - a > 0.$$

Nach dem Zwischenwertsatz gibt es daher mindestens drei reelle Nullstellen. Die Ableitung von F ist

$$F' = 5X^4 + 4a^2X^3 = 5X^3(X + \frac{4}{5}a^2)$$

und besitzt die zwei reellen Nullstellen 0 und $-\frac{4}{5}a^2$. Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung kann somit F nicht mehr als drei reelle Nullstellen besitzen, da zwischen zwei Nullstellen stets eine Nullstelle der Ableitung liegt. Die Nullstellen der Ableitung sind wegen

$$F(-\frac{4}{5}a^2) \neq 0$$

(wegen der Irreduzibilität von F über $\mathbb{Q}$) keine Nullstelle von F, so dass F keine mehrfache Nullstelle besitzen kann. Daher muss es zwei weitere komplexe nichtreelle Nullstellen geben. (3) und (4) folgen aus (1), (2) und Lemma 22.4. □

Paolo Ruffini (1765-1822

Niels Henrik Abel (1802-1829)

Das erste Beispiel für ein solches Polynom ist $X^5 + 4X^4 - 2$. Durch die Existenz solcher Polynome folgt die allgemeine Unauflösbarkeit für algebraische Gleichungen vom Grad 5 und höher. Diese Aussage heißt *Satz von Abel-Ruffini.*

Satz 22.6. *Für $n \geq 5$ gibt es polynomiale Gleichungen vom Grad n, die nicht auflösbar sind.*

Beweis. Für $n = 5$ folgt dies direkt aus Korollar 22.5, und für $n \geq 6$ kann man ein unauflösbares Polynom vom Grad 5 einfach mit einem beliebigen Polynom vom Grad $n - 5$ multiplizieren. □

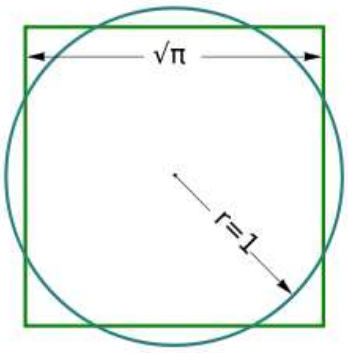
23. Vorlesung

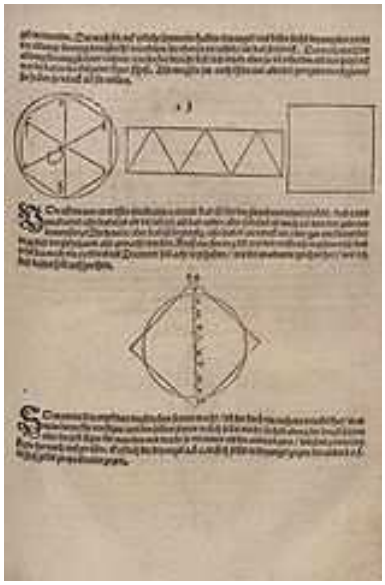
Unter den drei klassischen Problemen der antiken Mathematik versteht man

(1) die Quadratur des Kreises,
(2) die Dreiteilung des Winkels,
(3) die Würfelverdoppelung.

Dabei sollen diese Konstruktionen ausschließlich mit Zirkel und Lineal durchgeführt werden, wobei dies natürlich präzisiert werden muss. Nach langen vergeblichen Versuchen, solche Konstruktionen zu finden, ergab sich im Laufe des neunzehnten Jahrhunderts die Erkennntnis, dass es keine solche Konstruktionen geben kann. Dies erfordert natürlich, dass man eine Übersicht über alle möglichen Konstruktionen erhalten kann.

23.1. **Konstruktionen mit Zirkel und Lineal.**





Auch Albrecht Dürer hatte Spaß
an der Quadratur des Kreises

Unter der Ebene E verstehen wir im Folgenden die Anschauungsebene, die wir später mit $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ identifizieren. Zunächst sind die Konstruktionen „koordinatenfrei“. An elementargeometrischen Objekten verwenden wir Punkte, Geraden und Kreise. An elementargeometrischen Gesetzmäßigkeiten verwenden wir, dass zwei verschiedene Punkte eine eindeutige Gerade definieren, dass zwei Geraden entweder identisch sind oder parallel und schnittpunktfrei oder genau einen Schnittpunkt haben, u.s.w.

Definition 23.1. Es sei $M \subseteq E$ eine Teilmenge der Ebene E. Eine Gerade $G \subset E$ heißt aus M *elementar konstruierbar*, wenn es zwei Punkte $P, Q \in M$, $P \neq Q$, gibt derart, dass die Verbindungsgerade von P und Q gleich G ist. Ein Kreis $C \subseteq E$ heißt aus M *elementar konstruierbar*, wenn es zwei Punkte $Z, S \in M$, $Z \neq S$, gibt derart, dass der Kreis mit dem Mittelpunkt Z und durch den Punkt S gleich C ist.

Man kann also an zwei Punkte aus der vorgegebenen Menge M das *Lineal anlegen* und die dadurch definierte Gerade zeichnen, und man darf die *Nadelspitze des Zirkels* in einen Punkt der Menge stechen und die *Stiftspitze des Zirkels* an einen weiteren Punkt der Menge anlegen und den Kreis ziehen.

Wenn ein Koordinatensystem vorliegt, und zwei Punkte $P = (p_1, p_2)$ und $Q = (q_1, q_2)$ gegeben sind, so ist die Gleichung der Verbindungsgeraden der beiden Punkte bekanntlich

$$(p_1 - q_1)y + (q_2 - p_2)x + q_1p_2 - q_2p_1 = 0\,.$$

Wenn zwei Punkte $Z = (z_1, z_2)$ und $S = (s_1, s_2)$ gegeben sind, so besitzt der Kreis mit dem Mittelpunkt Z durch den Punkt S die Kreisgleichung

$$(x - z_1)^2 + (y - z_2)^2 - (s_1 - z_1)^2 - (s_2 - z_2)^2 = 0\,.$$

Definition 23.2. Es sei $M \subseteq E$ eine Teilmenge der Ebene E. Dann heißt ein Punkt $P \in E$ aus M *in einem Schritt konstruierbar*, wenn eine der folgenden Möglichkeiten zutrifft.

(1) Es gibt zwei aus M elementar konstruierbare Geraden G_1 und G_2 mit $G_1 \cap G_2 = \{P\}$.
(2) Es gibt eine aus M elementar konstruierbare Gerade G und einen aus M elementar konstruierbaren Kreis C derart, dass P ein Schnittpunkt von G und C ist.
(3) Es gibt zwei aus M elementar konstruierbare Kreise C_1 und C_2 derart, dass P ein Schnittpunkt der beiden Kreise ist.

Definition 23.3. Es sei $M \subseteq E$ eine Teilmenge der Ebene E. Dann heißt ein Punkt $P \in E$ aus M *konstruierbar* (oder *mit Zirkel und Lineal konstruierbar*), wenn es eine Folge von Punkten

$$P_1, \ldots, P_n = P$$

gibt derart, dass P_i jeweils aus $M \cup \{P_1, \ldots, P_{i-1}\}$ in einem Schritt konstruierbar ist.

Definition 23.4. Eine Zahl $z \in \mathbb{C} \cong E$ heißt *konstruierbar* oder *konstruierbare Zahl*, wenn sie aus der Startmenge

$$\{0, 1\} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist.

Bemerkung 23.5. Man startet also mit zwei beliebig vorgegebenen Punkten, die man 0 und 1 nennt und die dann die arithmetische Funktion übernehmen, die mit diesen Symbolen verbunden wird. Als erstes kann man die Gerade durch 0 und 1 ziehen, und diese Gerade wird mit den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ identifiziert. Wir werden gleich sehen, dass man eine zu $\mathbb{R}$ senkrechte Gerade durch 0 konstruieren kann, mit deren Hilfe ein *kartesisches Koordinatensystem* entsteht und mit dem wir die Ebene mit den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ identifizieren können.

In den folgenden Konstruktionen verwenden wir einige Begrifflichkeiten aus der euklidischen Geometrie, wie Winkel, senkrecht, parallel, Strecke und elementare Grundtatsachen wie die Strahlensätze, Symmetriesätze und den Satz des Pythagoras.

Lemma 23.6. *In der Ebene lassen sich folgende Konstruktionen mit Zirkel und Lineal durchführen.*

(1) *Zu einer Geraden G und zwei Punkten $Q_1, Q_2 \in G$ kann man die zu G senkrechte Gerade zeichnen, die die Strecke zwischen Q_1 und Q_2 halbiert.*
(2) *Zu einer Geraden G und einem Punkt $P \in G$ kann man die zu G senkrechte Gerade durch P zeichnen.*
(3) *Zu einer Geraden G und einem Punkt P kann man die zu G senkrechte Gerade durch P zeichnen.*
(4) *Zu einer gegebenen Geraden G und einem gegebenen Punkt P kann man die Gerade G' durch P zeichnen, die zu G parallel ist.*

Beweis. Wir verwenden im Beweis einige elementargeometrische Grundtatsachen.

(1) Wir zeichnen die beiden Kreise C_1 und C_2 mit dem Mittelpunkt Q_1 durch Q_2 und umgekehrt. Die beiden Schnittpunkte von C_1 und C_2 seien S_1 und S_2. Deren Verbindungsgerade steht senkrecht auf G und halbiert die Strecke zwischen Q_1 und Q_2.
(2) Man zeichnet einen Kreis C mit P als Mittelpunkt und einem beliebigen Radius (dazu braucht man neben P noch einem weiteren Punkt). Es seien Q_1 und Q_2 die beiden Schnittpunkte der Gerade G mit C. Für diese beiden Punkte führen wir die in (1) beschriebene Konstruktion durch. Diese Halbierungsgerade läuft dann durch P und steht senkrecht auf G.
(3) Wenn P auf der Geraden liegt, sind wir schon fertig mit der Konstruktion in (2). Andernfalls zeichnen wir einen Kreis mit P als Mittelpunkt mit einem hinreichend großen Radius derart, dass sich zwei Schnittpunkte Q_1 und Q_2 mit der Geraden ergeben (dafür braucht man, dass mindestens ein weiterer Punkt zur Verfügung steht). Dann führt wieder die erste Konstruktion zum Ziel.

(4) Dafür führt man zuerst die Konstruktion der Senkrechten S durch P wie in (3) beschrieben durch. Mit P und S führt man dann die Konstruktion (2) durch.

□

23.2. **Arithmetische Eigenschaften von konstruierbaren Zahlen.**

Von nun an werden wir stets die Ebene E mit der reellen Zahlebene $\mathbb{R}^2$ bzw. der komplexen Ebene $\mathbb{C}$ identifizieren. Dies erlaubt es, die geometrischen Objekte und die Konstruktionen mit Hilfe von Koordinaten zu beschreiben.

Lemma 23.7. *Sei $P = (x, y) \in \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ ein Punkt in der Ebene. Dann ist P genau dann konstruierbar, wenn die beiden Koordinaten x und y konstruierbar sind.*

Beweis. Zunächst einmal kann man aufgrund der vorgegebenen Punkte die x-Achse und dann wegen Lemma 23.6 die dazu senkrechte Achse durch 0, also die y-Achse, konstruieren. Es steht also das Achsenkreuz zur Verfügung. Wenn nun P gegeben ist, so kann man aufgrund von Lemma 23.6 die zu den Achsen parallelen Geraden zeichnen und erhält somit die Koordinatenwerte. Den y-Wert kann man dann noch mit einem Kreis mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt auf die x-Achse transportieren. Wenn umgekehrt die beiden Koordinaten gegeben sind, so kann man durch diese die senkrechten Geraden zeichnen. Deren Schnittpunkt ist der gesuchte Punkt. □

Lemma 23.8. *Es sei G eine mit 0 und 1 markierte Gerade, die wir mit den reellen Zahlen identifizieren. Es seien zwei Punkte $a, b \in G$ gegeben. Dann gelten folgende Aussagen*

(1) *Die Summe $a + b$ ist (mit Zirkel und Lineal) konstruierbar.*
(2) *Das Produkt ab ist konstruierbar.*
(3) *Bei $b \neq 0$ ist der Quotient a/b konstruierbar.*

Beweis. (1) Wir verwenden eine zu G senkrechte Gerade H durch 0 und darauf einen Punkt $x \neq 0$. Dazu nehmen wir die zu H senkrechte Gerade G' durch x, die also parallel zu G ist. Wir zeichen die Gerade H', die parallel zu H ist und durch $a \in G$ verläuft. Der Schnittpunkt von H' und G' markieren wir als a', so dass der Abstand von a' zu x gleich a ist. Jetzt zeichnen wir die Gerade L durch b und x und dazu die parallele Gerade L' durch a'. Der Schnittpunkt von L' mit G ist $y = a + b$, da x, b, a', y ein Parallelogramm bilden. Zum Beweis von (2) und (3) verwenden wir wieder die zu G senkrechte Gerade H. Wir schlagen Kreise mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt durch 1, a und b und markieren die entsprechenden Punkte auf H als $1'$, a' und b'. Dabei wählt man $1'$ als einen der beiden Schnittpunkte und a' und b' müssen dann auf den entsprechenden Halbgeraden sein. Um das Produkt zu erhalten, zeichnet man die Gerade L durch a und $1'$ und dazu die parallele

Gerade L' durch b'. Diese Gerade schneidet G in genau einem Punkt x. Für diesen Punkt gilt nach dem Strahlensatz das Steckenverhältnis

$$\frac{x}{a} = \frac{b'}{1'} = \frac{b}{1}.$$

Also ist $x = ab$. Um den Quotienten $\frac{a}{b}$ bei $b \neq 0$ zu erhalten, zeichnet man die Gerade T durch 1 und b' und dazu parallel die Gerade T' durch a'. Der Schnittpunkt von T' mit G sei z. Aufgrund des Strahlensatzes gilt die Beziehung

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = z.$$

□

Satz 23.9. *Die Menge der konstruierbaren Zahlen ist ein Unterkörper von* $\mathbb{C}$.

Beweis. Die 0 und die 1 sind als Ausgangsmenge automatisch darin enthalten. Zu einem Punkt P gehört auch der „gegenüberliegende“ Punkt $-P$ dazu, da man ihn konstruieren kann, indem man die Gerade durch P und 0 und den Kreis mit Mittelpunkt 0 und Radius P zeichnet; der zweite Schnittpunkt von diesem Kreis und dieser Geraden ist $-P$. Die Menge der konstruierbaren Zahlen ist also unter der Bildung des Negativen abgeschlossen.

Aufgrund von Lemma 23.7 kann man sich beim Nachweis der Körpereigenschaften darauf beschränken, dass die reellen konstruierbaren Zahlen einen Körper bilden. Dies folgt aber aus Lemma 23.8. □

23.3. **Konstruktion von Quadratwurzeln.**

Wenn man sich zwei Punkte 0 und 1 vorgibt und man die dadurch definierte Gerade mit $\mathbb{R}$ identifiziert, so wird diese Gerade durch 0 in zwei Hälften (Halbgeraden) unterteilt, wobei man dann diejenige Hälfte, die 1 enthält, als positive Hälfte bezeichnet. Aus solchen positiven reellen Zahlen kann man mit Zirkel und Lineal die Quadratwurzel ziehen.

Lemma 23.10. *Es sei G eine mit zwei Punkten 0 und 1 markierte Gerade, die wir mit den reellen Zahlen identifizieren. Es sei $a \in G_+$ eine positive reelle Zahl. Dann ist die Quadratwurzel $\sqrt{a}$ aus $0, 1, a$ mittels Zirkel und Lineal konstruierbar.*

Beweis. Wir zeichnen den Kreis mit Mittelpunkt 0 durch 1 und markieren den zweiten Schnittpunkt dieses Kreises mit G als -1. Wir halbieren die Strecke zwischen -1 und a gemäß Lemma 23.6 und erhalten den konstruierbaren Punkt $M = \frac{a-1}{2} \in G$. Der Abstand von M zu a als auch zu -1 ist dann $\frac{a+1}{2}$. Wir zeichnen den Kreis mit Mittelpunkt M und Radius $\frac{a+1}{2}$ und markieren einen der Schnittpunkte des Kreises mit der zu G senkrechten Geraden H durch 0 als x. Wir wenden den *Satz des Pythagoras* auf das Dreieck

mit den Ecken $0, x, M$ an. Daraus ergibt sich

$$x^2 = (\frac{a+1}{2})^2 - (\frac{a-1}{2})^2 = \frac{a^2+2a+1-(a^2-2a+1)}{4} = \frac{4a}{4} = a.$$

Also repräsentiert x die Quadratwurzel aus a. □

24. Vorlesung

24.1. **Die Quadratur des Rechtecks.**

Korollar 24.1. *Es sei ein Rechteck in der Ebene gegeben. Dann lässt sich mit Zirkel und Lineal ein flächengleiches Quadrat konstruieren.*

Beweis. Die Längen der Rechteckseiten seien a und b. Wir wählen einen Eckpunkt des Rechtecks als Nullpunkt und verwenden die Geraden durch die anliegenden Rechteckseiten als Koordinatenachsen. Wir wählen willkürlich einen Punkt 1 auf einer der Achsen und schlagen einen Kreis um den Nullpunkt durch den Eckpunk auf der anderen Achse, so dass beide Seitenlängen auf der mit 0 und 1 markierten Achse liegen. Darauf führen wir die Multiplikation ab nach Lemma 23.8 durch. Aus diesem Produkt zieht man nun gemäß Lemma 23.10 die Quadratwurzel und erhält somit $\sqrt{ab}$. Mit dieser Streckenlänge konstruiert man ein Quadrat, dessen Flächeninhalt gleich dem Flächeninhalt des vorgegebenen Rechtecks ist. □

Man beachte, dass im Beweis der vorstehenden Aussage die Zahl ab von der Wahl der 1 abhängt, nicht aber $\sqrt{ab}$ und damit natürlich auch nicht die Seitenlänge des konstruierten Quadrats.

24.2. **Konstruierbare und algebraische Zahlen.**

Wir wollen nun die konstruierbaren Zahlen algebraisch mittels quadratischer Körpererweiterungen charakterisieren. Unter einer reell-quadratischen Körpererweiterung eines Körpers $K \subseteq \mathbb{R}$ verstehen wir eine quadratische Körpererweiterung $K \subseteq K'$ mit $K' \subseteq \mathbb{R}$, die sich also innerhalb der reellen Zahlen abspielt. Eine solche Körpererweiterung ist immer gegeben durch die Adjunktion einer Quadratwurzel einer positiven reellen Zahl $\sqrt{c}$ mit $c \in K$, $\sqrt{c} \notin K$. Es gilt die Isomorphie

$$K[\sqrt{c}] \cong K[X]/(X^2 - c)\,.$$

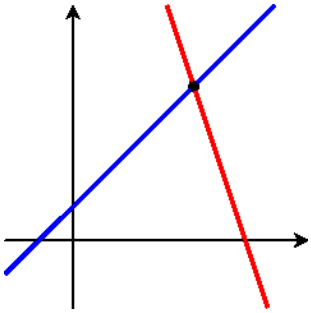
Lemma 24.2. *Sei $K \subseteq \mathbb{R}$ ein Körper. Es sei $P \in \mathbb{C}$ ein Punkt, der sich aus K^2 in einem Schritt konstruieren lässt. Dann liegen die Koordinaten von P in einer reell-quadratischen Körpererweiterung von K.*

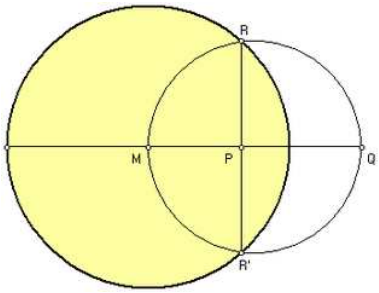
Beweis. Wir gehen die drei Möglichkeiten durch, einen Punkt aus K^2 in einem Schritt zu konstruieren. Es sei P der Schnittpunkt von zwei verschiedenen Geraden G_1 und G_2, die über K definiert sind. Es sei also $G_1 = \{(x,y) |\, a_1x + b_1y + c_1 = 0\}$ und $G_2 = \{(x,y) |\, a_2x + b_2d + c_2 = 0\}$

mit $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 \in K$. Dann gehört der Schnittpunkt zu K^2 und seine Koordinaten gehören zu K. Sei G eine über K definierte Gerade und C ein über K definierter Kreis. Dann ist $G = \{(x,y)|\, ax + by + c = 0\}$ und $C = \{(x,y)|\, (x-r)^2 + (y-s)^2 = d\}$ mit $a, b, c, r, s, d \in K$. Wir können annehmen, dass $b \neq 0$ ist, so dass die Geradengleichung auf die Form $y = ux + v$ gebracht werden kann. Einsetzen von dieser Gleichung in die Kreisgleichung ergibt eine quadratische Gleichung für x über K. Die reellen Koordinaten der Lösungen davon liegen in einer quadratischen Erweiterung von K. Das gilt dann auch für die zugehörigen Lösungen für y. Seien nun C_1 und C_2 zwei über K definierte verschiedene Kreise. Es seien $C_1 = \{(x,y)|\, (x-r_1)^2 + (y-s_1)^2 - a_1 = 0\}$ und $C_2 = \{(x,y)|\, (x-r_2)^2 + (y-s_2)^2 - a_2 = 0\}$ die Kreisgleichungen. Ein Schnittpunkt der beiden Kreise muss auch jede Linearkombination der beiden Gleichungen erfüllen. Wir betrachten die Differenz der beiden Gleichungen, die die Gestalt

$$x(-2r_1 + 2r_2) + r_1^2 - r_2^2 + y(-2s_1 + 2s_2) + s_1^2 - s_2^2 - a_1 + a_2 = 0$$

besitzt. D.h. dies ist eine Geradengleichung, und die Schnittpunkte der beiden Kreise stimmen mit den Schnittpunkten eines Kreises mit dieser Geraden überein. Wir sind also wieder im zweiten Fall. □





Beispiel 24.3. Wir betrachten die beiden Kreise mit den Kreisgleichungen

$$x^2 + y^2 = 1 \text{ und } (x-2)^2 + y^2 = 3.$$

Die Differenz der beiden Gleichungen ist

$$x^2 - (x-2)^2 + 2 = 0$$

bzw.

$$4x = 2 \text{ und somit } x = \frac{1}{2}\,.$$

Die Schnittpunkte der beiden Kreise müssen also auch auf der durch $x = \frac{1}{2}$ gegebenen Geraden liegen. Setzt man diese Geradenbedingung in die erste Kreisgleichung ein, so erhält man

$$y^2 \;=\; 1 - x^2 \;=\; 1 - \frac{1}{4} \;=\; \frac{3}{4},$$

also

$$y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

Satz 24.4. *Es sei $P \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl. Dann ist P eine konstruierbare Zahl genau dann, wenn es eine Kette von reell-quadratischen Körpererweiterungen*

$$\mathbb{Q} \subset K_1 \subset K_2 \subset \ldots \subset K_n$$

gibt derart, dass die Koordinaten von P zu K_n gehören.

Beweis. Es sei $P \in \mathbb{C}$ eine konstruierbare komplexe Zahl. D.h. es gibt eine Folge von Punkten $P_1, \ldots, P_n = P$ derart, dass P_{i+1} aus den Vorgängerpunkten $\{0, 1, P_1, \ldots, P_i\}$ in einem Schritt konstruierbar ist. Es sei $P_i = (a_i, b_i)$ und es sei

$$K_i = \mathbb{Q}(a_1, b_1, \ldots, a_i, b_i)$$

der von den Koordinaten der Punkte erzeugte Unterkörper von $\mathbb{R}$. Nach Lemma 24.2 liegt K_{i+1} in einer reell-quadratischen Körpererweiterung von K_i (und zwar ist $K_{i+1} = K_i$ oder K_{i+1} ist eine reell-quadratische Körpererweiterung von K_i). Die Koordinaten von P liegen also in K_n, und K_n ist das Endglied in einer Folge von quadratischen Körpererweiterungen von $\mathbb{Q}$. Sei umgekehrt angenommen, dass die Koordinaten eines Punktes $P = (a, b)$ in einer Kette von reell-quadratischen Körpererweiterungen von $\mathbb{Q}$ liegen. Wir zeigen durch Induktion über die Länge der Körperkette, dass die Zahlen in einer solchen Kette aus quadratischen Körpererweiterungen konstruierbar sind. Bei $n = 0$ ist $K_0 = \mathbb{Q}$, und diese Zahlen sind konstruierbar. Sei also schon gezeigt, dass alle Zahlen aus K_n konstruierbar sind, und sei $K_n \subset K_{n+1}$ eine reell-quadratische Körpererweiterung. Nach Lemma 2.7 ist $K_{n+1} = K_n[\sqrt{c}]$ mit einer positiven reellen Zahl $c \in K_n$. Nach Induktionsvoraussetzung ist c konstruierbar und nach Lemma 23.10 ist $\sqrt{c}$ konstruierbar. Daher ist auch jede Zahl $u + v\sqrt{c}$ mit $u, v \in K_n$, konstruierbar. Damit sind die Koordinaten von P konstruierbar und somit ist nach Lemma 23.7 auch P selbst konstruierbar. □

Wir werden in der nächsten Vorlesung zeigen, dass eine komplex-algebraische Zahl z genau dann konstruierbar ist, wenn der Grad des Zerfällungskörpers des Minimalpolynoms von z eine Potenz von 2 ist. Für viele Anwendungen sind allerdings schon die oben vorgestellte Charakterisierung und die folgenden Korollare ausreichend.

Korollar 24.5. *Eine mit Zirkel und Lineal konstruierbare Zahl ist algebraisch.*

Beweis. Dies folgt direkt aus Satz 24.4, aus Satz 2.8 und aus Satz 8.4. □

Korollar 24.6. *Sei $z \in \mathbb{C}$ eine konstruierbare Zahl. Dann ist der Grad des Minimalpolynoms von z eine Potenz von zwei.*

Beweis. Die Koordinaten der konstruierbaren Zahl z liegen nach Satz 24.4 in einer Folge von reell-quadratischen Körpererweiterungen

$$\mathbb{Q} \subset K_1 \subset K_2 \subset \ldots \subset K_n\,.$$

Diese Kette kann man um die komplex-quadratische Körpererweiterung $K_n \subset K_n[i] = L$ ergänzen mit $z \in L$. Dabei ist $\mathbb{Q}(z) = \mathbb{Q}[z] \subseteq L$ ein Unterkörper und daher ist nach Satz 2.8 der Grad von $\mathbb{Q}[z]$ über $\mathbb{Q}$ ein Teiler von 2^{n+1}, also selbst eine Potenz von 2. □

24.3. **Das Delische Problem.**

Die Bewohner der Insel Delos befragten während einer Pestepidemie 430 v. Chr. das Orakel von Delphi. Sie wurden aufgefordert, den würfelförmigen Altar des Apollon zu verdoppeln.

Wir kommen zur ersten Konsequenz von unserer systematischen Untersuchung der konstruierbaren Zahlen für die klassischen Konstruktionsprobleme.

Korollar 24.7. *Die Würfelverdopplung mit Zirkel und Lineal ist nicht möglich.*

Beweis. Wir betrachten einen Würfel mit der Kantenlänge 1 und dem Volumen 1. Die Konstruktion eines Würfels mit dem doppelten Volumen würde bedeuten, dass man die neue Kantenlänge, also $2^{1/3}$ mit Zirkel und Lineal konstruieren könnte. Das Minimalpolynom von $2^{1/3}$ ist $X^3 - 2$, da dieses offenbar $2^{1/3}$ annulliert und nach Lemma 22.12 irreduzibel ist. Nach Korollar 24.6 ist $2^{1/3}$ nicht konstruierbar, da 3 keine Zweierpotenz ist. □

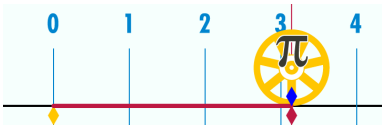
24.4. **Die Quadratur des Kreises.**

Satz 24.8. *Es ist nicht möglich, zu einem vorgegebenen Kreis ein flächengleiches Quadrat mit Zirkel und Lineal zu konstruieren.*

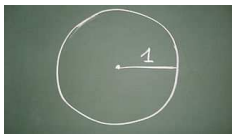
Beweis. Wenn es ein Konstruktionsverfahren gäbe, so könnte man insbesondere den Einheitskreis mit dem Radius 1 quadrieren, d.h. man könnte ein Quadrat mit der Seitenlänge $\sqrt{\pi}$ mit Zirkel und Lineal konstruieren. Nach Korollar 24.5 muss aber eine konstruierbare Zahl algebraisch sein. Nach dem Satz von Lindemann ist aber π und damit auch $\sqrt{\pi}$ transzendent. □

Es gibt natürlich einige geometrische Methoden die Zahl π zu erhalten, z.B. die Abrollmethode und die Schwimmbadmethode.

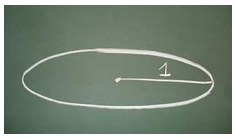
Beispiel 24.9. Die einfachste Art, die Zahl π geometrisch zu konstruieren, ist die *Abrollmethode*, bei der man einen Kreis mit Durchmesser 1 einmal exakt abrollt. Die zurückgeführte Entfernung ist genau der Kreisumfang, also π.



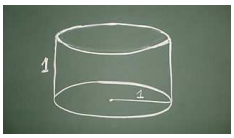
Beispiel 24.10. Man kann die Zahl π auch mit Hilfe von Schwimmbecken und einer idealen Flüssigkeit erhalten.



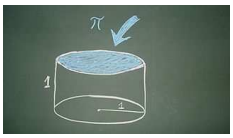
Wir starten mit einem Einheitskreis,



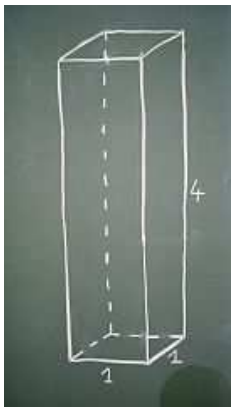
den wir als Grundfläche



eines Schwimmbeckens der Höhe 1 nehmen.

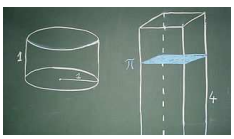


Das füllen wir randvoll mit Wasser auf.

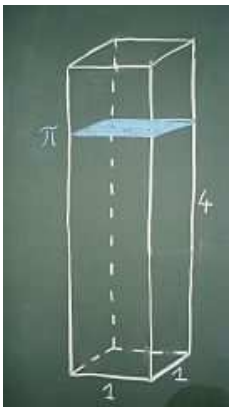


Wir nehmen ein zweites Schwimmbecken mit quadratischer Grundfläche 1×1 und Höhe 4.

Der Inhalt des ersten Schwimmbeckens wird



in das zweite Schwimmbecken gegossen.



Der Wasserstand im zweiten Schwimmbecken ist exakt π.

25. Vorlesung

Wir haben gesehen, dass das Minimalpolynom einer aus $\mathbb{Q}$ konstruierbaren komplexen Zahl eine Zweierpotenz als Grad besitzt. Wir werden hier zeigen, dass eine komplexe algebraische Zahl genau dann konstruierbar ist, wenn der Grad des Zerfällungskörper ihres Minimalpolynoms eine Zweierpotenz ist. Dies erfordert einige einfache gruppentheoretische Vorbereitungen.

25.1. **Konjugationsklassen und Klassengleichung.**

Definition 25.1. Zu einer Gruppe G nennt man die Äquivalenzklassen zur Äquivalenzrelation, bei der zwei Elemente als äquivalent (oder *konjugiert*) gelten, wenn sie durch einen inneren Automorphismus ineinander überführt werden können, die *Konjugationsklassen*.

Zwei Elemente $a, b \in G$ sind also konjugiert, wenn es ein $x \in G$ gibt mit $b = xax^{-1}$.

Die folgende Aussage heißt *Klassengleichung*.

Lemma 25.2. *Sei G eine endliche Gruppe und seien $K_1, \ldots, K_r$ die Konjugationsklassen von G mit mindestens zwei Elementen. Dann ist*

$$\operatorname{ord}(G) = \operatorname{ord}(Z(G)) + \sum_{i=1}^{r} \#(K_i)$$

Beweis. Die Konjugationsklassen sind Äquivalenzklassen, daher bilden sie eine Zerlegung von G. Die Summe der Anzahl der Elemente in den Konjugationsklassen ist daher gleich der Ordnung von G. Die einelementigen Konjugationsklassen entsprechen dabei den Elementen im Zentrum der Gruppe. □

Die Anzahl der Elemente in den einzelnen Konjugationsklassen unterliegt starken Einschränkungen, die das folgende Lemma beinhaltet.

Lemma 25.3. *Sei G eine endliche Gruppe und sei $a \in G$. Dann gelten folgende Aussagen.*

(1) *Die Menge $G_a = \{x \in G | \, xax^{-1} = a\}$ ist eine Untergruppe von G.*
(2) *Sei $K = [a]$ die Konjugationsklasse zu a. Dann ist*

$$\#(K) \; = \; \operatorname{ind}_G G_a.$$

(3) *Die Elementanzahl von $K = [a]$ ist ein Teiler von* $\operatorname{ord}(G)$.

Beweis. (1). Es ist klar, dass das neutrale Element zu G_a gehört. Seien $x, y \in G_a$. Dann ist

$$xya(xy)^{-1} \; = \; xyay^{-1}x^{-1} \; = \; xax^{-1} \; = \; a,$$

also $xy \in G_a$. Bei $x \in G_a$ ist $xax^{-1} = a$, was man direkt zu $a = x^{-1}ax$ auflösen kann, was wiederum $x^{-1} \in G_a$ bedeutet. (2). Wir betrachten die Abbildung

$$G \longrightarrow K,\, x \longmapsto xax^{-1}.$$

Da K genau aus allen zu a konjugierten Elementen besteht, ist diese Abbildung surjektiv. Unter dieser Abbildung ist G_a das Urbild von a. Es gilt $xax^{-1} = yay^{-1}$ genau dann, wenn $y^{-1}xax^{-1}y = a$ ist, also genau dann, wenn $y^{-1}x \in G_a$ ist. Das bedeutet, dass die Fasern der Abbildung gerade die Linksnebenklassen zur Untergruppe G_a sind. Daher ist $\#(K)$ gleich dem Index von G_a in G. (3) folgt aus (2) und Satz 4.16. □

Lemma 25.4. *Es sei p eine Primzahl und G eine endliche Gruppe mit p^r, $r \geq 1$, Elementen. Dann ist das Zentrum Z von G nicht trivial.*

Beweis. Wir gehen von der Klassengleichung aus, also von

$$\operatorname{ord}(G) = \operatorname{ord}(Z) + \sum_{j \in J} n_j,$$

wobei n_j den Index der zu den mehrelementigen Konjugationsklassen C_j gehörenden echten Untergruppen (im Sinne von Lemma 25.3) $G_j \subseteq G$ bezeichnet. Jedes n_j ist nach Lemma 25.3 ein Vielfaches von p. Daher ist auch $\operatorname{ord}(Z)$ ein Vielfaches von p. Somit ist Z nicht trivial. □

25.2. **Galoistheoretische Charakterisierung von konstruierbaren Zahlen.**

Lemma 25.5. *Es sei $K = L_0 \subset L_1 \subset \ldots \subset L_r = L$ eine Kette von quadratischen Körpererweiterungen in $\mathbb{C}$. Dann gibt es eine endliche Galoiserweiterung $K \subseteq M$ in $\mathbb{C}$, die L enthält, und die ebenfalls eine Kette von quadratischen Körpererweiterungen besitzt.*

Beweis. Wir führen Induktion über r, wobei die Fälle $r = 0, 1$ klar sind. Sei also eine Kette von quadratischen Körpererweiterungen

$$K = L_0 \subset L_1 \subset \ldots \subset L_r \subset L_{r+1} = L$$

gegeben. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es einen Körper M, $L_r \subseteq M \subseteq \mathbb{C}$, derart, dass $K \subseteq M$ eine Galoiserweiterung ist, die eine Kette von quadratischen Körpererweiterungen besitzt. Als Galoiserweiterung über K ist M nach Satz 15.6 der Zerfällungskörper eines (separablen) Polynoms $F \in K[X]$. Wir können $L_{r+1} = L_r(x)$ mit $x^2 = a \in L_r$ schreiben. Wir betrachten das Polynom

$$H = \prod_{\varphi \in \operatorname{Gal}(M|K)} \left(X^2 - \varphi(a)\right).$$

Die Koeffizienten dieses Polynoms sind invariant unter der Galoisgruppe $\operatorname{Gal}(M|K)$ und gehören daher wegen Satz 15.6 zu K. Sei M' der Zerfällungskörper von H über M in $\mathbb{C}$. Dieser ist insgesamt der Zerfällungskörper

vom Produkt FH über K, so dass $K \subseteq M'$ insbesondere eine Galoiserweiterung ist. Nach Konstruktion ist x eine Nullstelle von H, woraus sich $L = L_r(x) \subseteq M'$ ergibt. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es eine Kette von quadratischen Körpererweiterungen

$$K = M_0 \subset M_1 \subset \ldots \subset M_s = M\,.$$

Diese erweitern wir sukzessive zu einer Kette

$$M = M_s \subset M_{s+1} \subset \ldots \subset M_t = M'$$

von quadratischen Körpererweiterungen, wobei $M_{s+i+1} = M_{s+i}(\sqrt{\varphi_i(a)})$ sei und φ_i die Automorphismen von $\mathrm{Gal}\,(M|K)$ durchlaufe. □

Satz 25.6. *Es sei $K \subseteq \mathbb{C}$ ein Unterkörper und $z \in \mathbb{C}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

(1) *Die komplexe Zahl z ist aus K konstruierbar.*
(2) *Es gibt in $\mathbb{C}$ eine Körperkette aus quadratischen Körpererweiterungen*
$$K = L_0 \subset L_1 \subset \ldots \subset L_r = L$$
mit $z \in L$.
(3) *Das Element z ist algebraisch über K, und der Grad des Zerfällungskörpers von z über K ist eine Zweierpotenz.*
(4) *Das Element z ist algebraisch über K, und die Ordnung der Galoisgruppe des Zerfällungskörpers von z über K ist eine Zweierpotenz.*
(5) *Es gibt eine endliche Galoiserweiterung $K \subseteq M$ (in $\mathbb{C}$) mit $z \in M$, deren Grad eine Zweierpotenz ist.*

Beweis. Die Äquivalenz von (1) und (2) ergibt sich wie in Satz 24.4. Sei (2) erfüllt. Nach Lemma 25.5 gibt es eine endliche Galoiserweiterung $K \subseteq M$, die L und damit z enthält und die eine Kette von quadratischen Körpererweiterungen besitzt. Nach Satz 2.8 ist dann der Grad von $K \subseteq M$ eine Zweierpotenz. Es sei L' der Zerfällungskörper von z über K. Da M galoissch ist, gilt $L' \subseteq M$, und daher ist auch der Grad von $K \subseteq L'$ eine Zweierpotenz. Die Implikation von (3) nach (4) und von (4) nach (5) sind klar aufgrund von Satz 15.6. (5) $\Longrightarrow$ (2). Sei nun (5) erfüllt, und eine Galoiserweiterung $K \subseteq M$ in $\mathbb{C}$ mit $z \in M$ gegeben, deren Grad eine Zweierpotenz 2^r ist. Wir zeigen durch Induktion nach r, dass es eine Filtration der Körpererweiterung durch quadratische Körpererweiterungen gibt (also ohne direkten Bezug auf ein z). Dabei ist der Fall $r = 0$ trivial. Sei also $\mathrm{grad}_K\, M = 2^r$ $(r \geq 1)$ und die Existenz von Körperketten für kleinere Exponenten bereits bewiesen. Nach Satz 15.6 ist dann auch die Ordnung der Galoisgruppe $G = \mathrm{Gal}\,(M|K)$ gleich 2^r. Aufgrund von Lemma 25.4 gibt es ein nichttriviales Zentrum $Z \subseteq G$, so dass es nach dem Hauptsatz für endliche abelsche Gruppen auch eine Untergruppe $H \subseteq Z$ mit zwei Elementen gibt. Als Untergruppe des Zentrums ist H ein Normalteiler in G. Wir betrachten $L = \mathrm{Fix}\,(H) \subseteq M$. Nach Satz 15.6 ist $\mathrm{grad}_L\, M = 2$ und nach Satz 16.4 ist $K \subseteq L$ eine Galoiserweiterung der Ordnung 2^{r-1} und besitzt nach Induktionsvoraussetzung eine Filtration aus

quadratischen Körpererweiterungen. Diese Filtration wird durch $L \subset M$ zu einer solchen Gesamtfiltration ergänzt wird. □

Bemerkung 25.7. Wir betrachten die konstruierbare Zahl $u = \sqrt{1+\sqrt{3}}$ und knüpfen dabei an Beispiel 14.9 an. Dort wurde gezeigt, dass u das Minimalpolynom $X^4 - 2X^2 - 2$ besitzt, welches über $L = \mathbb{Q}[u]$ die Primfaktorzerlegung

$$X^4 - 2X^2 - 2 \;=\; (X-u)(X+u)(X^2 - 1 + \sqrt{3})$$

besitzt. Insbesondere ist L nicht normal, der Zerfällungskörper ist vielmehr $Z = L[\sqrt{1-\sqrt{3}}]$ und hat den Grad 8 über $\mathbb{Q}$. Seine Galoisgruppe ist nicht abelsch, denn andernfalls wäre jeder Zwischenkörper nach Satz 16.4 eine Galoiserweiterung von $\mathbb{Q}$, was aber für L nicht zutrifft.

Abschließend bemerken wir, dass es algebraische Elemente $z \in \mathbb{C}$ gibt, deren Minimalpolynom zwar den Grad 4 besitzt, wo der Grad des Zerfällungskörpers aber keine Zweierpotenz ist. Für ein hinreichend kompliziertes Polynom vom Grad 4 ist nämlich die Galoisgruppe des Zerfällungskörpers gleich der symmetrischen Gruppe S_4 und daher ist der Grad des Zerfällungskörpers gleich 12.

26. Vorlesung

26.1. **Konstruierbare Einheitswurzeln.**

Definition 26.1. Sei $n \in \mathbb{N}_+$. Man sagt, dass *das regelmäßige n-Eck mit Zirkel und Lineal konstruierbar* ist, wenn die komplexe Zahl

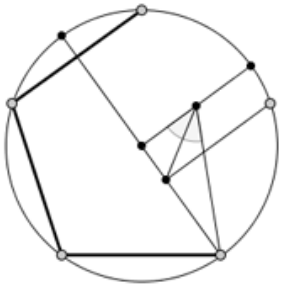
$$e^{2\pi i/n} = \cos(\frac{2\pi}{n}) + i\sin(\frac{2\pi}{n})$$

eine konstruierbare Zahl ist.

Die Menge der komplexen Einheitswurzeln $e^{\frac{2\pi ik}{n}}$, $k = 0, \ldots, n-1$, bilden die Eckpunkte eines regelmäßigen n-Ecks, wobei 1 eine Ecke bildet. Alle Eckpunkte liegen auf dem Einheitskreis. Die Ecke $e^{\frac{2\pi i}{n}}$ ist eine primitive Einheitswurzel; wenn diese mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist, so sind auch alle weiteren Eckpunkte konstruierbar. Das reguläre n-Eck ist genau dann konstruierbar, wenn der n-te Kreisteilungskörper ein Unterkörper der konstruierbaren Zahlen ist.

Bei $n = 1, 2$ kann man sich darüber streiten, ob man von einem regelmäßigen n-Eck sprechen soll, jedenfalls gibt es die zugehörigen Einheitswurzeln und diese sind aus $\mathbb{Q}$, also erst recht konstruierbar. Das regelmäßige Dreieck ist ein gleichseitiges Dreieck und dieses ist konstruierbar nach Beispiel 18.3, da der dritte Kreisteilungskörper eine quadratische Körpererweiterung von $\mathbb{Q}$ ist (man kann einfacher auch direkt zeigen, dass ein gleichseitiges Dreieck aus seiner Grundseite heraus konstruierbar ist). Das regelmäßige Viereck ist ein

Quadrat mit den Eckpunkten $1, i, -1, -i$, und dieses ist ebenfalls konstruierbar. Das regelmäßige Fünfeck ist ebenfalls konstruierbar, wie in Beispiel 18.5 bzw. Aufgabe 26.9 gezeigt wurde. Wir werden im Folgenden sowohl positive als auch negative Resultate zur Konstruierbarkeit von regelmäßigen n-Ecken vorstellen.



Konstruktion eines regulären Fünfecks mit Zirkel und Lineal

Lemma 26.2. *Sei $m = kn$, $m, k, n \in \mathbb{N}_+$. Dann gelten folgende Aussagen.*

(1) *Das regelmäßige 2^r-Eck, $r \in \mathbb{N}$, ist konstruierbar.*
(2) *Wenn das regelmäßige m-Eck konstruierbar ist, so sind auch das regelmäßige n-Eck und das regelmäßige k-Eck konstruierbar.*
(3) *Wenn n und k teilerfremd sind und wenn das regelmäßige n-Eck und das regelmäßige k-Eck konstruierbar sind, so ist auch das regelmäßige m-Eck konstruierbar.*

Beweis. (1) folgt daraus, dass eine Winkelhalbierung stets mit Zirkel und Lineal durchführbar ist. (2). Nach Voraussetzung ist $e^{\frac{2\pi i}{nk}}$ konstruierbar. Dann ist auch nach Satz 23.9 die Potenz

$$(e^{\frac{2\pi i}{nk}})^n = e^{\frac{2\pi i}{k}}$$

konstruierbar. (3). Seien nun $e^{\frac{2\pi i}{n}}$ und $e^{\frac{2\pi i}{k}}$ konstruierbar und n und k teilerfremd. Nach dem Lemma von Bezout gibt es dann ganze Zahlen r, s mit $rn + sk = 1$. Daher ist auch

$$(e^{\frac{2\pi i}{n}})^s (e^{\frac{2\pi i}{k}})^r = (e^{\frac{2\pi ik}{nk}})^s (e^{\frac{2\pi in}{nk}})^r = e^{\frac{2\pi isk}{nk}} e^{\frac{2\pi irn}{nk}} = e^{\frac{2\pi i(sk+rn)}{nk}} = e^{\frac{2\pi i}{nk}}$$

konstruierbar. □

Aus diesem Lemma kann man in Zusammenhang mit den oben erwähnten Konstruktionsmöglichkeiten folgern, dass die regelmäßigen $3 \cdot 2^r$-Ecke, die regelmäßigen $5 \cdot 2^r$-Ecke und die regelmäßigen $15 \cdot 2^r$-Ecke für jedes r konstruierbar sind.

Satz 26.3. *Sei n eine natürliche Zahl derart, dass das regelmäßige n-Eck konstruierbar ist. Dann ist $\varphi(n)$ eine Zweierpotenz.*

Beweis. Die Voraussetzung besagt, dass die primitive Einheitswurzel $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ konstruierbar ist. Dann muss nach Korollar 24.6 der Grad des Minimalpolynoms von ζ eine Zweierpotenz sein. Nach Korollar 18.10 ist das Minimalpolynom von ζ das n-te Kreisteilungspolynom, und dieses hat den Grad $\varphi(n)$. Also muss $\varphi(n)$ eine Zweierpotenz sein. □

26.2. **Winkeldreiteilung.**

Wir sind nun in der Lage, das Problem der Winkeldreiteilung zu beantworten.

Korollar 26.4. *Das regelmäßige 9-Eck ist nicht mit Zirkel und Lineal konstruierbar.*

Beweis. Wäre das regelmäßige 9-Eck konstruierbar, so müsste nach Satz 26.3 $\varphi(9)$ eine Zweierpotenz sein. Es ist aber $\varphi(9) = 2 \cdot 3 = 6$. □

Satz 26.5. *Es ist nicht möglich, einen beliebig vorgegebenen Winkel mittels Zirkel und Lineal in drei gleich große Teile zu unterteilen.*

Beweis. Es genügt, einen (konstruierbaren) Winkel α anzugeben derart, dass $\alpha/3$ nicht konstruierbar ist. Wir betrachten $\alpha = 120°$ Grad, welcher konstruierbar ist, da die dritten Einheitswurzeln konstruierbar sind, weil sie nämlich in einer quadratischen Körpererweiterung von $\mathbb{Q}$ liegen. Dagegen ist der Winkel $\alpha/3 = 120°/3 = 40°$ nicht konstruierbar, da andernfalls das regelmäßige 9-Eck konstruierbar wäre, was nach Korollar 26.4 aber nicht der Fall ist. □

Wir geben noch einen weiteren Beweis, dass die Winkeldreiteilung mit Zirkel und Lineal nicht möglich ist, der nicht auf der allgemeinen Irreduzibilität der Kreisteilungspolynome beruht.

Lemma 26.6. *Es sei $F \in \mathbb{Z}[X]$ ein normiertes Polynom vom Grad ≤ 3 ohne Nullstelle in $\mathbb{Z}$. Dann ist F irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$.*

Beweis. Aufgrund von Lemma 20.13 und der Gradvoraussetzung genügt es zu zeigen, dass es keine Faktorzerlegung $F = GH$ in $\mathbb{Z}[X]$ mit $\operatorname{grad}(G) = 1$ geben kann. Sei also angenommen, dass $G = aX + b \in \mathbb{Z}[X]$ ein Teiler von F ist. Der Leitkoeffizient a teilt den Leitkoeffizienten von F, also 1, daher muss $a \in \mathbb{Z}$ eine Einheit sein. Dann ist $a = \pm 1$ und somit ist $\pm b$ eine Nullstelle im Widerspruch zur Voraussetzung. □

Einfache Beispiele wie $F = (2X + 1)^2$ zeigen, dass ohne die Voraussetzung normiert die Aussage nicht stimmt. Ob ein ganzzahliges normiertes Polynom ganzzahlige Nullstellen besitzt oder nicht, ist im Allgemeinen einfach zu zeigen. Für n betragsmäßig groß kann man durch eine einfache Abschätzung zeigen, dass es dafür keine Nullstelle geben kann, und für n in einem verbleibenden überschaubaren Bereich kann man durch explizites Ausrechnen feststellen, ob eine Nullstelle vorliegt oder nicht.

Bemerkung 26.7. Wir zeigen direkt, dass man den Winkel 20° Grad nicht konstruieren kann (obwohl man 60° Grad konstruieren kann). Aufgrund der *Additionstheoreme für die trigonometrischen Funktionen* gilt

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

und damit

$$\begin{aligned}(2\cos 20°)^3 - 3(2\cos 20°) - 1 &= 2(4\cos^3 20° - 3\cos 20° - \frac{1}{2}) \\ &= 2(\cos 60° - \frac{1}{2}) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Also wird $2\cos 20°$ vom Polynom $X^3 - 3X - 1$ annulliert. Dieses Polynom hat keine ganzzahlige Nullstelle und ist daher nach Lemma 26.6 irreduzibel. Also muss es nach Lemma 7.12 das Minimalpolynom von $2\cos 20°$ sein. Daher kann $2\cos 20°$ nach Korollar 24.6 nicht konstruierbar sein und damit ebensowenig $\cos 20°$.

26.3. **Fermatsche Primzahlen.**

Die Frage der Konstruierbarkeit von regelmäßigen n-Ecken führt uns zu Fermatschen Primzahlen.

Definition 26.8. Eine Primzahl der Form $2^s + 1$, wobei s eine positive natürliche Zahl ist, heißt *Fermatsche Primzahl*.

Es ist unbekannt, ob es unendlich viele Fermatsche Primzahlen gibt. Es ist noch nicht mal bekannt, ob es außer den ersten fünf Fermatschen Primzahlen

$$3, 5, 17, 257, 65537$$

überhaupt weitere Fermatschen Primzahlen gibt.

Lemma 26.9. *Bei einer Fermatschen Primzahl $2^s + 1$ hat der Exponent die Form $s = 2^r$ mit einem $r \in \mathbb{N}$.*

Beweis. Wir schreiben $s = 2^k u$ mit u ungerade. Damit ist

$$2^{2^k u} + 1 = (2^{2^k})^u + 1\,.$$

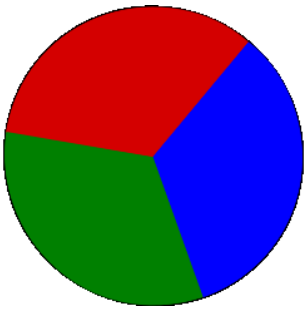
Für ungerades u gilt generell die polynomiale Identität (da -1 eine Nullstelle ist)

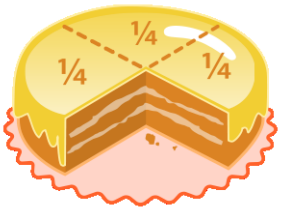
$$X^u + 1 = (X+1)(X^{u-1} - X^{u-2} + X^{u-3} - \ldots + X^2 - X + 1)\,.$$

Also ist $2^{2^k} + 1 \geq 3$ ein Teiler von $2^{2^k u} + 1$. Da diese Zahl nach Voraussetzung prim ist, müssen beide Zahlen gleich sein, und dies bedeutet $u = 1$. □

Eine Fermatsche Primzahl ist nach diesem Lemma also insbesondere eine Fermat-Zahl im Sinne der folgenden Definition.

Definition 26.10. Eine Zahl der Form $2^{2^r} + 1$, wobei r eine natürliche Zahl ist, heißt *Fermat-Zahl*.





Diese Torte wurde nicht mit Zirkel und Lineal geteilt.

Satz 26.11. *Ein reguläres n-Eck ist genau dann mit Zirkel und Lineal konstruierbar, wenn die Primfaktorzerlegung von n die Gestalt hat*

$$n = 2^\alpha p_1 \cdots p_k \,,$$

wobei die p_i verschiedene Fermatsche Primzahlen sind.

Beweis. Es sei $n = 2^\alpha p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k}$ die Primfaktorzerlegung von n mit den verschiedenen ungeraden Primzahlen p_i, $i = 1, \ldots, k$, und positiven Exponenten $r_i \geq 1$ (und $\alpha \geq 0$). Nach Satz 26.3 muss die eulersche Funktion eine Zweierpotenz sein, also

$$\varphi(n) = 2^t \,.$$

Andererseits gilt nach Korollar 15.16 die Beziehung

$$\varphi(n) = 2^{\alpha-1}(p_1 - 1)p_1^{r_1-1} \cdots (p_k - 1)p_k^{r_k-1}$$

(bei $\alpha = 0$ ist der Ausdruck $2^{\alpha-1}$ zu streichen). Da dies eine Zweierpotenz sein muss, dürfen die ungeraden Primzahlen nur mit einem Exponenten 1 (oder 0) auftreten. Ferner muss jede beteiligte Primzahl p die Gestalt $p = 2^s + 1$ haben, also eine Fermatsche Primzahl sein. Für die andere Richtung muss man aufgrund von Lemma 26.2 lediglich zeigen, dass für eine Fermatsche Primzahl $p = 2^s + 1$ das regelmäßige p-Eck konstruierbar ist. Der p-te Kreisteilungskörper besitzt nach Lemma 18.4 den Grad $p - 1 = 2^s$, und dieser ist der Zerfällungskörper des p-ten Kreisteilungspolynoms und wird von der p-ten primitiven Einheitswurzel $\zeta = e^{2\pi i/p}$ erzeugt. Aufgrund von Satz 25.6 ist somit ζ konstruierbar. □

Arbeitsblätter

1. Arbeitsblatt

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 1.1. Bestätige folgende Aussagen.

(1) Die dritten Einheitswurzeln in $\mathbb{C}$ sind 1, $\epsilon = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ und $\eta = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.
(2) Es ist $\epsilon^2 = \eta$ und $\eta^2 = \epsilon$.
(3) Es ist $1 + \epsilon + \epsilon^2 = 0$.
(4) Es ist $\epsilon + \epsilon^2 = -1$.

Aufgabe 1.2. Eliminiere in der kubischen Gleichung

$$x^3 + 6x^2 - 5x - 2 = 0$$

den quadratischen Term.

Aufgabe 1.3. Bestimme die Lösungen der Gleichung

$$x^3 - x + 5 = 0$$

mit der Cardanoschen Formel.

Aufgabe 1.4. Es sei p eine Primzahl. Zeige, unter Verwendung der eindeutigen Primfaktorzerlegung von natürlichen Zahlen, dass die reelle Zahl $\sqrt{p}$ irrational ist.

Aufgabe 1.5. Führe in $\mathbb{Q}[X]$ die Division mit Rest „P durch T“ für die beiden Polynome $P = 3X^4 + 7X^2 - 2X + 5$ und $T = 2X^2 + 3X - 1$ durch.

Aufgabe 1.6. Es sei $x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ eine kubische Gleichung mit $a_i \in \mathbb{Q}$. Eliminiere den linearen Term. Ist dies stets über $\mathbb{Q}$ möglich?

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 1.7. (4 Punkte)

Es sei

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

eine polynomiale Gleichung mit $a_i \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$. Zeige, dass es eine äquivalente polynomiale Gleichung der Form

$$x^n + b_{n-2} x^{n-2} + \ldots + b_1 x + b_0 = 0$$

gibt.

Aufgabe 1.8. (6 Punkte)

Bestimme die Lösungen der Gleichung

$$2x^3 - 4x^2 + 5x - 3 = 0$$

mit der Cardanoschen Formel.

Aufgabe 1.9. (5 Punkte)

Bestimme die Lösungen der polynomialen Gleichung

$$x^6 - 4x^2 + 7 = 0\,.$$

Aufgabe 1.10. (3 Punkte)

Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper. Zeige, dass K nicht endlich sein kann.

In der nächsten Aufgabe soll über dem Körper $L = \mathbb{Q}[\sqrt{3}]$ aus Beispiel 1.7 gerechnet werden.

Aufgabe 1.11. (4 Punkte)

Führe in $(\mathbb{Q}[\sqrt{3}])[X]$ die Division mit Rest „P durch T“ für die beiden Polynome $P = 3X^3 - (2+\sqrt{3})X^2 + 5\sqrt{3}X + 1 + 2\sqrt{3}$ und $T = \sqrt{3}X^2 - X + 2 + 7\sqrt{3}$ durch.

2. Arbeitsblatt

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 2.1. Finde die Lösungen der kubischen Gleichung

$$x^3 + px = 0$$

($p \in \mathbb{C}$) direkt und mit Hilfe der Formel von Cardano.

Aufgabe 2.2. Sei $K \subseteq L$ eine Körpererweiterung. Zeige, dass L ein K-Vektorraum ist.

Aufgabe 2.3. Sei $K \subseteq L$ eine Körpererweiterung und $z \in L$. Zeige, dass die Abbildung

$$L \longrightarrow L,\ x \longmapsto zx,$$

K-linear ist.

Aufgabe 2.4. Es sei K ein Körper mit einer Charakteristik $\neq 2$ und es sei $K \subset L$ eine quadratische Körpererweiterung. Zeige, dass es dann ein $x \in L$, $x \notin K$, mit $x^2 \in K$ gibt.

Aufgabe 2.5. Es sei $X^3 + pX + q \in \mathbb{Q}[X]$ und es seien $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{C}$ die Nullstellen dieses Polynoms. Konstruiere unter Bezug auf die Formel von Cardano eine Kette

$$\mathbb{Q} \subseteq K \subseteq L \subseteq M \subseteq N$$

von endlichen Körpererweiterungen von „möglichst kleinem“ Grad, so dass M alle Nullstellen und alle „Hilfszahlen“, die in dieser Formel auftreten, enthält. Welche Grade können dabei auftreten?

Aufgabe 2.6. Zeige, dass die Körpererweiterung $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ nicht endlich ist.

Aufgabe 2.7. Zeige, dass die Menge der rationalen Funktionen über $\mathbb{R}$ einen Körper bildet.

(Dieser Körper wird mit $\mathbb{R}(X)$ bezeichnet.)

Aufgabe 2.8. Es sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und sei M die Menge der n-ten Einheitswurzeln in K. Zeige, dass M eine Untergruppe der Einheitengruppe $K^\times$ ist.

Aufgabe 2.9. Es sei K ein Körper, $a \in K$ und $n \in \mathbb{N}$. Beweise die folgenden Aussagen.

(1) Wenn $b_1, b_2 \in K$ zwei Lösungen der Gleichung $X^n = a$ sind und $b_2 \neq 0$, so ist ihr Quotient b_1/b_2 eine n-te Einheitswurzel.
(2) Wenn $b \in K$ eine Lösung der Gleichung $X^n = a$ und ζ eine n-te Einheitswurzel ist, so ist auch ζb eine Lösung der Gleichung $X^n = a$.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 2.10. (3 Punkte)

Es sei $K \subseteq \mathbb{R}$ ein Unterkörper. Zeige, dass dann auch $K[i]$ ein Unterkörper von $\mathbb{C}$ ist.

Aufgabe 2.11. (2 Punkte)

Sei $K \subseteq L$ eine endliche Körpererweiterung und sei $x_1, \ldots, x_n \in L$ eine K-Basis von L. Zeige, dass die Multiplikation auf L durch die Produkte

$$x_i x_j, 1 \leq i \leq j \leq n,$$

eindeutig festgelegt ist.

Aufgabe 2.12. (3 Punkte)

Es seien $\mathbb{Q} \subseteq K \subset \mathbb{C}$ und $\mathbb{Q} \subseteq L \subset \mathbb{C}$ zwei endliche Körpererweiterungen von $\mathbb{Q}$ vom Grad d bzw. e. Es seien d und e teilerfremd. Zeige, dass dann

$$K \cap L = \mathbb{Q}$$

ist.

Aufgabe 2.13. (3 Punkte)

Berechne die Quadratwurzeln, die vierten Wurzeln und die achten Wurzeln von i.

Aufgabe 2.14. (3 Punkte)

Zeige, dass die Körpererweiterung $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}(X)$, wobei $\mathbb{R}(X)$ den Körper der rationalen Funktionen bezeichnet, nicht endlich ist.

3. Arbeitsblatt

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 3.1. Sei $K \subseteq L$ eine Körpererweiterung und es sei $a \in L$. Zeige, dass die Einsetzungsabbildung, also die Zuordnung

$$\psi : K[X] \longrightarrow L,\ P \longmapsto P(a),$$

folgende Eigenschaften erfüllt (dabei seien $P, Q \in K[X]$).

(1) $(P+Q)(a) = P(a) + Q(a)$,
(2) $(P \cdot Q)(a) = P(a) \cdot Q(a)$,
(3) $1(a) = 1$.

Aufgabe 3.2. Zeige, dass ein Unterring eines Körpers ein Integritätsbereich ist.

Aufgabe 3.3. Es sei R ein kommutativer Ring. Zu jedem $f \in R$ sei

$$\mu_f : R \longrightarrow R,\ g \longmapsto fg,$$

die Multiplikation mit f. Zeige, dass μ_f genau dann bijektiv ist, wenn es surjektiv ist.

Man zeige durch ein Beispiel, dass in dieser Situation aus der Injektivität nicht die Bijektivität folgt.

Aufgabe 3.4. Es sei R ein kommutativer Ring und $f \in R$. Charakterisiere mit Hilfe der Multiplikationsabbildung

$$\mu_f : R \longrightarrow R,\ g \longmapsto fg,$$

wann f ein Nichtnullteiler und wann f eine Einheit ist.

Aufgabe 3.5. Bestimme die Einheiten von $\mathbb{Z}$ und von $K[X]$, wobei K ein Körper sei.

Aufgabe 3.6. Sei R ein kommutativer Ring und sei

$$\mathfrak{a}_1 \subseteq \mathfrak{a}_2 \subseteq \mathfrak{a}_3 \subseteq \ldots$$

eine aufsteigende Kette von Idealen. Zeige, dass die Vereinigung $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{a}_n$ ebenfalls ein Ideal ist. Zeige ebenso durch ein einfaches Beispiel, dass die Vereinigung von Idealen im Allgemeinen kein Ideal sein muss.

Aufgabe 3.7. Zeige, dass ein reelles Polynom von ungeradem Grad nicht irreduzibel ist.

Aufgabe 3.8. Es sei K ein Körper und sei $F \in K[X]$ ein von 0 verschiedenes Polynom. Zeige, dass es eine (bis auf die Reihenfolge der Faktoren) eindeutige Produktdarstellung

$$F = aF_1 \cdots F_r$$

mit $a \in K^\times$ und irreduziblen normierten Polynomen F_i, $i = 1, \ldots, r$, gibt.

Aufgabe 3.9. Zeige, dass $\mathbb{Z}[X]$ und der Polynomring in zwei Variablen $K[X, Y]$ über einem Körper K keine Hauptidealbereiche sind.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 3.10. (2 Punkte)

Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper. Bestimme in $K[X]$ die irreduziblen Polynome.

Aufgabe 3.11. (5 Punkte)

Sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K. Zeige, dass es unendlich viele normierte irreduzible Polynome in $K[X]$ gibt.

Aufgabe 3.12. (4 Punkte)

Es sei $P \in \mathbb{R}[X]$ ein nichtkonstantes Polynom mit reellen Koeffizienten. Zeige, dass man P als ein Produkt von reellen Polynomen vom Grad 1 oder 2 schreiben kann.

Aufgabe 3.13. (6 Punkte)

Es sei R ein Integritätsbereich. Zeige, dass man auf folgende Weise einen Körper K konstruieren kann, der R enthält.

Wir betrachten auf

$$M = R \times (R \setminus \{0\})$$

die durch

$$(a, b) \sim (c, d), \text{ falls } ad = bc\,,$$

definierte Relation.

a) Zeige, dass dies eine Äquivalenzrelation ist.

b) Definiere auf der Quotientenmenge $Q(R)$ Verknüpfungen derart, dass $Q(R)$ zu einem Körper wird und dass

$$\varphi : R \longrightarrow Q(R),\ r \longmapsto [(r,1)],$$

mit Addition und Multiplikation verträglich ist und $\varphi(1) = 1$ gilt.

4. Arbeitsblatt

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 4.1. Es seien G und H Gruppen und $\varphi : G \to H$ sei ein Gruppenhomomorphismus. Zeige, dass $\varphi(e_G) = e_H$ und $(\varphi(g))^{-1} = \varphi(g^{-1})$ für jedes $g \in G$ ist.

Aufgabe 4.2. Sei G eine Gruppe. Zeige, dass sich Gruppenelemente $g \in G$ und Gruppenhomomorphismen φ von $\mathbb{Z}$ nach G über die Korrespondenz

$$g \longmapsto (n \mapsto g^n) \text{ und } \varphi \longmapsto \varphi(1)$$

entsprechen.

Aufgabe 4.3. Seien G und H Gruppen und sei

$$\varphi : G \longrightarrow H$$

ein Gruppenisomorphismus. Zeige, dass auch die Umkehrabbildung

$$\varphi^{-1} : H \longrightarrow G,\ h \longmapsto \varphi^{-1}(h),$$

ein Gruppenisomorphismus ist.

Aufgabe 4.4. Seien G und H Gruppen und sei $\varphi : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Zeige, dass das Bild von φ eine Untergruppe von H ist.

Aufgabe 4.5. Stifte einen Gruppenisomorphismus zwischen der additiven Gruppe der reellen Zahlen $(\mathbb{R}, 0, +)$ und der multiplikativen Gruppe der positiven reellen Zahlen $(\mathbb{R}_+, 1, \cdot)$.

Aufgabe 4.6. Betrachte die Gruppe der komplexen Zahlen ohne null, $\mathbb{C}^\times = (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot, 1)$. Bestimme für jedes $n \in \mathbb{N}$ den Kern des Potenzierens

$$\mathbb{C}^\times \longrightarrow \mathbb{C}^\times,\ z \longmapsto z^n.$$

Sind diese Gruppenhomomorphismen surjektiv?

Aufgabe 4.7. Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}_+$. Zeige, dass die Determinante

$$\mathrm{GL}_n(K) \longrightarrow (K \setminus \{0\}, \cdot, 1),\ M \longmapsto \det M,$$

ein surjektiver Gruppenhomomorphismus ist.

Aufgabe 4.8. Man gebe für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine invertierbare Matrix $M \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ an, derart, dass die Ordnung von M gleich n ist.

Aufgabe 4.9. Sei G eine endliche Gruppe. Zeige, dass jedes Element $g \in G$ eine endliche Ordnung besitzt, und dass die Potenzen

$$g^0 = e_G,\ g^1 = g,\ g^2, \ldots, g^{\mathrm{ord}(g)-1}$$

alle verschieden sind.

Aufgabe 4.10. Bestimme die Nebenklassen zu den folgenden Untergruppen von kommutativen Gruppen.

(1) $(\mathbb{Z}, 0, +) \subseteq (\mathbb{R}, 0, +)$.
(2) $(\mathbb{Q}, 0, +) \subseteq (\mathbb{R}, 0, +)$.
(3) $(\mathbb{R}, 0, +) \subseteq (\mathbb{C}, 0, +)$.
(4) $(\mathbb{Z}n, 0, +) \subseteq (\mathbb{Z}, 0, +)$ $(n \in \mathbb{N})$.
(5) $(\{z \in \mathbb{C} | \, |z| = 1\}, 1, \cdot) \subseteq (\mathbb{C} \setminus \{0\}, 1, \cdot)$.
(6) $(\{z \in \mathbb{C} | \, z^n = 1\}, 1, \cdot) \subseteq (\{z \in \mathbb{C} | \, |z| = 1\}, 1, \cdot)$ $(n \in \mathbb{N})$.

Wann bestehen die Nebenklassen aus endlich vielen Elementen, wann ist der Index endlich?

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 4.11. (2 Punkte)

Betrachte die Matrix

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Zeige, dass diese Matrix einen Gruppenhomomorphismus von $\mathbb{Q}^2$ nach $\mathbb{Q}^2$ und ebenso von $\mathbb{Z}^2$ nach $\mathbb{Z}^2$ definiert. Untersuche diese beiden Gruppenhomomorphismen in Hinblick auf Injektivität und Surjektivität.

Aufgabe 4.12. (1 Punkt)

Sei G eine (multiplikativ geschriebene) kommutative Gruppe und sei $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass das Potenzieren

$$G \longrightarrow G,\ x \longmapsto x^n,$$

ein Gruppenhomomorphismus ist.

Aufgabe 4.13. (3 Punkte)

Stifte einen surjektiven Gruppenhomomorphismus von der Gruppe der komplexen Zahlen ohne null $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot, 1)$ in die multiplikative Gruppe der positiven reellen Zahlen $(\mathbb{R}_+, \cdot, 1)$.

Was ist der Kern dieser Abbildung?

Aufgabe 4.14. (3 Punkte)

Bestimme die Gruppenhomomorphismen von $(\mathbb{Q}, +, 0)$ nach $(\mathbb{Z}, +, 0)$.

Aufgabe 4.15. (4 Punkte)

Man gebe für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine invertierbare Matrix $M \in \mathrm{GL}_k(\mathbb{Q})$ an (dabei sei k geeignet gewählt), derart, dass die Ordnung von M gleich n ist.

Aufgabe 4.16. (3 Punkte)

Sei G eine Gruppe, in der jedes Element die Ordnung zwei hat, d.h. für jedes Gruppenelement g gilt $g^2 = e$. Zeige, dass die Gruppe G dann abelsch ist.

5. Arbeitsblatt

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 5.1. Seien G und H Gruppen und sei $\varphi : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Zeige, dass das Urbild $\varphi^{-1}(N)$ eines Normalteilers $N \subseteq H$ ein Normalteiler in G ist.

Aufgabe 5.2. Zeige, dass der Durchschnitt von Normalteilern N_i, $i \in I$, in einer Gruppe G ein Normalteiler ist.

Aufgabe 5.3. Sei G eine Gruppe und $g \in G$ ein Element mit dem (nach Lemma 4.4) zugehörigen Gruppenhomomorphismus

$$\varphi : \mathbb{Z} \longrightarrow G,\ n \longmapsto g^n.$$

Beschreibe die kanonische Faktorisierung von φ gemäß Satz 5.12.

In der folgenden Aufgabe wird das *Zentrum* einer Gruppe verwendet.

Sei G eine Gruppe. Das *Zentrum* $Z = Z(G)$ von G ist die Teilmenge

$$Z = \{g \in G |\, gx = xg \text{ für alle } x \in G\}\,.$$

Aufgabe 5.4. Sei G eine Gruppe. Zeige, dass das Zentrum $Z \subseteq G$ ein Normalteiler in G ist. Man bringe das Zentrum in Zusammenhang mit dem Gruppenhomomorphismus

$$\kappa : G \longrightarrow \mathrm{Aut}\,(G),\ g \longmapsto \kappa_g.$$

Was ist das Bild von diesem Homomorphismus, und was besagen die Homomorphiesätze in dieser Situation?

Aufgabe 5.5. Sei M eine Menge und sei $M = \biguplus_{i \in I} M_i$ eine Partition von M, d.h. jedes M_i ist eine Teilmenge von M und M ist die disjunkte Vereinigung der M_i. Zeige, dass die Produktgruppe

$$\prod_{i \in I} \mathrm{Perm}\,(M_i)$$

eine Untergruppe von $\mathrm{Perm}\,(M)$ ist.

Aufgabe 5.6. Sei $M = \{1, \ldots, n\}$ und sei σ eine Permutation auf M. Die zugehörige *Permutationsmatrix* M_σ ist dadurch gegeben, dass

$$a_{\sigma(i),i} = 1$$

ist und alle anderen Einträge null sind. Zeige, dass

$$\det(M_\sigma) = \mathrm{sgn}(\sigma)$$

ist.

Aufgabe 5.7. Man gebe eine Matrix $M \in \mathrm{GL}_2\,(\mathbb{Q})$ der Ordnung 4 an.

Aufgabe 5.8. Es sei $\mathrm{GL}_n\,(K)$ die Menge der reellen invertierbaren $n \times n$-Matrizen über einem Körper K. Zeige, dass für zueinander konjugierte Matrizen M und N aus $\mathrm{GL}_n\,(K)$ die folgenden Eigenschaften bzw. Invarianten übereinstimmen: Die Determinante, die Eigenwerte, die Dimension der Eigenräume zu einem Eigenwert, die Diagonalisierbarkeit, die Trigonalisierbarkeit.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 5.9. (3 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}_+$. Zeige, dass die Gruppe der n-ten Einheitswurzeln in $\mathbb{C}$ und die Gruppe $\mathbb{Z}/(n)$ isomorph sind.

Aufgabe 5.10. (2 Punkte)

Sei G eine Gruppe. Betrachte die Relation R auf G, wobei xRy bedeutet, dass es einen inneren Automorphismus κ_g gibt mit $x = \kappa_g(y)$. Zeige, dass diese Relation eine Äquivalenzrelation ist.

Die Äquivalenzklassen zu dieser Äquivalenzrelation bekommen einen eigenen Namen:

Zu einer Gruppe G nennt man die Äquivalenzklassen zur Äquivalenzrelation, bei der zwei Elemente als äquivalent (oder *konjugiert*) gelten, wenn sie durch einen inneren Automorphismus ineinander überführt werden können, die *Konjugationsklassen*.

Aufgabe 5.11. (2 Punkte)

Es sei S_3 die Gruppe der bijektiven Abbildungen der Menge $\{1, 2, 3\}$ in sich selbst. Bestimme die Konjugationsklassen dieser Gruppe.

Aufgabe 5.12. (2 Punkte)

Seien G und H Gruppen und sei $\varphi : G \to H$ ein surjektiver Gruppenhomomorphismus. Zeige, dass das Bild $\varphi(N)$ eines Normalteilers $N \subseteq G$ ein Normalteiler in H ist.

Aufgabe 5.13. (2 Punkte)

Zeige, dass jede Untergruppe vom Index zwei in einer Gruppe G ein Normalteiler in G ist.

Aufgabe 5.14. (5 Punkte)

Man gebe eine Matrix $M \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$ der Ordnung 3 an.

6. Arbeitsblatt

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 6.1. Zeige, dass das Bild unter einem Ringhomomorphismus ein Unterring ist.

Aufgabe 6.2. Zeige, dass das Bild eines Ideals unter einem Ringhomomorphismus nicht unbedingt wieder ein Ideal ist.

Aufgabe 6.3. Es sei $A \subseteq \mathbb{Q}$ die Menge derjenigen rationalen Zahlen, die eine abbrechende Dezimalentwicklung besitzen. Zeige, dass A ein Unterring von $\mathbb{Q}$ ist und bestimme die Einheiten von A.

Aufgabe 6.4. Sei R ein kommutativer Ring mit endlich vielen Elementen. Zeige, dass R genau dann ein Integritätsbereich ist, wenn R ein Körper ist.

Aufgabe 6.5. Zeige, dass ein kommutativer Ring genau dann ein Körper ist, wenn er genau zwei Ideale enthält.

Aufgabe 6.6. Sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K. Berechne das Bild des Polynoms X^3+4X-3 unter dem durch $X \mapsto X^2+X-1$ definierten Einsetzungshomomorphismus $K[X] \to K[X]$.

Aufgabe 6.7. Sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K. Es sei $a \in K$ ein fixiertes Element. Bestimme den Kern des Einsetzungshomomorphismus

$$K[X] \longrightarrow K,\, X \longmapsto a.$$

Aufgabe 6.8. Es sei $C = \mathrm{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ der Ring der stetigen Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Entscheide, ob die folgenden Teilmengen von C einen Unterring bilden.

(1) Die Menge der stetigen 2π-periodischen Funktionen.
(2) Die Menge der stetigen geraden Funktionen.
(3) Die Menge der stetigen ungeraden Funktionen.

Aufgabe 6.9. Es sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ und es sei $D_{\mathbb{K}} = \mathrm{C}^1(\mathbb{K}, \mathbb{K})$ der Ring der stetig-differenzierbaren Funktionen von $\mathbb{K}$ nach $\mathbb{K}$. Zeige, dass der Einsetzungshomomorphismus

$$\Psi : \mathbb{K}[X] \longrightarrow D_{\mathbb{K}},\, X \longmapsto \mathrm{id}_{\mathbb{K}},$$

injektiv ist. Bestimme die Polynome $F \in \mathbb{K}[X]$, für die $\Psi(F)$ eine Einheit in $D_{\mathbb{K}}$ ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 6.10. (3 Punkte)

Sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K. Berechne das Bild des Polynoms $X^4 - 2X^2 + 5X - 2$ unter dem durch $X \mapsto 2X^3 + X - 1$ definierten Einsetzungshomomorphismus $K[X] \to K[X]$.

Aufgabe 6.11. (5 Punkte)

Sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K. Es sei $P \in K[X]$ ein nicht-konstantes Polynom. Zeige, dass der durch $X \mapsto P$ definierte Einsetzungshomomorphismus von $K[X]$ nach $K[X]$ injektiv ist und dass der durch P erzeugte Unterring $K[P] \subseteq K[X]$ isomorph zum Polynomring in einer Variablen ist.

Zeige, dass bei $\operatorname{grad}(P) \geq 2$ ein echter Unterring $K[P] \subset K[X]$ vorliegt.

Aufgabe 6.12. (2 Punkte)

Sei R ein Integritätsbereich und $R[X]$ der Polynomring über R. Zeige, dass die Einheiten von $R[X]$ genau die Einheiten von R sind.

Aufgabe 6.13. (4 Punkte)

Es sei K ein Körper. Betrachte den Matrizenring $\operatorname{Mat}_3(K)$ und darin die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Definiere einen Ringhomomorphismus

$$K[X] \longrightarrow \operatorname{Mat}_3(K),$$

der X auf M schickt. Bestimme den Kern dieser Abbildung.

7. Arbeitsblatt

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 7.1. Bestimme die multiplikative Ordnung aller Einheiten im Restklassenkörper $\mathbb{Z}/(7)$.

Aufgabe 7.2. Berechne 3^{1457} in $\mathbb{Z}/(13)$.

Aufgabe 7.3. Bestimme im Polynomring $\mathbb{F}_5[X]$ alle irreduziblen Polynome vom Grad 3.

Aufgabe 7.4. Bestimme die fünf kleinsten Primzahlen p mit der Eigenschaft, dass das Polynom $X^6 - 1$ über $\mathbb{Z}/(p)$ in Linearfaktoren zerfällt.

Aufgabe 7.5. Betrachte den Körper $K = \mathbb{F}_4 = \mathbb{Z}/(2)[U]/(U^2 + U + 1)$. Führe im Polynomring $K[X]$ die Polynomdivision

$$X^4 + uX^3 + (u+1)X + 1 \text{ durch } uX^2 + X + u + 1$$

aus, wobei u die Restklasse von U in K bezeichnet.

Aufgabe 7.6. a) Bestimmen Sie die Primfaktorzerlegung des Polynoms $F = X^3 + X + 2$ in $\mathbb{Z}/(5)[X]$.

b) Zeigen Sie, dass durch

$$K = \mathbb{Z}/(5)[T]/(T^2 - 2)$$

ein Körper mit 25 Elementen gegeben ist.

c) Bestimmen Sie die Primfaktorzerlegung von $F = X^3 + X + 2$ über $K = \mathbb{Z}/(5)[T]/(T^2 - 2)$.

Aufgabe 7.7. Bestimme sämtliche Primkörper.

Aufgabe 7.8. Sei p eine Primzahl. Beweise durch Induktion den kleinen Fermat, also die Aussage, dass $a^p - a$ ein Vielfaches von p ist für jede ganze Zahl a.

Aufgabe 7.9. Sei R ein kommutativer Ring und $p \in R$, $p \neq 0$. Zeige, dass p genau dann ein Primelement ist, wenn der Restklassenring $R/(p)$ ein Integritätsbereich ist.

Aufgabe 7.10. Sei X ein topologischer Raum und $R = \mathrm{C}^0(X, \mathbb{R})$ der Ring der stetigen Funktionen auf X. Es sei $T \subseteq X$ eine Teilmenge. Zeige, dass die Teilmenge

$$I = \{f \in R |\, f|_T = 0\}$$

ein Ideal in R ist. Definiere einen Ringhomomorphismus

$$R/I \longrightarrow \mathrm{C}^0(T, \mathbb{R}).$$

Ist dieser immer injektiv? Surjektiv?

Aufgabe 7.11. Zeige, dass die beiden kommutativen Gruppen $(\mathbb{Q}, 0, +)$ und $(\mathbb{Q}_+, 1, \cdot)$ nicht isomorph sind.

Aufgabe 7.12. Zeige, dass die Abbildung

$$\mathbb{Q}[i]^\times \longrightarrow (\mathbb{Q}_+, 1, \cdot),\ z = x + iy \longmapsto |z|^2 = x^2 + y^2,$$

ein Gruppenhomomorphismus ist.

Aufgabe 7.13. Zeige, dass die Menge

$$S^1_{\mathbb{Q}} = \{z \in \mathbb{Q}[i] \,|\, |z| = 1\}$$

mit der Multiplikation in $\mathbb{Q}[i]$ eine kommutative Gruppe ist.

Aufgabe 7.14. Es sei

$$S^1_{\mathbb{Q}} = \{z \in \mathbb{Q}[i] \,|\, |z| = 1\}$$

der rationale Einheitskreis mit der aus $\mathbb{Q}[i]^\times$ ererbten Gruppenstruktur. Berechne die ersten vier Potenzen von $\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i \in S^1_{\mathbb{Q}}$.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 7.15. (3 Punkte)

Bestimme die multiplikative Ordnung aller Einheiten im Restklassenkörper $\mathbb{Z}/(11)$.

Aufgabe 7.16. (5 Punkte)

Bestimme im Polynomring $\mathbb{Z}/(3)[X]$ alle irreduziblen Polynome vom Grad 4.

Aufgabe 7.17. (4 Punkte)

Sei p eine Primzahl und sei $f(x)$ ein Polynom mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}/(p)$ vom Grad $d \geq p$. Zeige, dass es ein Polynom $g(x)$ mit einem Grad $< p$ gibt derart, dass für alle Elemente $a \in \mathbb{Z}/(p)$ die Gleichheit

$$f(a) = g(a)$$

gilt.

Aufgabe 7.18. (4 Punkte)

Es sei

$$S^1_{\mathbb{Q}} = \{z \in \mathbb{Q}[i] \,|\, |z| = 1\}$$

der rationale Einheitskreis mit der aus $\mathbb{Q}[i]^\times$ ererbten Gruppenstruktur. Zeige, dass die Gruppen $S^1_{\mathbb{Q}}$ und $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ nicht isomorph sind.

Aufgabe 7.19. (5 Punkte)

Zeige, dass der Gruppenhomomorphismus

$$\mathbb{Q}[i]^\times \longrightarrow (\mathbb{Q}_+, 1, \cdot),\ x + iy \longmapsto x^2 + y^2,$$

nicht surjektiv ist.

8. Arbeitsblatt

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 8.1. Zeige, dass die Menge der algebraischen Zahlen $\mathbb{A}$ keine endliche Körpererweiterung von $\mathbb{Q}$ ist.

Aufgabe 8.2. Zeige, dass es nur abzählbar viele algebraische Zahlen gibt.

Aufgabe 8.3. Es seien $K \subseteq L$ und $L \subseteq M$ algebraische Körpererweiterungen. Zeige, dass dann auch $K \subseteq M$ eine algebraische Körpererweiterung ist.

Aufgabe 8.4. Es sei K ein Körper. Zeige, dass es außer K keine endliche K-Unteralgebra $A \subseteq K[X]$ gibt.

Aufgabe 8.5. Es sei K ein kommutativer Ring und A eine kommutative K-Algebra. Beweise die folgenden Aussagen.

(1) Die Identität ist ein K-Algebra-Automorphismus.
(2) Die Verknüpfung $\varphi \circ \psi$ von zwei K-Algebra-Automorphismen φ und ψ ist wieder ein Automorphismus.
(3) Die Umkehrabbildung φ^{-1} zu einem K-Algebra-Automorphismus φ ist wieder ein Automorphismus.
(4) Die Menge der K-Algebra-Automorphismen bilden mit der Hintereinanderschaltung als Verknüpfung eine Gruppe.

Aufgabe 8.6. Es sei K ein Körper der Charakteristik $\neq 2$ und sei $K \subseteq L$ eine quadratische Körpererweiterung. Zeige, dass es neben der Identität einen weiteren K-Algebra-Automorphismus $L \to L$ gibt.

Aufgabe 8.7. Sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K. Zeige, dass ein Polynom $P \in K[X]$ genau dann irreduzibel ist, wenn das um $a \in K$ „verschobene“ Polynom (das entsteht, wenn man in P die Variable X durch $X - a$ ersetzt) irreduzibel ist.

Aufgabe 8.8. Sei $x = \sqrt{2} + \sqrt{5} \in \mathbb{R}$ und betrachte die Körpererweiterung

$$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(x) = L\,.$$

Zeige, dass diese Körpererweiterung algebraisch ist und bestimme den Grad der Körpererweiterung, das Minimalpolynom von x und das Inverse von x. (Man darf dabei verwenden, dass $\sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{10}$ irrationale Zahlen sind.)

Aufgabe 8.9. Sei $K \subseteq L$ eine Körpererweiterung und es sei $x_i \in L$, $i \in I$, ein Körper-Erzeugendensystem von L über K. Es seien $\varphi, \psi \in \mathrm{Gal}\,(L|K)$ mit $\varphi(x_i) = \psi(x_i)$ für alle $i \in I$. Zeige, dass $\varphi = \psi$ ist.

Aufgabe 8.10. Es sei $z = a + bi \in \mathbb{C}$, $a, b \in \mathbb{R}$, eine algebraische Zahl. Zeige, dass auch die konjugiert-komplexe Zahl $\overline{z} = a - bi$ sowie der Real- und der Imaginärteil von z algebraisch sind. Man bestimme den Grad der Körpererweiterung

$$\mathbb{A} \cap \mathbb{R} \subseteq \mathbb{A}\,.$$

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 8.11. (3 Punkte)

Sei $K \subseteq L$ eine Körpererweiterung und sei $f \in L$ ein Element. Zeige: f ist genau dann algebraisch über K, wenn $K[f] = K(f)$ ist.

Aufgabe 8.12. (3 Punkte)

Bestimme das Inverse von $2x^2+3x-1$ im Körper $\mathbb{Q}[X]/(X^3-5)$ (x bezeichnet die Restklasse von X).

Aufgabe 8.13. (4 Punkte)

Sei $K \subseteq L$ eine Körpererweiterung, wobei L algebraisch abgeschlossen sei. Zeige, dass auch der algebraische Abschluss $\overline{K}$ von K in L algebraisch abgeschlossen ist.[22]

Aufgabe 8.14. (3 Punkte)

Es sei K ein Körper und sei $K[X,Y]$ der Polynomring über K in zwei Variablen. Sei $P \in K[X]$ ein Polynom in der einen Variablen X. Zeige, dass durch die Einsetzung $X \mapsto X$ und $Y \mapsto Y + P(X)$ ein K-Algebra-Automorphismus von $K[X,Y]$ in sich definiert wird, der im Allgemeinen nicht linear ist.

Aufgabe 8.15. (5 Punkte)

Sei K ein Körper und sei $L = K(X)$ der rationale Funktionenkörper über K. Zeige, dass es zu jedem $n \in \mathbb{N}_+$ einen Ringhomomorphismus $\varphi : L \to L$ gibt derart, dass $L \cong \varphi(L) \subseteq L$ eine endliche Körpererweiterung vom Grad n ist.

[22] Die Bezeichnungen wären natürlich schlecht gewählt, wenn dies nicht gelten würde.

9. Arbeitsblatt

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 9.1. Es sei K ein Körper, D eine kommutative Gruppe und A eine D-graduierte K-Algebra. Zeige, dass zu einem Untermonoid $M \subseteq D$ der K-Vektorraum

$$\oplus_{d \in M} A_d$$

ein Unterring von A ist.

Aufgabe 9.2. Es sei K ein Körper, D eine endliche kommutative Gruppe und $K \subseteq L$ eine D-graduierte Körpererweiterung. Zeige, dass zu einem Untermonoid $M \subseteq D$ der K-Vektorraum

$$\oplus_{d \in M} A_d$$

ein Unterkörper von A ist.

Aufgabe 9.3. Es sei K ein Körper, D eine kommutative Gruppe und A eine D-graduierte K-Algebra, die ein Integritätsbereich sei. Zeige, dass die Menge

$$M = \{d \in D | \, A_d \neq 0\}$$

ein Untermonoid von D ist.

Aufgabe 9.4. Sei D eine Gruppe, K ein Körper und $D^\vee = \mathrm{Char}\,(D, K)$ die Charaktergruppe zu D. Beweise die folgenden Aussagen.

(1) $D^\vee$ ist eine kommutative Gruppe.
(2) Bei einer direkten Gruppenzerlegung $D = D_1 \times D_2$ ist $(D_1 \times D_2)^\vee = D_1^\vee \times D_2^\vee$.

Aufgabe 9.5. Sei D eine endliche Gruppe, K ein Körper und $\chi \in D^\vee = \mathrm{Char}\,(D, K)$ ein Charakter. Zeige, dass $\chi(d)$ für jedes $d \in D$ eine Einheitswurzel in K ist.

Vor der nächsten Aufgabe erwähnen wir die folgende Definition.

Es sei K ein Körper, D eine kommutative Gruppe und A eine D-graduierte K-Algebra. Ein K-Automorphismus

$$\varphi : A \longrightarrow A$$

heißt *homogen*, wenn für jedes homogene Element $a \in A_d$ gilt $\varphi(a) \in A_d$.

Aufgabe 9.6. Es sei K ein Körper, D eine kommutative Gruppe und A eine D-graduierte K-Algebra. Zeige, dass der in Lemma 9.11 zu einem Charakter $\chi \in D^\vee$ eingeführte Automorphismus

$$\varphi_\chi : A \longrightarrow A$$

homogen ist.

Aufgabe 9.7. Es sei G die Menge der stetigen geraden Funktionen und U die Menge der stetigen ungeraden Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Zeige, dass

$$\mathrm{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) = G \oplus U$$

eine $\mathbb{Z}/(2)$-graduierte $\mathbb{R}$-Algebra ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 9.8. (3 Punkte)

Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und sei $F \in K[X,Y]$ ein homogenes Polynom. Zeige: F zerfällt in Linearfaktoren.

Aufgabe 9.9. (4 Punkte)

Es sei K ein Körper, D eine kommutative Gruppe und A eine D-graduierte K-Algebra. Es sei

$$\varphi : A \longrightarrow A$$

ein homogener Automorphismus. Zeige, dass es einen Charakter $\chi \in D^\vee$ gibt mit $\varphi = \varphi_\chi$, wobei φ_χ der gemäß Lemma 9.11 zu χ gehörige Automorphismus ist.

Aufgabe 9.10. (3 Punkte)

Zeige, dass man $\sqrt{3}$ nicht als $\mathbb{Q}$-Linearkombination von 1 und $\sqrt{2}$ schreiben kann.

Aufgabe 9.11. (4 Punkte)

Betrachte die Körpererweiterung

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}[\sqrt{5},\sqrt{7}] = L\,.$$

Zeige, dass einerseits $1, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \sqrt{35}$ und andererseits $(\sqrt{5}+\sqrt{7})^i$, $i = 0,1,2,3$, eine $\mathbb{Q}$-Basis von L bildet. Berechne die Übergangsmatrizen für diese Basen.

Aufgabe 9.12. (5 Punkte)

Es sei

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

eine stetige Funktion. Zeige, dass die beiden folgenden Aussagen äquivalent sind.

(1) Es gibt eine stetige Funtion

$$g : \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{C}$$

mit $f(z) = g(|z|)$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

(2) Für alle n- ten Einheitswurzeln $\zeta \in \mathbb{C}$ (alle $n \in \mathbb{N}$) ist $f(\zeta z) = f(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

10. Arbeitsblatt

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 10.1. Finde primitive Einheiten in den Restklassenkörpern $\mathbb{Z}/(2)$, $\mathbb{Z}/(3)$, $\mathbb{Z}/(5)$, $\mathbb{Z}/(7)$ und $\mathbb{Z}/(11)$.

Aufgabe 10.2. Bestimme sämtliche primitive Einheiten im Restklassenkörper $\mathbb{Z}/(13)$.

Aufgabe 10.3. Sei p eine ungerade Primzahl und $\mathbb{Z}/(p)$ der zugehörige Restklassenkörper. Zeige, dass das Produkt von zwei primitiven Einheiten niemals primitiv ist.

Aufgabe 10.4. Konstruiere einen Körper $\mathbb{F}_9$ mit 9 Elementen.

Aufgabe 10.5. Bestimme in $\mathbb{F}_9$ für jedes Element die multiplikative Ordnung. Man gebe insbesondere die primitiven Einheiten an.

Aufgabe 10.6. Es sei p eine Primzahl und F ein Körper mit p^2 Elementen. Welche Ringhomomorphismen zwischen $\mathbb{Z}/(p^2)$ und F gibt es? Man betrachte beide Richtungen.

Aufgabe 10.7. a) Sei K ein Körper. Zeige, dass die Einheitengruppe von K nicht zyklisch unendlich ist.

b) Sei R ein kommutativer Ring, dessen Charakteristik nicht zwei ist. Zeige, dass die Einheitengruppe von R nicht zyklisch unendlich ist.

c) Beschreibe einen kommutativen Ring, dessen Einheitengruppe zyklisch unendlich ist.

Aufgabe 10.8. Bestimme den Rest von $44!$ modulo 47.

Aufgabe 10.9. Bestimme die Zerlegung von $X^{p-1}-1$ in irreduzible Polynome im Polynomring $\mathbb{Z}/(p)[X]$. Beweise aus dieser Zerlegung erneut den Satz von Wilson.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 10.10. (3 Punkte)

Finde primitive Einheiten in den Restklassenkörpern $\mathbb{Z}/(13)$, $\mathbb{Z}/(17)$ und $\mathbb{Z}/(19)$.

Aufgabe 10.11. (5 Punkte)

Konstruiere zu einer Primzahl p einen Körper mit p^2 Elementen.

Aufgabe 10.12. (4 Punkte)

Konstruiere endliche Körper mit $4, 8, 9, 16, 25, 27, 32$ und 49 Elementen.

Aufgabe 10.13. (4 Punkte)

Es sei $\mathbb{F}_9 = \mathbb{Z}/(3)[Z]/(Z^2+1)$ der Körper mit 9 Elementen (z bezeichne die Restklasse von Z). Führe in $\mathbb{F}_9[X]$ die Division mit Rest „P durch T“ für die beiden Polynome $P = X^4 + (1+2z)X^3 + zX^2 + 2X + 2 + z$ und $T = (z+1)X^2 + zX + 2$ durch.

Aufgabe 10.14. (4 Punkte)

Finde einen Erzeuger der Einheitengruppe eines Körpers mit 25 Elementen. Wieviele solche Erzeuger gibt es?

11. Arbeitsblatt

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 11.1. Zeige, dass der Körper der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ der Zerfällungskörper des Polynoms $X^2 + 1 \in \mathbb{R}[X]$ ist.

Aufgabe 11.2. Es sei K ein Körper und seien $F_1, \ldots, F_r \in K[X]$ Polynome. Zeige, dass es eine Körpererweiterung $K \subseteq L$ gibt derart, dass diese Polynome in $L[X]$ in Linearfaktoren zerfallen.

Aufgabe 11.3. Sei $K \subseteq L$ eine Körpererweiterung von endlichen Körpern. Zeige, dass dies eine einfache Körpererweiterung ist.

Aufgabe 11.4. Sei R ein kommutativer Ring, der einen Körper der positiven Charakteristik $p > 0$ enthalte (dabei ist p eine Primzahl). Zeige, dass die Abbildung

$$R \longrightarrow R,\ f \longmapsto f^p,$$

ein Ringhomomorphismus ist, den man den *Frobenius-Homomorphismus* nennt.

Aufgabe 11.5. Sei K ein Körper der positiven Charakteristik p. Sei $F : K \to K$ der Frobenius-Homomorphismus. Zeige, dass genau die Elemente aus $\mathbb{Z}/(p)$ invariant unter F sind.

Aufgabe 11.6. Sei p eine Primzahl und $q = p^n$, $n \geq 2$. Zeige, dass $\mathbb{Z}/(p^n)$ kein Vektorraum über $\mathbb{Z}/(p)$ sein kann.

Aufgabe 11.7. Bestimme die formale Ableitung von

$$2X^7 + X^6 + 2X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + 2 \in \mathbb{Z}/(3)[X]\,.$$

Aufgabe 11.8. Sei K ein Körper der positiven Charakteristik $p > 0$. Bestimme die Menge der Polynome $F \in K[T]$ mit formaler Ableitung $F' = 0$.

Die folgenden fünf Aufgaben waren schon mal Klausuraufgaben (es gibt dazu auch Lösungen).

Aufgabe 11.9. Bestimme in der Einheitengruppe $\mathbb{Z}/(17)^\times$ zu jeder möglichen Ordnung k ein Element $x \in \mathbb{Z}/(17)^\times$, das die Ordnung k besitzt. Man gebe auch eine Untergruppe

$$H \subseteq \mathbb{Z}/(17)^\times$$

an, die aus vier Elementen besteht.

Aufgabe 11.10. Sei p eine Primzahl und $x \in (\mathbb{Z}/(p))^\times$ eine Einheit. Es sei a die Ordnung von x in der additiven Gruppe $(\mathbb{Z}/(p), +, 0)$ und es sei b die Ordnung von x in der multiplikativen Gruppe $((\mathbb{Z}/(p))^\times, \cdot, 1)$. Zeige, dass a und b teilerfremd sind.

Aufgabe 11.11. Sei $\mathbb{F}_q$ ein endlicher Körper der Charakteristik ungleich 2. Zeige unter Verwendung der Isomorphiesätze, dass genau die Hälfte der Elemente aus $\mathbb{F}_q^\times$ ein Quadrat in $\mathbb{F}_q$ ist.

Aufgabe 11.12. Beschreibe den Körper mit neun Elementen $\mathbb{F}_9$ als einen Restklassenkörper von $\mathbb{Z}/(3)[X]$. Man gebe eine primitive Einheit in $\mathbb{F}_9$ an.

Aufgabe 11.13. Beschreibe den Körper mit acht Elementen $\mathbb{F}_8$ als einen Restklassenkörper von $\mathbb{Z}/(2)[X]$. Man gebe eine primitive Einheit in $\mathbb{F}_8$ an.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 11.14. (4 Punkte)

Konstruiere endliche Körper mit $64, 81, 121, 125$ und 128 Elementen.

Aufgabe 11.15. (4 Punkte)

Sei p eine Primzahl und $e, d \in \mathbb{N}_+$. Zeige: $\mathbb{F}_{p^d}$ ist ein Unterkörper von $\mathbb{F}_{p^e}$ genau dann, wenn e ein Vielfaches von d ist.

Aufgabe 11.16. (4 Punkte)

Sei q eine echte Primzahlpotenz und $\mathbb{F}_q$ der zugehörige endliche Körper. Zeige, dass in $\mathbb{F}_{q^2}$ jedes Element aus $\mathbb{F}_q$ ein Quadrat ist.

Aufgabe 11.17. (4 Punkte)

Finde einen Erzeuger der Einheitengruppe eines Körpers mit 27 Elementen. Wie viele solche Erzeuger gibt es?

Aufgabe 11.18. (3 Punkte)

Sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K. Beweise die folgenden Rechenregeln für das formale Ableiten $F \mapsto F'$:

(1) Die Ableitung eines konstanten Polynoms ist null.
(2) Die Ableitung ist K-linear.
(3) Es gilt die *Produktregel*, also

$$(FG)' = FG' + F'G\,.$$

Es sei K ein Körper. Ein Element $a \in K$ heißt *mehrfache Nullstelle* eines Polynoms $P \in K[X]$, wenn in der Primfaktorzerlegung von P das lineare Polynom $X - a$ mit einem Exponenten ≥ 2 vorkommt.

Aufgabe 11.19. (4 Punkte)

Sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K. Es sei $F \in K[X]$ und $a \in K$. Zeige, dass a eine mehrfache Nullstelle von F genau dann ist, wenn $F'(a) = 0$ ist, wobei F' die formale Ableitung von F bezeichnet.

12. Arbeitsblatt

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 12.1. Sei $K \subseteq L$ eine endliche Körpererweiterung, deren Grad eine Primzahl sei. Zeige, dass dann eine einfache Körpererweiterung vorliegt.

Aufgabe 12.2. Es sei K ein Körper und $L = K(X)$ der Quotientenkörper des Polynomrings $K[X]$. Zeige, dass $K \subset L$ eine einfache, aber keine endliche Körpererweiterung ist.

Aufgabe 12.3. Es sei K ein Körper und $P \in K[X]$ ein separables Polynom. Zeige, dass ein Teiler $F \in K[X]$ von P ebenfalls separabel ist.

Aufgabe 12.4. Sei K ein Körper. Ist ein konstantes Polynom $P \in K[X]$ separabel?

Aufgabe 12.5. Es sei $K \subseteq L$ eine endliche separable Körpererweiterung und M, $K \subseteq M \subseteq L$, ein Zwischenkörper. Zeige, das auch $M \subseteq L$ eine separable Körpererweiterung ist.

In den nächsten Aufgaben verwenden wir die folgende Definition.

Ein Körper K heißt *vollkommen*, wenn jedes irreduzible Polynom $P \in K[X]$ separabel ist.

Aufgabe 12.6. Es sei K ein vollkommener Körper und $K \subseteq L$ eine endliche Körpererweiterung. Zeige, dass $K \subseteq L$ eine separable Körpererweiterung ist.

Aufgabe 12.7. Zeige, dass jeder Körper der Charakteristik 0 vollkommen ist.

Aufgabe 12.8. Zeige, dass jeder algebraisch abgeschlossene Körper vollkommen ist.

Aufgabe 12.9. Zeige, dass der Körper $\mathbb{F}_p(X)$ der rationalen Funktionen nicht vollkommen ist.

Aufgabe 12.10. Man gebe ein Beispiel für eine endliche einfache Körpererweiterung $K \subseteq L$, die nicht separabel ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 12.11. (6 Punkte)

Sei K ein unendlicher Körper und sei $F \in K[X_1, \ldots, X_n]$ ein von null verschiedenes Polynom. Zeige, dass dann die zugehörige Polynomfunktion

$$F : K^n \longrightarrow K,\ (a_1, \ldots, a_n) \longmapsto F(a_1, \ldots, a_n),$$

nicht die Nullfunktion ist.

Aufgabe 12.12. (3 Punkte)

Es sei K ein Körper und $L = K(X)$ der Quotientenkörper des Polynomrings $K[X]$. Zeige, dass es unendlich viele Zwischenkörper zwischen K und L gibt.

Aufgabe 12.13. (3 Punkte)

Es sei K ein Körper und $L = K(X)$ der Quotientenkörper des Polynomrings $K[X]$. Es sei M, $K \subseteq M \subseteq L$, $M \neq K$, ein Zwischenkörper. Zeige, dass $M \subseteq L$ eine endliche Körpererweiterung ist.

Aufgabe 12.14. (5 Punkte)

Es sei K ein Körper der positiven Charakteristik p. Wir betrachten die Körpererweiterung

$$K(X^p, Y^p) \subseteq K(X, Y) .$$

Zeige, dass dies keine einfache Körpererweiterung ist.

13. Arbeitsblatt

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 13.1. Es sei K ein Körper, $F \in K[X]$ ein Polynom vom Grad n und $K \subseteq L$ der Zerfällungskörper von F. Zeige, dass die Abschätzung

$$\operatorname{grad}_K L \leq n!$$

gilt.

Aufgabe 13.2. Sei $K \subseteq L$ eine endliche Körpererweiterung mit Galoisgruppe $G = \operatorname{Gal}(L|K)$ und sei $K \subseteq M$ eine weitere Körpererweiterung. Es sei E die Menge der K-Algebra-Homomorphismen von L nach M. Zeige, dass die Zuordung

$$G \longrightarrow \operatorname{Perm}(E),\ \varphi \longmapsto (\iota \mapsto \iota \circ \varphi),$$

ein Gruppenhomomorphismus ist.

Aufgabe 13.3. Betrachte die Menge $\mu_4(\mathbb{C})$ der vierten Einheitswurzeln in $\mathbb{C}$. Welche sind untereinander über $\mathbb{Q}$ konjugiert?

Aufgabe 13.4. Sei $n \in \mathbb{N}_+$. Zeige, dass die n Vektoren (im $\mathbb{C}^n$)

$$(1, \zeta, \zeta^2, \ldots, \zeta^{n-1}), \zeta \in \mu_n(\mathbb{C}),$$

linear unabhängig sind.

Aufgabe 13.5. Sei $n \in \mathbb{N}_+$ und sei $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{n}}$. Berechne die Determinante der $(n \times n)$-Matrix

$$((\zeta^{r+s})_{0 \leq r,s \leq n-1})$$

für $n = 1, 2, 3, 4$.

Aufgabe 13.6. Es sei K ein Körper mit einer Charakeristik $\neq 2$ und sei $K \subseteq L$ eine quadratische Körpererweiterung. Zeige, dass $K \subseteq L$ eine Galoiserweiterung ist.

Aufgabe 13.7. Zeige, dass die quadratische Körpererweiterung $\mathbb{F}_2 \subseteq \mathbb{F}_4$ eine Galoiserweiterung ist.

Aufgabe 13.8. Zeige, dass die quadratische Körpererweiterung $\mathbb{F}_2(X) \subseteq \mathbb{F}_2(X)[T]/(T^2 - X)$ keine Galoiserweiterung ist.

Aufgabe 13.9. Sei $K \subseteq L$ eine endliche Körpererweiterung und sei $\mu_n(L)$ (zu $n \in \mathbb{N}_+$) die Gruppe der n-ten Einheitswurzeln in L. Zeige, dass es zu jedem n einen natürlichen Gruppenhomomorphismus

$$\operatorname{Gal}(L|K) \longrightarrow \operatorname{Aut}(\mu_n(L))$$

gibt.

Bei einer endlichen Körpererweiterung $K \subseteq L$ kann man jeden K-Algebra-Automorphismus von L - also jedes Element der Galoisgruppe - als eine bijektive K-lineare Abbildung

$$L \cong K^n \longrightarrow L \cong K^n$$

auffassen und kann daher die Begriffe der linearen Algebra darauf anwenden. Damit hat man insbesondere den Begriff der Determinante zur Verfügung.

Aufgabe 13.10. Sei $K \subseteq L$ eine endliche Körpererweiterung mit Galoisgruppe $G = \operatorname{Gal}(L|K)$. Zeige, dass die Abbildung

$$G \longrightarrow K^\times,\ \varphi \longmapsto \det \varphi,$$

ein Gruppen-Homomorphismus ist.

Aufgabe 13.11. Sei D eine endliche kommutative Gruppe mit der zugehörigen Charaktergruppe $D^\vee$ in einen Körper K. Zeige, dass die Abbildung

$$D^\vee \longrightarrow K^\times,\ \chi \longmapsto \prod_{d \in D} \chi(d),$$

ein Gruppenhomomorphismus ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 13.12. (3 Punkte)

Es sei K ein Körper und sei

$$\varphi : K \longrightarrow K$$

ein Körper-Automorphismus. Zeige, dass die Abbildung

$$K[X] \longrightarrow K[X],\ \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \longmapsto \sum_{i=0}^{n} \varphi(a_i) X^i,$$

ein Ring-Automorphismus des Polynomrings $K[X]$ ist.

Aufgabe 13.13. (2 Punkte)

Sei D eine endliche kommutative Gruppe und sei $K \subseteq L$ eine D-graduierte Körpererweiterung. Beweise für $\chi \in D^\vee$ die Gleichheit

$$\prod_{d \in D} \chi(d) \, = \, \det \, \varphi_\chi,$$

wobei φ_χ den zugehörigen K-Automorphismus von L bezeichnet (siehe Lemma 9.11).

Aufgabe 13.14. (3 Punkte)

Betrachte die Menge $\mu_8(\mathbb{C})$ der achten Einheitswurzeln in $\mathbb{C}$. Welche sind untereinander über $\mathbb{Q}$ konjugiert?

Aufgabe 13.15. (5 Punkte)

Sei D eine endliche zyklische Gruppe der Ordnung n mit der zugehörigen Charaktergruppe $D^\vee$ mit Werten in einem Körper K.

a) Zeige, dass der Gruppenhomomorphismus

$$\psi : D^\vee \longrightarrow K^\times, \, \chi \longmapsto \prod_{d \in D} \chi(d),$$

nur die Werte 1 und -1 annehmen kann.

b) Es sei vorausgesetzt, dass K eine n-te primitive Einheitswurzel enthält. Zeige, dass ψ genau dann den Wert -1 annimmt, wenn n gerade ist.

14. Arbeitsblatt

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 14.1. Zeige, dass man in Satz 14.3 nicht auf die Bedingung der Irreduzibilität verzichten kann.

Aufgabe 14.2. Zeige, dass man in Satz 14.3 die äquivalenten Bedingungen durch die folgende Eigenschaft ergänzen kann:

Zu jeder Körpererweiterung $K \subseteq M$ und zu zwei K-Algebra-Homomorphismen

$$\varphi_1, \varphi_2 : L \longrightarrow M$$

ist $\varphi_1(L) = \varphi_2(L)$.

Aufgabe 14.3. Es sei $q \in \mathbb{Q}$ eine rationale Zahl, die in $\mathbb{Q}$ keine dritte Wurzel besitzt, so dass $\mathbb{Q} \subseteq L = \mathbb{Q}[X]/(X^3 - q)$ ein Körpererweiterung vom Grad 3 ist. Zeige anhand der verschiedenen äquivalenten Formulierungen von Satz 14.3, dass diese Körpererweiterung nicht normal ist. Man gebe die verschiedenen Einbettungen von L in $\mathbb{C}$ an.

Aufgabe 14.4. Es sei $q \in \mathbb{Q}$ eine rationale Zahl und es sei L der Zerfällungskörper von $X^3 - q$. Welchen Grad besitzt L (über $\mathbb{Q}$)? Man gebe für jeden möglichen Grad Beispiele an.

Tipp: Man betrachte eine Einbettung $L \subseteq \mathbb{C}$ und den Durchschnitt $L \cap \mathbb{R}$.

Aufgabe 14.5. Sei $K \subseteq L$ eine endliche normale Körpererweiterung und M, $K \subseteq M \subseteq L$, ein Zwischenkörper, der über K nicht normal sei. Zeige, dass es einen weiteren Zwischenkörper $M' \neq M$ gibt, der zu M isomorph ist.

Aufgabe 14.6. Finde für den Körper L aus Beispiel 14.9 eine endliche Körpererweiterung $L \subseteq L'$ mit $L' \subseteq \mathbb{C}$ und so, dass L' über $\mathbb{Q}$ normal ist. Beschreibe einen $\mathbb{Q}$-Automorphismus $\varphi : L' \to L'$ mit $\varphi(L) \neq L$.

Aufgabe 14.7. Wir betrachten die Körpererweiterung $\mathbb{Q} \subseteq M$ aus Beispiel 14.9. Zeige anhand der verschiedenen äquivalenten Formulierungen von Satz 14.3, dass diese Körpererweiterung nicht normal ist.

Aufgabe 14.8. Es sei K ein Körper, D eine endliche kommutative Gruppe und $K \subseteq L$ eine D-graduierte Körpererweiterung. Zu jedem Primpotenzteiler p^r von $\#(D)$ enthalte K eine p^r-te primitive Einheitswurzel. Zeige, dass $K \subseteq L$ eine separable Körpererweiterung ist.

Aufgabe 14.9. Bestimme für die Körpererweiterung $\mathbb{F}_3 \subseteq \mathbb{F}_9$, welche Elemente aus $\mathbb{F}_9$ untereinander konjugiert sind.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 14.10. (4 Punkte)

Man gebe in jeder Charakteristik Beispiele für eine normale Körpererweiterung $K \subseteq L$ vom Grad 3.

Aufgabe 14.11. (3 Punkte)

Sei $K \subseteq L$ eine endliche Körpererweiterung und seien M_1, M_2 Zwischenkörper, die beide über K normal seien. Zeige, dass auch $K \subseteq M_1 \cap M_2$ normal ist.

Aufgabe 14.12. (4 Punkte)

Es sei K ein Körper, D eine endliche kommutative Gruppe und $K \subseteq L$ eine D-graduierte Körpererweiterung. Zu jedem Primpotenzteiler p^r von $\#(D)$ enthalte K eine p^r-te primitive Einheitswurzel. Zeige, dass $K \subseteq L$ eine normale Körpererweiterung ist.

Aufgabe 14.13. (4 Punkte)

Sei $K \subseteq L$ eine endliche normale und separable Körpererweiterung. Es sei $x \in L$ mit $x^n = a \in K$, wobei $\operatorname{grad}_K K(x) = n$ sei. Zeige, dass L n verschiedene n-te Einheitswurzeln besitzt.

Aufgabe 14.14. (4 Punkte)

Bestimme für die Körpererweiterung $\mathbb{F}_2 \subseteq \mathbb{F}_8$, welche Elemente aus $\mathbb{F}_8$ untereinander konjugiert sind.

15. Arbeitsblatt

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 15.1. Es sei L ein Körper und M eine Menge von Ringhomomorphismen von L nach L. Zeige, dass die Menge

$$\{x \in L | \, \varphi(x) = x \text{ für alle } \varphi \in M\}$$

ein Unterkörper von L ist.

Aufgabe 15.2. Es sei L ein Körper, es sei M eine Menge von Automorphismen von L nach L und es sei H die von M erzeugte Untergruppe der Automorphismengruppe. Zeige die Gleichheit

$$\operatorname{Fix}(H) = \{x \in L | \, \varphi(x) = x \text{ für alle } \varphi \in M\}.$$

Aufgabe 15.3. Es sei L ein Körper und $G = \operatorname{Aut} L$ die Automorphismengruppe von L. Begründe die folgenden Beziehungen.

(1) Für Untergruppen $H_1 \subseteq H_2 \subseteq G$ ist $\operatorname{Fix}(H_1) \supseteq \operatorname{Fix}(H_2)$.
(2) Für Unterkörper $M_1 \subseteq M_2 \subseteq L$ ist $\operatorname{Gal}(L|M_1) \supseteq \operatorname{Gal}(L|M_2)$.
(3) Für eine Untergruppe $H \subseteq G$ ist $H \subseteq \operatorname{Gal}(L| \operatorname{Fix}(H))$.
(4) Für einen Unterkörper $M \subseteq L$ ist $M \subseteq \operatorname{Fix}(\operatorname{Gal}(L|M))$.

Aufgabe 15.4. Es sei K ein Körper und H eine endliche Gruppe von Körperautomorphismen. Sei $x \in K$. Zeige, dass

$$\sum_{\varphi \in H} \varphi(x) \text{ und } \prod_{\varphi \in H} \varphi(x)$$

zum Fixkörper $\operatorname{Fix}(H)$ gehören.

Aufgabe 15.5. Es sei L ein Körper und sei

$$\varphi : L \longrightarrow L$$

ein Automorphismus. Zeige, dass die Einschränkung von φ auf den Primkörper von L die Identität ist.

Aufgabe 15.6. Beweise Lemma 11.6 mit Hilfe von Fixkörpern.

Aufgabe 15.7. Es sei p eine Primzahl und $q = p^e$, $e \geq 1$, eine Primzahlpotenz. Beweise mit Hilfe der verschiedenen äquivalenten Eigenschaften aus Satz 15.6, dass die Körpererweiterung $\mathbb{F}_p \subseteq \mathbb{F}_q$ galoissch ist.

Aufgabe 15.8. Bestimme die Matrix des Frobenius-Homomorphismus

$$\Phi : \mathbb{F}_q \longrightarrow \mathbb{F}_q$$

bzgl. einer geeigneten $\mathbb{F}_p$-Basis von $\mathbb{F}_q$ für $p = 2$ und $q = 4$ bzw. $q = 8$.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 15.9. (3 Punkte)

Es seien L und L' isomorphe Körper. Zeige, dass dann auch die Automorphismengruppen Aut (L) und Aut (L') in natürlicher Weise zueinander isomorph sind.

Aufgabe 15.10. (5 Punkte)

Bestimme die Körper-Automorphismen von $\mathbb{R}$.

Aufgabe 15.11. (3 Punkte)

Bestimme die Matrix des Frobenius-Homomorphismus

$$\Phi : \mathbb{F}_q \longrightarrow \mathbb{F}_q$$

bzgl. einer geeigneten $\mathbb{F}_p$-Basis von $\mathbb{F}_q$ für $p = 3$ und $q = 9$ bzw. $q = 27$.

Aufgabe 15.12. (5 Punkte)

Es sei $K \subseteq L$ eine endliche Galoiserweiterung mit einer zyklischen Galoisgruppe. Zeige, dass für jeden Zwischenkörper M auch die Erweiterung $K \subseteq M$ galoissch ist mit einer ebenfalls zyklischen Galoisgruppe.

16. Arbeitsblatt

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 16.1. Sei p eine Primzahl. Erstelle Inklusionsdiagramme für die Zwischenkörper der Körpererweiterung $\mathbb{F}_p \subseteq \mathbb{F}_{p^n}$ für $n = 4, 6, 8, 12$. Wie sehen die zugehörigen Inklusionsdiagramme der Untergruppen der Galoisgruppe aus?

Aufgabe 16.2. Es seien D_1 und D_2 kommutative Gruppen und seien $D_1^\vee$ und $D_2^\vee$ die zugehörigen Charaktergruppen zu einem Körper K.

(1) Zeige, dass zu einem Gruppenhomomorphismus

$$\varphi : D_1 \longrightarrow D_2$$

durch die Zuordnung $\chi \mapsto \chi \circ \varphi$ ein Gruppenhomomorphismus

$$\varphi^\vee : D_2^\vee \longrightarrow D_1^\vee$$

definiert wird.

(2) Es sei D_3 eine weitere kommutative Gruppe und sei

$$\psi : D_2 \longrightarrow D_3$$

ein Gruppenhomomorphismus. Zeige die Gleichheit

$$(\psi \circ \varphi)^\vee = \varphi^\vee \circ \psi^\vee.$$

Aufgabe 16.3. Es sei D eine kommutative Gruppe und K ein Körper.

a) Zeige, dass durch

$$D \longrightarrow (D^\vee)^\vee,\ d \longmapsto (\mathrm{ev}_d : \chi \mapsto \chi(d))$$

ein natürlicher Gruppenhomomorphismus von D in das Doppeldual $(D^\vee)^\vee$ gegeben ist.

b) Es sei nun D endlich und es sei vorausgesetzt, dass K eine m-te primitive Einheitswurzel enthält, wobei m der Exponent von D sei. Zeige, dass dann die Abbildung aus a) ein Isomorphismus ist.

Die in der vorstehenden Aufgabe auftretende Abbildung ev_d heißt *Evaluierungsabbildung* (zu d).

Aufgabe 16.4. Es sei D eine endliche kommutative Gruppe und es sei K ein Körper. Wir betrachten die Zuordnung

$$E \longmapsto E^\perp = \{\chi \in D^\vee |\, \chi(d) = 1 \text{ für alle } d \in E\},$$

die einer Untergruppe von D eine Untergruppe von $D^\vee$ zuordnet. Zeige die folgenden Aussagen.

a) Die Zuordnung ist inklusionsumkehrend.

b) Unter der kanonischen Abbildung

$$D \longrightarrow (D^\vee)^\vee,\ d \longmapsto (\mathrm{ev}_d : \chi \mapsto \chi(d)),$$

ist $\mathrm{ev}_d(E) \subseteq (E^\perp)^\perp$.

c) Es sei vorausgesetzt, dass K eine m-te primitive Einheitswurzel enthält, wobei m der Exponent von D sei. Zeige, dass dann $\mathrm{ev}_d(E) = (E^\perp)^\perp$ gilt.

Aufgabe 16.5. Es sei D eine endliche kommutative Gruppe mit dem Exponenten m, und es sei K ein Körper, der eine primitive m-te Einheitswurzel besitzt. Zeige, dass die Zuordnungen

$$E \longmapsto E^{\perp} = \{\chi \in D^{\vee} | \, \chi(d) = 1 \text{ für alle } d \in E\}$$

und

$$H \longmapsto H^{\perp}$$

(zwischen den Untergruppen von D und den Untergruppen von $D^{\vee}$) zueinander invers sind.

Aufgabe 16.6. Bestimme die Zwischenkörper in Beispiel 16.8.

Ein Element $f \in L$ einer Körpererweiterung $K \subseteq L$ definiert durch Multiplikation eine K-lineare Abbildung

$$\mu_f : L \longrightarrow L, \, y \longmapsto fy.$$

Aufgabe 16.7. Sei $K \subseteq L$ eine endliche Körpererweiterung. Zeige, dass die Abbildung

$$L \longrightarrow \operatorname{End}_K(L), \, f \longmapsto \mu_f,$$

ein Ringhomomorphismus ist.

Aufgabe 16.8. Sei $K \subseteq L$ eine endliche Körpererweiterung und sei $f \in L$ gegeben mit der zugehörigen Multiplikationsabbildung μ_f. Zeige, dass das charakteristische Polynom χ_{μ_f} ein Vielfaches des Minimalpolynoms zu f ist.

Aufgabe 16.9. Sei $K \subseteq L$ eine endliche Körpererweiterung. Zeige, dass zwischen $\varphi \in \operatorname{Gal}(L|K)$ und der Multiplikationsabbildung μ_f, $f \in L$, beide aufgefasst als K-lineare Abbildung von L nach L, weder die Beziehung

$$\mu_{\varphi(f)} = \mu_f \circ \varphi$$

noch die Beziehung

$$\mu_{\varphi(f)} = \varphi \circ \mu_f$$

gelten muss.

Über μ_f wird auch die Norm von $f \in L$ definiert.

Definition 16.10. Sei $K \subseteq L$ eine endliche Körpererweiterung. Zu einem Element $f \in L$ nennt man die Determinante der K-linearen Abbildung

$$\mu_f : L \longrightarrow L, \, y \longmapsto fy,$$

die *Norm* von f. Sie wird mit $N(f)$ bezeichnet.

Aufgabe 16.11. Sei $K \subseteq L$ eine endliche Körpererweiterung. Zeige, dass die Norm

$$N : L \longrightarrow K, \, f \longmapsto N(f),$$

folgende Eigenschaften besitzt.

(1) Es ist $N(fg) = N(f)N(g)$.
(2) Für $f \in K$ ist $N(f) = f^n$, wobei n den Grad der Körpererweiterung bezeichne.
(3) Es ist $N(f) = 0$ genau dann, wenn $f = 0$ ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 16.12. (3 Punkte)

Es sei $K \subseteq L$ eine endliche Galoiserweiterung und sei M, $K \subseteq M \subseteq L$, ein Zwischenkörper. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(1) Für alle $\psi \in \mathrm{Gal}\,(L|K)$ ist $\psi(M) = M$.
(2) Die Untergruppe $\mathrm{Gal}\,(L|M) \subseteq \mathrm{Gal}\,(L|K)$ ist nur zu sich selbst konjugiert.

Aufgabe 16.13. (3 Punkte)

Es sei K ein Körper und $F \in K[X]$ ein irreduzibles separables Polynom. Es sei vorausgesetzt, dass die Galoisgruppe des Zerfällungskörpers L von F kommutativ sei. Zeige, dass dann $L \cong K[X]/(F)$ ist.

Aufgabe 16.14. (4 Punkte)

Es sei K ein Körper und sei D eine endliche kommutative Gruppe mit dem Exponenten m. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind.

(1) K besitzt eine m-te primitive Einheitswurzel.
(2) Zu jedem Primpotenzteiler p^r von m besitzt K eine p^r-te primitive Einheitswurzel.
(3) Zu jedem Teiler n von m besitzt K eine n-te primitive Einheitswurzel.
(4) Zu jeder Ordnung n eines Elementes $d \in D$ besitzt K eine n-te primitive Einheitswurzel.

Aufgabe 16.15. (4 (1+3) Punkte)

Es sei D eine endliche kommutative Gruppe und $E \subseteq D$ eine Untergruppe. Es sei K ein Körper.

a) Zeige, dass der Kern des natürlichen Gruppenhomomorphismus

$$\psi : D^\vee \longrightarrow E^\vee,\ \chi \longmapsto \chi|_E,$$

gleich $E^\perp$ ist.

b) Es sei vorausgesetzt, dass K eine m-te primitive Einheitswurzel besitzt, wobei m der Exponent von D sei. Zeige, dass ψ surjektiv ist.

17. Arbeitsblatt

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 17.1. Sei $K \subseteq L$ eine endliche Körpererweiterung und sei $\varphi \in \mathrm{Gal}\,(L|K)$ ein K-Automorphismus. Es sei λ ein Eigenwert von φ. Zeige, dass λ eine Einheitswurzel ist.

Aufgabe 17.2. Sei $K \subseteq L$ eine endliche Körpererweiterung und sei $\delta \in G^\vee$ ein Charakter auf der Galoisgruppe $G = \mathrm{Gal}\,(L|K)$. Man mache sich die Gleichheit

$$L_\delta = \{x \in L |\, \varphi(x) = \delta(\varphi) \cdot x \text{ für alle } \varphi \in G\} = \bigcap_{\varphi \in G} \mathrm{Eig}_{\delta(\varphi)}(\varphi)$$

klar.

Aufgabe 17.3. Bestimme die Eigenwerte und die Eigenräume des Frobenius-Homomorphismus auf $\mathbb{F}_{125}$.

Aufgabe 17.4. Bestimme die Eigenwerte und die Eigenräume des Frobenius-Homomorphismus auf $\mathbb{F}_{p^p}$.

Aufgabe 17.5. Bestimme die Matrizen zu sämtlichen Körperautomorphismen in Beispiel 16.8 bzgl. einer geeigneten Basis.

Aufgabe 17.6. Bestimme die Nullstellen von $X^6 + 108$ in Beispiel 16.8 und beschreibe, wie die Automorphismen auf diesen Nullstellen wirken. Welche Nullstellen sind konjugiert?

Aufgabe 17.7. Formuliere und beweise das „verschobene Eisensteinkriterium“. Man gebe auch ein Beispiel eines Polynoms $P \in \mathbb{Q}[X]$, wo man die Irreduzibilität nicht mit dem Eisensteinkriterium, aber mit dem verschobenen Eisensteinkriterium nachweisen kann.

Aufgabe 17.8. Formuliere und beweise das *umgekehrte Eisensteinkriterium*, bei dem die Rollen des Leitkoeffizienten und des konstanten Koeffizienten vertauscht werden.

Aufgabe 17.9. Wende eine Form des *Eisensteinkriteriums* an, um die Irreduzibilität der folgenden Polynome aus $\mathbb{Q}[X]$ nachzuweisen.

(1) $X^4 + 2X^2 + 2$,
(2) $20X^5 - 15X^4 + 125X^3 - 10X + 4$,
(3) $X^4 + 9$.

Aufgabe 17.10. Bestimme die Primfaktorzerlegung des Polynoms $X^6 - 1$ über den Körpern $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}/(7)$ und $\mathbb{Z}/(5)$.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 17.11. (6 Punkte)

Es sei p eine Primzahl. Betrachte das Polynom

$$P = X^{p-1} + X^{p-2} + \ldots + X^2 + X + 1\,.$$

Zeige, dass P irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$ ist.

Aufgabe 17.12. (6 Punkte)

Sei K ein Körper und sei p eine Primzahl. Es sei $a \in K$ ein Element, das in K keine p-te Wurzel besitzt. Zeige, dass das Polynom $X^p - a$ irreduzibel ist.

(Tipp: Betrachte die Norm zu einer geeigneten Körpererweiterung.)

Aufgabe 17.13. (3 Punkte)

Bestimme die Eigenwerte und die Eigenräume des Frobenius-Homomorphismus auf $\mathbb{F}_{343}$.

Aufgabe 17.14. (5 Punkte)

Es sei $K \subseteq L = K[x]$ eine endliche einfache Körpererweiterung und sei $\mu_x : L \to L$ die Multiplikation mit x.

a) Schreibe die Matrix der linearen Abbildung μ_x bzgl. der Basis $1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}$ von L mit Hilfe des Minimalpolynoms von x.

b) Zeige ausgehend von der Matrix aus a), dass das charakteristische Polynom zu μ_x mit dem Minimalpolynom zu x übereinstimmt.

c) Begründe „theoretisch“, dass das charakteristische Polynom das Minimalpolynom ist.

18. Arbeitsblatt

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 18.1. Es sei R ein kommutativer Ring und sei $p \in R$ ein Primelement. Zeige, dass p auch im Polynomring $R[X]$ prim ist.

Aufgabe 18.2. Es seien $F, G \in \mathbb{Z}[X]$ normierte Polynome mit der Eigenschaft, dass $F = GH$ ist mit $H \in \mathbb{Q}[X]$. Zeige, dass $H \in \mathbb{Z}[X]$ ist.

Aufgabe 18.3. Berechne die Werte der Eulerschen Funktion $\varphi(n)$ für $n \leq 20$.

Man diskutiere dabei auch die Einheitenversion des Chinesischen Restsatzes, siehe Anhang 4.

Aufgabe 18.4. Schreibe den 5-ten Kreisteilungskörper K_5 als quadratische Körpererweiterung von $\mathbb{Q}[\sqrt{5}]$.

Aufgabe 18.5. Es sei $n \in \mathbb{N}$ ungerade. Zeige, dass der n-te Kreisteilungskörper mit dem $2n$-ten Kreisteilungskörper übereinstimmt.

Aufgabe 18.6. Bestimme die Kreisteilungspolynome Φ_n für $n \leq 15$.

Über einem beliebigen Körper K werden Kreisteilungskörper folgendermaßen definiert.

Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Der n-te *Kreisteilungskörper über* K ist der Zerfällungskörper des Polynoms

$$X^n - 1$$

über K.

Aufgabe 18.7. Sei p eine Primzahl und $q = p^e$, $e \geq 1$, eine Primzahlpotenz. Zeige, dass der $(q-1)$-te Kreisteilungskörper über $\mathbb{F}_p$ gleich $\mathbb{F}_q$ ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 18.8. (3 Punkte)

Betrachte das Polynom

$$P = x^6 - 5x^5 + 11x^4 - 13x^3 + 9x^2 - 3x + 1\,.$$

Zeige, dass P irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$ ist.

Aufgabe 18.9. (4 Punkte)

Zeige, dass die beiden folgenden Polynome in $\mathbb{Q}[x, y]$ irreduzibel sind.

a) $y^4 + 3x^2y^2 + 4x^7y + 2x$.

b) $y^6 + 3xy^4 + 3x^2y^2 + x^3$.

Aufgabe 18.10. (4 Punkte)

Zeige, dass die Eulersche Funktion φ für natürliche Zahlen n, m die Eigenschaft

$$\varphi(\mathrm{ggT}(m,n))\varphi(\mathrm{kgV}(m,n)) = \varphi(n)\varphi(m)$$

erfüllt.

Aufgabe 18.11. (4 Punkte)

Sei $\varphi(n)$ die Eulersche Funktion. Zeige, dass die Folge $\frac{\varphi(n)}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, sowohl in 1 als auch in $\frac{1}{3}$ einen Häufungspunkt besitzt.

Aufgabe 18.12. (4 Punkte)

Beweise die *Eulersche Formel* für die Eulersche Funktion φ, das ist die Aussage, dass

$$\varphi(n) = n \cdot \prod_{p|n,\ p \text{ prim}} (1 - \frac{1}{p})$$

gilt.

Aufgabe 18.13. (4 Punkte)

Zeige, dass das achte Kreisteilungspolynom $X^4 + 1$ über allen endlichen Primkörpern $\mathbb{F}_p$ reduzibel ist.

Hinweis: Zeige, dass $\mathbb{F}_{p^2}$ für $p \neq 2$ bereits eine primitive achte Einheitswurzel enthält.

Aufgabe 18.14. (4 Punkte)

Es sei p eine Primzahl und n eine natürliche Zahl, die wir als $n = kp^a$ schreiben mit k und p teilerfremd. Zeige, dass der n-te Kreisteilungskörper über $\mathbb{F}_p$ gleich $\mathbb{F}_q$ ist (mit $q = p^e$), wobei q die minimale echte Potenz von p mit der Eigenschaft ist, dass $q-1$ ein Vielfaches von k ist. Zeige insbesondere, dass es ein solches q gibt.

Die nächste Aufgabe ist eine Kollektivaufgabe, die auf Wikiversity bearbeitet werden soll.

Aufgabe 18.15. (8 Punkte)

Erstelle eine Tabelle, die für die ersten zwölf Primzahlen p und für $n = 1, \ldots, 12$ angibt, welcher endliche Körper $\mathbb{F}_{p^e}$ der n-te Kreisteilungskörper über $\mathbb{F}_p$ ist.

(Man trage die Exponenten e ein; es empfiehlt sich zur Probe, die Zeilen und Spalten unabhängig voneinander durchzurechnen.)

p	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	1	1	2	1	4							
3	1											
5	1											
7	1											
11	1											
17	1											
19	1											
23	1											
29	1											
31	1											
37	1											

19. Arbeitsblatt

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 19.1. Bestimme für $n \leq 12$, welche der n-ten Einheitswurzeln in K_n zueinander konjugiert sind.

Aufgabe 19.2. Bestimme für $n \leq 12$, wie viele Unterkörper der n-te Kreisteilungskörper K_n besitzt und wie viele davon selbst Kreisteilungskörper sind.

Aufgabe 19.3. Zeige, dass das Kompositum K_1K_2 zu zwei Körpererweiterungen $K \subseteq K_1$ und $K \subseteq K_2$ vom gewählten Oberkörper abhängen kann.

Aufgabe 19.4. Es seien $K \subseteq K_1$ und $K \subseteq K_2$ zwei Körpererweiterungen vom Grad d_1 bzw. d_2. Es sei K_1K_2 das in einem Oberkörper gebildete Kompositum. Zeige, dass die Abschätzung $\operatorname{grad}_K K_1K_2 \leq d_1d_2$ gilt.

Aufgabe 19.5. Es sei K ein Körper und es seien $K \subseteq K_1 \cong K[X]/F(X)$ und $K \subseteq K_2 \cong K[Y]/G(Y)$ zwei endliche einfache Körpererweiterungen von K.

a) Zeige, dass die K-Algebra $A = K[X,Y]/(F,G)$ kein Körper sein muss.

b) Es sei K_1K_2 das in einem gemeinsamen Oberkörper gebildete Kompositum. Zeige, dass es einen surjektiven K-Algebra-Homomorphismus von A nach K_1K_2 gibt.

Aufgabe 19.6. Es sei p eine Primzahl und sei $\mathbb{F}_{q_1}$ der Körper mit $q_1 = p^{e_1}$ und $\mathbb{F}_{q_2}$ der Körper mit $q_2 = p^{e_2}$ Elementen. Zeige, dass das Kompositum (unabhängig vom gewählten Oberkörper) von $\mathbb{F}_{q_1}$ und $\mathbb{F}_{q_2}$ gleich $\mathbb{F}_q$ mit $q = p^e$ und $e = \mathrm{kgV}\,(e_1, e_2)$ ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 19.7. (3 Punkte)

Sei $\varphi(n)$ die Eulersche Funktion. Zeige die Abschätzung

$$\varphi(n) \geq \frac{\sqrt{n}}{2}.$$

Aufgabe 19.8. (4 Punkte)

Es sei K_n der n-te Kreisteilungskörper, $n \geq 3$. Zeige, dass es einen Zwischenkörper L, $\mathbb{Q} \subseteq L \subseteq K_n$, gibt, der eine quadratische Körpererweiterung von $\mathbb{Q}$ ist.

Aufgabe 19.9. (2 Punkte)

Es seien K_{n_1} und K_{n_2} zwei Kreisteilungskörper über $\mathbb{Q}$. Zeige, dass das Kompositum (unabhängig vom gewählten Oberkörper) von K_{n_1} und K_{n_2} gleich K_n ist, wobei $n = \mathrm{kgV}\,(n_1, n_2)$ ist.

Aufgabe 19.10. (3 Punkte)

Es seien m und n teilerfremde natürliche Zahlen. Zeige, dass das n-te Kreisteilungspolynom über dem m-ten Kreisteilungskörper K_m irreduzibel ist.

Aufgabe 19.11. (3 Punkte)

Es sei K ein Körper der Charakteristik 0 und sei $K \subseteq K(\zeta)$ die Adjunktion einer n-ten primitiven Einheitswurzel. Zeige mit Hilfe von Satz 19.6 und der Theorie der Kreisteilungskörper (über $\mathbb{Q}$), dass $K \subseteq K(\zeta)$ eine Galoiserweiterung ist, deren Galoisgruppe abelsch ist.

Aufgabe 19.12. (4 Punkte)

Es sei K ein Körper und es seien $K \subseteq K_1 \cong K[X]/F(X)$ und $K \subseteq K_2 \cong K[Y]/G(Y)$ zwei endliche einfache Körpererweiterungen von K, deren Grade teilerfremd seien. Zeige, dass die K-Algebra $A = K[X,Y]/(F,G)$ ein Körper ist.

Aufgabe 19.13. (7 Punkte)

Zu $n \geq 3$ sei F_n der Flächeninhalt eines in den Einheitskreis eingeschriebenen gleichmäßigen n-Eckes. Zeige $F_n \leq F_{n+1}$.

20. Arbeitsblatt

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 20.1. Untersuche für jede Filtrierung von S_3 mit Untergruppen, ob eine auflösende Filtrierung vorliegt oder nicht.

Aufgabe 20.2. Sei G eine Gruppe. Zeige, dass G genau dann kommutativ ist, wenn die Kommutatoruntergruppe $K(G)$ trivial ist.

Aufgabe 20.3. Seien G und H Gruppen und sei

$$\varphi : G \longrightarrow H$$

ein Gruppenhomomorphismus. Zeige die Beziehung $\varphi(K(G)) \subseteq K(H)$.

Die folgende Aussage heißt Satz von Cayley.

Jede Gruppe lässt sich als Untergruppe einer Permutationsgruppe realisieren. Jede endliche Gruppe lässt sich als Untergruppe einer endlichen Permutationsgruppe realisieren.

Aufgabe 20.4. Beweise den Satz von Cayley für Gruppen.

Eine Gruppe heißt *einfach*, wenn sie genau zwei Normalteiler enthält (nämlich sich selbst und die triviale Gruppe).

Aufgabe 20.5. Sei G eine einfache, nicht kommutative Gruppe. Zeige, dass G nicht auflösbar ist.

Aufgabe 20.6. Sei G eine einfache, nicht kommutative Gruppe. Zeige, dass G eine Untergruppe besitzt, die kein Normalteiler ist.

Zu $n \in \mathbb{N}$ heißt die Untergruppe

$$A_n = \{\sigma \in S_n | \operatorname{sgn}(\sigma) = 1\} \subseteq S_n$$

der geraden Permutationen die *alternierende Gruppe*.

Wir erwähnen, dass die alternierenden Gruppen A_n, $n \geq 5$, einfach sind (das ist eine nichttriviale Aussage). Dies bedeutet, dass die Permutationsgruppen S_n, $n \geq 5$, nur die alternierende Gruppe als Normalteiler enthalten.

Aufgabe 20.7. Sei A_n eine alternierende Gruppe mit $n \geq 4$. Zeige, dass A_n nicht kommutativ ist.

Eine Gruppe G heißt *perfekt*, wenn sie gleich ihrer eigenen Kommutatoruntergruppe ist, also wenn $G = K(G)$ gilt.

Aufgabe 20.8. Sei G eine einfache, nicht kommutative Gruppe. Zeige, dass G perfekt ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 20.9. (4 Punkte)

Zeige, dass für $n \leq 4$ die Permutationsgruppen S_n auflösbar sind.

Aufgabe 20.10. (3 Punkte)

Sei G eine zyklische Gruppe. Zeige, dass G genau dann einfach ist, wenn G endlich und ihre Ordnung eine Primzahl ist.

Aufgabe 20.11. (2 Punkte)

Zeige, dass jede gerade Permutation $\sigma \in S_n$, $n \geq 3$, ein Produkt aus Dreierzykeln ist.

Aufgabe 20.12. (4 Punkte)

Zeige: Keine der alternierenden Gruppen A_n besitzt eine Untergruppe vom Index zwei.

Hinweis: Aufgabe 20.11 hilft.

Aufgabe 20.13. (3 Punkte)

Sei G eine Gruppe mit Zentrum $Z(G)$. Zeige:

(1) G ist genau dann abelsch, wenn $G/Z(G)$ zyklisch ist.
(2) Der Index von $Z(G)$ in G ist keine Primzahl.
(3) Ist G von der Ordnung pq für zwei Primzahlen p und q, so ist G abelsch oder $Z(G)$ trivial.

Aufgabe 20.14. (4 Punkte)

Sei K ein Körper mit mindestens 4 Elementen. Zeige, dass $\mathrm{SL}_2(K)$ perfekt ist.

Tipp: Es gibt ein $x \in K$ mit $x^2 - 1 \neq 0$.

Aufgabe 20.15. (4 Punkte)

Sei K ein Körper. Zeige, dass $\mathrm{SL}_2(K)$ von

$$\{\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid b \in K\} \cup \{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} \mid c \in K\}$$

erzeugt wird.

21. Arbeitsblatt

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 21.1. Es seien $K \subseteq L$ und $L \subseteq M$ auflösbare Körpererweiterungen. Zeige, dass auch $K \subseteq M$ auflösbar ist.

Aufgabe 21.2. Es sei $K \subseteq L$ eine auflösbare Körpererweiterung. Es sei $K \subseteq K'$ eine weitere Körpererweiterung und es sei $L' = LK'$ das Kompositum von L und K' (das in einem gewissen Oberkörper gebildet sei). Zeige, dass auch $K' \subseteq L'$ auflösbar ist.

Aufgabe 21.3. Es sei K ein Körper und seien $P, F \in K[X]$ nichtkonstante Polynome. Wir setzen $Q = P(F)$ (in P wird also das Polynom F eingesetzt). Zeige, dass man den Zerfällungskörper von P in den Zerfällungskörper von Q einbetten kann.

Aufgabe 21.4. Es sei K ein Körper und sei $P \in K[X]$ ein auflösbares Polynom. Zeige, dass auch $P(X^n)$ auflösbar ist.

Nach Aufgabe 5.4 ist das Zentrum $Z_1 = Z = Z(G)$ einer Gruppe G ein Normalteiler in G. Folglich gibt es eine Restklassengruppe $G/Z(G)$, die selbst wiederum ein Zentrum besitzt. Das Urbild dieser Gruppe in G wird mit Z_2 bezeichnet; sie ist wieder ein Normalteiler in G, so dass man eine Filtration

$$0 \subseteq Z_1 \subseteq Z_2 \subseteq Z_3 \subseteq \cdots$$

von Normalteilern in G erhält. Diese Filtration nennt man *Zentralreihe*.

Eine Gruppe G heißt *nilpotent*, wenn ihre Zentralreihe bei G endet, d.h. wenn G mit einer iterierten Zentrumsgruppe $Z_n(G)$ übereinstimmt.

Aufgabe 21.5. Zeige, dass eine nilpotente Gruppe auflösbar ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 21.6. (4 Punkte)

Es sei $K \subseteq L$ eine endliche Galoiserweiterung mit Galoisgruppe G und es seien $H_1, H_2 \subseteq G$ Untergruppen mit den zugehörigen Fixkörpern $K_1 = \mathrm{Fix}\,(H_1)$ und $K_2 = \mathrm{Fix}\,(H_2)$. Zeige, dass das Kompositum K_1K_2 gleich dem Fixkörper von $H_1 \cap H_2$ ist.

Aufgabe 21.7. (3 Punkte)

Sei n eine ungerade Zahl. Man gebe eine Körpererweiterung $\mathbb{Q} \subseteq L$ vom Grad n derart, dass $\mathrm{Gal}\,(L|\mathbb{Q})$ trivial ist.

Aufgabe 21.8. (8 (5+3) Punkte)

Es sei $E \subseteq \mathbb{R}^2$ ein reguläres n-Eck ($n \geq 3$) mit den Eckpunkten $v_1, \ldots, v_n$, und es sei V der von diesen Eckpunkten erzeugte $\mathbb{Q}$-Vektorraum.

a) Zeige die Abschätzungen

$$\varphi(n) \leq \dim_{\mathbb{Q}}(V) \leq \varphi(n) + 1.$$

(Dabei bezeichnet $\varphi(n)$ die eulersche φ-Funktion).

b) Zeige, dass in (a) sowohl links als auch rechts Gleichheit gelten kann.

Aufgabe 21.9. (4 Punkte)

Wir betrachten die Tabelle, die für kleine p und n die endlichen Kreisteilungskörper beschreibt.

p	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	1	1	2	1	4	2	3	1	6	4	10	2
3	1	1	1	2	4	1	6	2	1	4	5	2
5	1	1	2	1	1	2	6	2	6	1	5	2
7	1	1	1	2	4	1	1	2	3	4	10	2
11	1	1	2	2	1	2	3	2	6	1	1	2
13	1	1	1	1	4	1	2	2	3	4	10	1
17	1	1	2	1	4	2	6	1	2	4	10	2
19	1	1	1	2	2	1	6	2	1	2	10	2
23	1	1	2	2	4	2	3	2	6	4	1	2
29	1	1	2	1	2	2	1	2	6	2	10	2
31	1	1	1	2	1	1	6	2	3	1	5	2
37	1	1	1	1	4	1	3	2	1	4	5	1

Begründe die folgenden (mehr oder weniger sichtbaren) Eigenschaften der Tabelle.

a) Für jedes n sind die Einträge in der n-ten Spalte $\leq \varphi(n)$.

b) Für jedes p kommt in der p-ten Zeile die 1 unendlich oft vor.

Aufgabe 21.10. (3 Punkte)

Es sei G eine endliche Gruppe, für die jede Untergruppe ein Normalteiler sei. Zeige, dass G auflösbar ist.

Die folgende Aufgabe ist ein Kollektivaufgabe.

Aufgabe 21.11. (20 Punkte)

Man lege die folgende Tabelle an, die für kleine Primzahlen p zeigt, wie die Primfaktorzerlegung der Kreisteilungspolynome in $\mathbb{Z}/(p)[X]$ aussieht.

n	Φ_n	2	3	5	7	11	13
1	$X-1$	$X-1$	$X-1$	$X-1$	$X-1$	$X-1$	$X-1$
2	$X+1$	$X+1$	$X+1$	$X+1$	$X+1$	$X+1$	$X+1$
3	X^2+X+1	X^2+X+1	$(X+2)^2$				
4	X^2+1	$(X+1)^2$	X^2+1	$(X+2)(X+3)$			
5							
6							
7							
8							
9							
10							
12							
15							

22. Arbeitsblatt

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 22.1. Zeige, dass zwei Permutationen mit disjunktem Wirkungsbereich vertauschbar sind.

Aufgabe 22.2. Sei G eine zyklische Gruppe der Ordnung 6. Für welche $n \in \mathbb{N}$ lässt sich G als Untergruppe der Permutationsgruppe S_n realisieren?

Aufgabe 22.3. Es sei $F \in \mathbb{Q}[X]$ ein irreduzibles Polynom vom Grad 3. Zeige, dass F entweder eine oder drei reelle Nullstellen besitzt.

Aufgabe 22.4. Zeige, dass die alternierende Gruppe $A_n \subseteq S_n$ für $n \geq 3$ eine transitive Untergruppe ist.

Aufgabe 22.5. Es sei K ein Körper und sei $F \in K[X]$ ein separables irreduzibles Polynom. Es sei L der Zerfällungskörper von F, $G = \mathrm{Gal}\,(L|K)$ seine Galoisgruppe und $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ die Nullstellen von F in L. Nach Lemma 13.1 ist G eine Untergruppe der Permutationsgruppe der Nullstellen. Zeige, dass es sich um eine transitive Untergruppe handelt.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 22.6. (3 Punkte)

Sei M eine endliche Menge und sei σ eine Permutation auf M und $x \in M$. Zeige, dass $\{n \in \mathbb{Z} | \, \sigma^n(x) = x\}$ eine Untergruppe von $\mathbb{Z}$ ist. Den eindeutig bestimmten nichtnegativen Erzeuger dieser Untergruppe bezeichnen wir mit $\mathrm{ord}_x\, \sigma$. Zeige die Beziehung

$$\mathrm{ord}\,(\sigma) = \mathrm{kgV}\{\mathrm{ord}_x\, \sigma | \, x \in M\}\,.$$

Aufgabe 22.7. (4 Punkte)

Es sei $n \geq 2$ keine Primzahl. Zeige, dass es eine echte Untergruppe $H \subset S_n$ gibt, die transitiv ist und die mindestens eine Transposition enthält.

Aufgabe 22.8. (3 Punkte)

Eliminiere in $X^5 + a^2X^4 - a$ (mit $a \in \mathbb{Q}$) durch eine geeignete Substitution (einen Variablenwechsel) den Term zum Grad 4.

Aufgabe 22.9. (3 Punkte)

Es sei $F \in \mathbb{Q}[X]$ ein irreduzibles Polynom vom Grad 3 und seien $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ die Nullstellen von F. Zeige, dass die Differenzen $\alpha - \beta$ und $\beta - \gamma$ nicht beide aus $\mathbb{Q}$ sein können.

Aufgabe 22.10. (4 Punkte)

Es sei $F \in \mathbb{Q}[X]$ ein irreduzibles Polynom vom Grad 3. Zeige, dass die Nullstellen von F in $\mathbb{C}$ nicht die Form $\alpha, \alpha^2, \alpha^3$ (mit einem $\alpha \in \mathbb{C}$) haben können.

Aufgabe 22.11. (3 Punkte)

Zeige, dass es ein irreduzibles Polynom $F \in \mathbb{Q}[X]$ vom Grad 4 gibt, dessen Nullstellen in $\mathbb{C}$ die Form $\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4$ besitzen.

23. Arbeitsblatt

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 23.1. Bestimme die Koordinaten der beiden Schnittpunkte der Geraden G und des Kreises K, wobei G durch die Gleichung $2y-3x+1=0$ und K durch den Mittelpunkt $(2,2)$ und den Radius 5 gegeben ist.

Aufgabe 23.2. Rekapituliere die Strahlensätze.

Aufgabe 23.3. Erläutere geometrisch, warum die 0 das neutrale Element der geometrischen Addition von reellen Zahlen ist.

Aufgabe 23.4. Es seien P, Q zwei Punkte auf einer Geraden L und M sei eine weitere Gerade durch P. Konstruiere mit Zirkel und Lineal eine *Raute*, so dass P und Q Eckpunkte sind und eine Seite auf M liegt.

Aufgabe 23.5. Es seien P und Q zwei konstruierbare Punkte. Zeige, dass dann auch der Abstand $d(P,Q)$ konstruierbar ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 23.6. (3 Punkte)

Berechne die Koordinaten der beiden Schnittpunkte der beiden Kreise K und L, wobei K den Mittelpunkt $(2,3)$ und den Radius 4 und L den Mittelpunkt $(5,-1)$ und den Radius 7 besitzt.

Aufgabe 23.7. (6 Punkte)

Es sei eine zweielementige Menge $M=\{0,1\}$ in der Ebene gegeben. Wie viele Punkte lassen sich aus M in einem Schritt, in zwei Schritten und in drei Schritten konstruieren?

Aufgabe 23.8. (3 Punkte)

Erläutere geometrisch, warum die 1 das neutrale Element der geometrischen Multiplikation von reellen Zahlen ist.

Aufgabe 23.9. (3 Punkte)

Erläutere geometrisch, woran die geometrische Division von reellen Zahlen durch 0 scheitert.

Aufgabe 23.10. (3 Punkte)

Bestimme alle Lösungen der Kreisgleichung

$$x^2 + y^2 = 1$$

für die Körper $K = \mathbb{Z}/(2)$, $\mathbb{Z}/(5)$ und $\mathbb{Z}/(11)$.

Die folgende Aufgabe ist eine Kollektivaufgabe.

Aufgabe 23.11. (15 Punkte)

Schreibe Computeranimationen, die die in Lemma 23.6 beschriebenen Konstruktionen veranschaulichen (über Commons hochladen).

24. Arbeitsblatt

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 24.1. Es sei $K \subset K' (\subseteq \mathbb{R})$ eine reell-quadratische Körpererweiterung. Zeige, dass dann auch $K[i] \subset K'[i]$ eine quadratische Körpererweiterung ist.

Aufgabe 24.2. Ist die Zahl, die den „goldenen Schnitt“ beschreibt, eine konstruierbare Zahl?

Aufgabe 24.3. Betrachte ein DinA4-Blatt. Ist das Seitenverhältnis aus langer und kurzer Seitenlänge eine konstruierbare Zahl?

Aufgabe 24.4. Zeige direkt, ohne Bezug auf Koordinaten, dass die Summe von zwei konstruierbaren komplexen Zahlen wieder konstruierbar ist.

Aufgabe 24.5. Zeige, dass es Matrizen $M \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ gibt derart, dass das charakteristische Polynom aus $\mathbb{Q}[X]$ ist, dass in M aber auch transzendente Einträge vorkommen.

Aufgabe 24.6. Es sei Φ_n das n-te Kreisteilungspolynom und es sei p eine zu n teilerfremde Primzahl. Es sei K ein Körper der Charakteristik p, in dem es eine n-te primitive Einheitswurzel ζ gebe. Zeige, dass das Produkt

$$\prod_{0<i<n,\ i,n \text{ teilerfremd}} (X - \zeta^i)$$

zu $\mathbb{Z}/(p)[X]$ gehört und mit $\Phi_n \bmod p$ übereinstimmt.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 24.7. (2 Punkte)

Sei $Z \in \mathbb{C}$ eine konstruierbare Zahl und r eine konstruierbare positive reelle Zahl. Zeige, dass dann auch der Kreis mit Mittelpunkt Z und Radius r konstruierbar ist.

Aufgabe 24.8. (3 Punkte)

Es seien P, Q_1, Q_2 drei konstruierbare Punkte derart, dass die Abstände $d(P, Q_1)$ und $d(P, Q_2)$ gleich 1 sind und dass der Winkel zwischen den dadurch definierten Halbgeraden 90 Grad beträgt. Zeige, dass es dann eine affin-lineare Abbildung

$$\varphi : E = \mathbb{R}^2 \longrightarrow E = \mathbb{R}^2$$

gibt, die 0 auf P, 1 auf Q_1 und i auf Q_2 schickt, und die konstruierbare Punkte in konstruierbare Punkte überführt.

Aufgabe 24.9. (2 Punkte)

Betrachte die Tastatur eines Klaviers. Ist das Schwingungsverhältnis von zwei nebeneinander liegendenTasten (bei „gleichstufiger Stimmung“) eine konstruierbare Zahl?

Aufgabe 24.10. (3 Punkte)

Konstruiere mit Hilfe von Zirkel und Lineal eine reelle Zahl x, deren Abweichung von $\sqrt{\pi}$ kleiner als $0,00001$ ist.

Aufgabe 24.11. (2 Punkte)

Zeige, dass die komplexe Zahl $re^{i\varphi}$ genau dann konstruierbar ist, wenn r und $e^{i\varphi}$ konstruierbar sind.

Aufgabe 24.12. (5 Punkte)

Beweise auf zwei verschiedene Arten, dass die komplexe Quadratwurzel einer konstruierbaren komplexen Zahl wieder konstruierbar ist.

In der folgenden Aufgabe soll eine Eigenschaft bewiesen werden, die in der Tabelle über Kreisteilungspolynome modulo p sichtbar wurde.

Aufgabe 24.13. (6 Punkte)

Es sei Φ_n das n-te Kreisteilungspolynom und es sei p eine Primzahl. Zeige, dass das Polynom $(\Phi_n \bmod p) \in \mathbb{Z}/(p)[X]$ das Produkt von irreduziblen Polynomen ist, die alle den gleichen Grad besitzen.

Tipp: Reduziere auf den Fall, wo n und p teilerfremd ist.

25. Arbeitsblatt

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 25.1. Sei G eine Gruppe. Zeige, dass G genau dann kommutativ ist, wenn alle Konjugationsklassen einelementig sind.

Aufgabe 25.2. Sei G eine endliche Gruppe und seien $x, y \in G$ konjugierte Elemente. Zeige, dass x und y die gleiche Ordnung besitzen.

Aufgabe 25.3. Sei G eine Gruppe und sei $H \subseteq Z$ eine Untergruppe des Zentrums von G. Zeige, dass H ein Normalteiler in G ist.

Aufgabe 25.4. Zeige, dass zwei Permutationen $\sigma, \tau \in S_n$ genau dann konjugiert sind, wenn ihre Zykeldarstellung den gleichen Typ haben, d.h. wenn die Anzahl der Zykel und deren Längen übereinstimmen.

Aufgabe 25.5. Man gebe ein Beispiel für eine endliche Körpererweiterung $\mathbb{Q} \subseteq K$, $K \subseteq \mathbb{C}$, das zeigt, dass zu einem Element $z = a + bi \in K$ die reellen Koordinaten a und b nicht zu K gehören müssen.

Aufgabe 25.6. Sei $\mathbb{Q} \subseteq K$ eine endliche normale Körpererweiterung und sei

$$\kappa : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

die komplexe Konjugation.

a) Zeige, dass $\kappa(K) \subseteq K$ gilt.

b) Zeige, dass $\kappa|_K = \mathrm{id}_K$ genau dann gilt, wenn $K \subseteq \mathbb{R}$ ist.

Aufgabe 25.7. Es sei $z \in \mathbb{C}$ eine konstruierbare Zahl. Zeige, dass der erzeugte Unterkörper $\mathbb{Q}(z)$ eine Radikalerweiterung von $\mathbb{Q}$ ist.

Aufgabe 25.8. Es sei $z \in \mathbb{C}$ eine konstruierbare Zahl mit dem Minimalpolynom $F \in \mathbb{Q}[X]$. Zeige, dass jede komplexe Nullstelle von F ebenfalls konstruierbar ist.

Aufgabe 25.9. Es sei $z \in \mathbb{C}$ eine konstruierbare Zahl mit dem Minimalpolynom $F \in \mathbb{Q}[X]$. Zeige, dass der Zerfällungskörper von F eine Radikalerweiterung von $\mathbb{Q}$ ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 25.10. (4 Punkte)

Es seien $K \subseteq L \subseteq M$ endliche Körpererweiterungen. Es sei $F \in K[X]$ ein irreduzibles Polynom, dass über M in Linearfaktoren zerfalle. Der Zwischenkörper L enthalte keine Nullstelle von F. Folgt daraus, dass F irreduzibel über L ist?

Aufgabe 25.11. (4 Punkte)

Man gebe ein Beispiel für eine endliche Körpererweiterung $\mathbb{Q} \subseteq K$, $K \subseteq \mathbb{C}$, derart, dass die komplexe Konjugation sich nicht auf K einschränken lässt.

Aufgabe 25.12. Es sei $\mathbb{Q} \subseteq L$ eine Körpererweiterung in $\mathbb{C}$ und es sei $K \subseteq L$ der Unterkörper, der aus allen konstruierbaren Zahlen in L besteht. Zeige, dass für jeden Automorphismus $\varphi \in \mathrm{Gal}\,(L|\mathbb{Q})$ die Beziehung $\varphi(K) \subseteq K$ gilt.

Aufgabe 25.13. (3 Punkte)

Sei $K \subseteq L$ eine endliche Körpererweiterung und seien $v_1, \ldots, v_n \in L$ Elemente, die eine K-Basis von L bilden. Sei $x \in L$, $x \neq 0$. Zeige, dass auch $xv_1, \ldots, xv_n \in L$ eine K-Basis von L bilden.

Aufgabe 25.14. (4 Punkte)

Zeige, dass für $n \geq 2$ der konstante Koeffizient der Kreisteilungspolynome Φ_n immer 1 ist.

Aufgabe 25.15. (3 Punkte)

Es seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ algebraische Zahlen.

a) Zeige, dass es ein irreduzibles Polynom $F \in \mathbb{Q}[X]$ gibt derart, dass man alle α_i als $\mathbb{Q}$-Linearkombination von Potenzen der Nullstellen von F schreiben kann.

b) Zeige, dass es kein irreduzibles Polynom $F \in \mathbb{Q}[X]$ geben muss derart, dass alle α_i Nullstellen von F sind.

Aufgabe 25.16. (5 Punkte)

Sei $K \subseteq L$ eine endliche Galoiserweiterung mit Galoisgruppe G. Es sei $z \in L$ ein Element derart, dass $\varphi(z)$, $\varphi \in G$, eine K-Basis von L bildet. Wir betrachten das Polynom

$$F = \prod_{\varphi \in G} (X - \varphi(z))\,.$$

Zeige, dass die Koeffizienten von F zu K gehören, dass F in $K[X]$ irreduzibel ist und dass L der Zerfällungskörper von F über K ist.

26. Arbeitsblatt

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 26.1. Was ist eigentlich ein „Winkel“?

Aufgabe 26.2. Zeige, dass man jeden vorgegebenen Winkel mittels Zirkel und Lineal halbieren kann.

Aufgabe 26.3. Es sei ein Kreis K und ein Punkt $P \in K$ gegeben. Konstruiere die Tangente an den Kreis durch P.

Aufgabe 26.4. Zeige, dass es auf dem Einheitskreis unendlich viele konstruierbare Punkte gibt.

Aufgabe 26.5. Bestimme für alle $n \leq 30$, ob das regelmäßige n-Eck mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist oder nicht.

Aufgabe 26.6. Zeige mit Hilfe des verschobenen Eisensteinkriteriums, dass das Polynom $X^3 - 3X - 1$ irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$ ist.

Aufgabe 26.7. Zeige, dass das Polynom $X^3 + 2X^2 - 5$ in $\mathbb{Q}[X]$ irreduzibel ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 26.8. (4 Punkte)

Es sei ein Kreis K und ein Punkt P außerhalb des Kreises gegeben. Konstruiere eine der Tangenten an den Kreis, die durch P läuft.

Aufgabe 26.9. (2 Punkte)

Beweise die Formel

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha$$

aus den Additionstheoremen für die trigonometrischen Funktionen.

Aufgabe 26.10. (2 Punkte)

Beweise die Formel

$$X^u + 1 = (X+1)(X^{u-1} - X^{u-2} + X^{u-3} - \ldots + X^2 - X + 1)$$

für u ungerade.

Aufgabe 26.11. (4 Punkte)

Bestimme die Koordinaten der fünften Einheitswurzeln in $\mathbb{C}$.

Aufgabe 26.12. (4 Punkte)

Zeige, dass es nicht für jede konstruierbare Zahl $z \in \mathbb{C}$ einen Kreisteilungskörper K_n gibt mit $z \in K_n$.

Testklausur 1

Fachbereich Mathematik/Informatik **21. Mai 2011**
Prof. Dr. H. Brenner

Körper- und Galoistheorie

Testklausur

Dauer: Zwei volle Stunden + 10 Minuten Orientierung, in denen noch nicht geschrieben werden darf.

Es sind keine Hilfsmittel erlaubt.

Alle Antworten sind zu begründen.

Es gibt insgesamt 64 Punkte. Es gilt die Sockelregelung, d.h. die Bewertung pro Aufgabe(nteil) beginnt bei der halben Punktzahl. Die Gesamtpunktzahl geht doppelt in Ihre Übungspunktzahl ein.

Zur Orientierung: Zum Bestehen braucht man 16 Punkte, ab 32 Punkten gibt es eine Eins

Tragen Sie auf dem Deckblatt Ihren Namen ein.

Viel Erfolg!

Name, Vorname: .....

Matrikelnummer: .....

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	$\sum$
mögl. Pkt.:	4	4	3	4	3	4	4	3	6	7	8	5	4	5	64
erhalt. Pkt.:															

Note:

Aufgabe 1.1. (4 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

(1) Eine *endliche* Körpererweiterung $K \subseteq L$.
(2) Der *Grad* einer endlichen Körpererweiterung $K \subseteq L$.
(3) Eine *Einheit* u in einem kommutativen Ring R.
(4) Eine *n-te Einheitswurzel* z in einem Körper K ($n \in \mathbb{N}_+$).
(5) Die *Charakteristik* eines Körpers K.
(6) Ein *innerer Automorphismus* einer Gruppe G.
(7) Eine *algebraische Zahl* $z \in \mathbb{C}$.
(8) Die *Galoisgruppe* einer Körpererweiterung $K \subseteq L$.

Aufgabe 1.2. (4 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze bzw. Formeln.

(1) Die *Gradformel* für zwei endliche Körpererweiterungen $K \subseteq L$ und $L \subseteq M$.
(2) Die *trigonometrische Darstellung* der n-ten komplexen Einheitswurzeln ($n \in \mathbb{N}_+$).
(3) Der *Satz von Lagrange* über die Ordnung eines Gruppenelementes $g \in G$ in einer endlichen Gruppe G.
(4) Der *Satz über den Einsetzungshomomorphismus* zu einer R-Algebra A und einem Element $f \in A$.

Aufgabe 1.3. (3 Punkte)

Bestimme eine ganze Zahl n derart, dass die Lösungen der quadratischen Gleichung

$$x^2 + 3x + \frac{7}{3} = 0$$

in $\mathbb{Q}[\sqrt{n}]$ liegen.

Aufgabe 1.4. (4 Punkte)

Forme die Gleichung

$$x^5 + 10x^4 + x - 5 = 0$$

in eine äquivalente Gleichung der Form

$$y^5 + b_3y^3 + b_2y^2 + b_1y + b_0 = 0$$

mit $b_i \in \mathbb{Q}$ um.

Aufgabe 1.5. (3 Punkte)

Bestimme das Minimalpolynom der komplexen Zahl $2 + 5i$ über $\mathbb{Q}$.

Aufgabe 1.6. (4 Punkte)

Betrachte den Körper $K = \mathbb{F}_4 = \mathbb{Z}/(2)[U]/(U^2+U+1)$. Führe im Polynomring $K[X]$ die Polynomdivision

$$X^4 + uX^3 + (u+1)X + 1 \text{ durch } uX^2 + X + u + 1$$

aus, wobei u die Restklasse von U in K bezeichnet.

Aufgabe 1.7. (4 Punkte)

Finde im Polynomring $\mathbb{Z}/(2)[X]$ ein irreduzibles Polynom vom Grad vier.

Aufgabe 1.8. (3 Punkte)

Berechne in

$$\mathbb{Z}/(7)[X]/(X^3 + 4X^2 + X + 5)$$

das Produkt

$$(2x^2 + 5x + 3) \cdot (3x^2 + x + 6)$$

(x bezeichne die Restklasse von X).

Aufgabe 1.9. (6 Punkte)

Beweise die „Gradformel“ für eine Folge von endlichen Körpererweiterungen $K \subseteq L \subseteq M$.

Aufgabe 1.10. (7 Punkte)

Es seien k und n ganze Zahlen. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(1) k teilt n.
(2) Es ist $\mathbb{Z}n \subseteq \mathbb{Z}k$.
(3) Es gibt einen Ringhomomorphismus

$$\mathbb{Z}/(n) \longrightarrow \mathbb{Z}/(k).$$

(4) Es gibt einen surjektiven Gruppenhomomorphismus

$$\mathbb{Z}/(n) \longrightarrow \mathbb{Z}/(k).$$

Aufgabe 1.11. (8 Punkte)

Es sei $n \in \mathbb{N}_+$ und es sei $\mu_n \subseteq \mathbb{C}$ die Menge der n-ten komplexen Einheitswurzeln. Es sei $F \in \mathbb{C}[X]$ ein Polynom. Zeige, dass $F \in \mathbb{C}[X^n]$ (d.h., dass F als Polynom in X^n geschrieben werden kann) genau dann gilt, wenn für jedes $z \in \mu_n$ die Gleichheit

$$F(zX) = F(X)$$

gilt.

Aufgabe 1.12. (5 Punkte)

Sei K ein Körper und $K[X]$ der Polynomring über K. Zeige unter Verwendung der Division mit Rest, dass $K[X]$ ein Hauptidealbereich ist.

Aufgabe 1.13. (4 Punkte)

Bestimme die Galoisgruppe (einschließlich der Gruppenstruktur) der Körpererweiterung $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}[i]$.

Aufgabe 1.14. (5 (3+2) Punkte)

Es seien D_1 und D_2 kommutative Gruppen und seien $D_1^\vee$ und $D_2^\vee$ die zugehörigen Charaktergruppen zu einem Körper K.

(1) Zeige, dass zu einem Gruppenhomomorphismus

$$\varphi : D_1 \longrightarrow D_2$$

durch die Zuordnung $\chi \mapsto \chi \circ \varphi$ ein Gruppenhomomorphismus

$$\varphi^\vee : D_2^\vee \longrightarrow D_1^\vee$$

definiert wird.

(2) Es sei D_3 eine weitere kommutative Gruppe und sei

$$\psi : D_2 \longrightarrow D_3$$

ein Gruppenhomomorphismus. Zeige die Gleichheit

$$(\psi \circ \varphi)^\vee = \varphi^\vee \circ \psi^\vee.$$

Fachbereich Mathematik/Informatik **21. Mai 2011**
Prof. Dr. H. Brenner

Körper- und Galoistheorie

Testklausur mit Lösungen

Dauer: Zwei volle Stunden + 10 Minuten Orientierung, in denen noch nicht geschrieben werden darf.

Es sind keine Hilfsmittel erlaubt.

Alle Antworten sind zu begründen.

Es gibt insgesamt 64 Punkte. Es gilt die Sockelregelung, d.h. die Bewertung pro Aufgabe(nteil) beginnt bei der halben Punktzahl. Die Gesamtpunktzahl geht doppelt in Ihre Übungspunktzahl ein.

Zur Orientierung: Zum Bestehen braucht man 16 Punkte, ab 32 Punkten gibt es eine Eins

Tragen Sie auf dem Deckblatt Ihren Namen ein.

Viel Erfolg!

Name, Vorname: .....

Matrikelnummer: .....

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	$\sum$
mögl. Pkt.:	4	4	3	4	3	4	4	3	6	7	8	5	4	5	64
erhalt. Pkt.:															

Note:

Aufgabe 1.1. (4 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

(1) Eine *endliche* Körpererweiterung $K \subseteq L$.
(2) Der *Grad* einer endlichen Körpererweiterung $K \subseteq L$.
(3) Eine *Einheit* u in einem kommutativen Ring R.
(4) Eine *n-te Einheitswurzel* z in einem Körper K ($n \in \mathbb{N}_+$).
(5) Die *Charakteristik* eines Körpers K.
(6) Ein *innerer Automorphismus* einer Gruppe G.
(7) Eine *algebraische Zahl* $z \in \mathbb{C}$.
(8) Die *Galoisgruppe* einer Körpererweiterung $K \subseteq L$.

Lösung

(1) Eine Körpererweiterung $K \subseteq L$ heißt *endlich*, wenn L ein endlichdimensionaler Vektorraum über K ist.
(2) Bei einer endlichen Körpererweiterung $K \subseteq L$ nennt man die K-(Vektorraum-)Dimension von L den *Grad* der Körpererweiterung.
(3) Ein Element u in einem kommutativen Ring R heißt *Einheit*, wenn es ein Element $v \in R$ mit $uv = 1$ gibt.
(4) Ein Element $z \in K$ heißt n-te *Einheitswurzel*, wenn $z^n = 1$ ist.
(5) Die *Charakteristik* eines Körpers K ist die kleinste positive natürliche Zahl n mit der Eigenschaft $n \cdot 1_K = 0$. Die Charakteristik ist 0, falls keine solche Zahl existiert.
(6) Ein Automorphismus
$$G \longrightarrow G$$
der Form $x \mapsto gxg^{-1}$ zu einem festen Element $g \in G$ heißt *innerer Automorphismus*.
(7) Eine Zahl $z \in \mathbb{C}$ heißt *algebraisch*, wenn es ein von 0 verschiedenes Polynom $P \in \mathbb{Q}[X]$ gibt mit $P(z) = 0$.
(8) Unter der *Galoisgruppe* versteht man die Gruppe aller K-Algebra-Automorphismen von L, also
$$\mathrm{Aut}_K(L).$$

Aufgabe 1.2. (4 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze bzw. Formeln.

(1) Die *Gradformel* für zwei endliche Körpererweiterungen $K \subseteq L$ und $L \subseteq M$.
(2) Die *trigonometrische Darstellung* der n-ten komplexen Einheitswurzeln ($n \in \mathbb{N}_+$).

(3) Der *Satz von Lagrange* über die Ordnung eines Gruppenelementes $g \in G$ in einer endlichen Gruppe G.
(4) Der *Satz über den Einsetzungshomomorphismus* zu einer R-Algebra A und einem Element $f \in A$.

Lösung

(1) Die Gradformel besagt, dass $K \subseteq M$ eine endliche Körpererweiterung ist und dass
$$\operatorname{grad}_K M = \operatorname{grad}_K L \cdot \operatorname{grad}_L M$$
gilt.
(2) Die n-ten komplexen Einheitswurzeln besitzen die Darstellung
$$\cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n}, k = 0, 1, \ldots, n-1.$$
(3) Die Ordnung von g teilt die Ordnung der Gruppe.
(4) Es gibt einen eindeutig bestimmten R-Algebra-Homomorphismus
$$\psi : R[X] \longrightarrow A$$
mit $\psi(X) = f$.

Aufgabe 1.3. (3 Punkte)

Bestimme eine ganze Zahl n derart, dass die Lösungen der quadratischen Gleichung
$$x^2 + 3x + \frac{7}{3} = 0$$
in $\mathbb{Q}[\sqrt{n}]$ liegen.

Lösung

Wir schreiben die Gleichung als
$$(x + \frac{3}{2})^2 = -\frac{7}{3} + \frac{9}{4} = \frac{-28+27}{12} = \frac{-1}{12}.$$
Daher ist
$$x + \frac{3}{2} = \pm\sqrt{\frac{-1}{12}} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{1}{3}} = \pm\frac{1}{6}\sqrt{-3}.$$
Also liegen die Lösungen in $\mathbb{Q}[\sqrt{-3}]$.

Aufgabe 1.4. (4 Punkte)

Forme die Gleichung

$$x^5 + 10x^4 + x - 5 = 0$$

in eine äquivalente Gleichung der Form

$$y^5 + b_3y^3 + b_2y^2 + b_1y + b_0 = 0$$

mit $b_i \in \mathbb{Q}$ um.

Lösung

Wir machen den Ansatz $x = y + c$. Einsetzen ergibt

$$(y + c)^5 + 10(y + c)^4 + y + c - 5 = 0\,,$$

wobei der Koeffizient zu y^4 gleich 0 werden soll. Dieser Koeffizient ist $5c+10$, also muss man

$$c = -2$$

wählen. Damit wird das Polynom zu

$$\begin{aligned}
&= (y + c)^5 + 10(y + c)^4 + y + c - 5\\
&= (y - 2)^5 + 10(y - 2)^4 + y - 2 - 5\\
&= y^5 - 5 \cdot 2y^4 + 10(-2)^2y^3 + 10(-2)^3y^2 + 5(-2)^4y - 2^5\\
&\quad +10(y^4 + 4(-2)y^3 + 6(-2)^2y^2 + 4(-2)^3y + 16) + y - 7\\
&= y^5 + 40y^3 - 80y^2 + 80y - 32 - 80y^3 + 240y^2 - 320y + 160 + y - 7\\
&= y^5 - 40y^3 + 160y^2 - 239y + 121
\end{aligned}$$

und die äquivalente Gleichung ist

$$y^5 - 40y^3 + 160y^2 - 239y + 121 \;=\; 0.$$

Aufgabe 1.5. (3 Punkte)

Bestimme das Minimalpolynom der komplexen Zahl $2 + 5i$ über $\mathbb{Q}$.

Lösung

Es ist

$$(2 + 5i)^2 \;=\; 4 - 25 + 20i \;=\; -21 + 20i.$$

Dies ist eine $\mathbb{Q}$-Linearkombination von 1 und $2 + 5i$, nämlich

$$-21 + 20i \;=\; -29 \cdot 1 + 4(2 + 5i).$$

Daher ist

$$Z^2 - 4Z + 29$$

ein annullierendes Polynom von $2+5i$. Wegen $2+5i \notin \mathbb{Q}$ kann es kein annullierendes Polynom von einem kleineren Grad geben, also handelt es sich um das Minimalpolynom.

Aufgabe 1.6. (4 Punkte)

Betrachte den Körper $K = \mathbb{F}_4 = \mathbb{Z}/(2)[U]/(U^2+U+1)$. Führe im Polynomring $K[X]$ die Polynomdivision

$$X^4 + uX^3 + (u+1)X + 1 \text{ durch } uX^2 + X + u + 1$$

aus, wobei u die Restklasse von U in K bezeichnet.

Lösung

Die Division mit Rest ergibt

$$X^4+uX^3+(u+1)X+1 = (uX^2+X+u+1)((u+1)X^2+(u+1)X+(u+1))+uX+u+1\,.$$

Aufgabe 1.7. (4 Punkte)

Finde im Polynomring $\mathbb{Z}/(2)[X]$ ein irreduzibles Polynom vom Grad vier.

Lösung

Wir betrachten das Polynom

$$F = X^4 + X + 1\,.$$

Da weder 0 noch 1 eine Nullstelle von F sind, besitzt es keinen Linearfaktor. Die einzige verbleibende Faktorzerlegung wäre als ein Produkt von zwei irreduziblen Polynomen vom Grad zwei. Das einzige irreduzible Polynom vom Grad zwei ist X^2+X+1. Wegen

$$(X^2+X+1)^2 \;=\; X^4+X^2+1 \;\neq\; F$$

ist F irreduzibel.

Aufgabe 1.8. (3 Punkte)

Berechne in

$$\mathbb{Z}/(7)[X]/(X^3+4X^2+X+5)$$

das Produkt

$$(2x^2+5x+3)\cdot(3x^2+x+6)$$

(x bezeichne die Restklasse von X).

Lösung

Es ist

$$x^3 = 3x^2 + 6x + 2$$

und

$$\begin{aligned} x^4 &= x(3x^2 + 6x + 2) \\ &= 3x^3 + 6x^2 + 2x \\ &= 3(3x^2 + 6x + 2) + 6x^2 + 2x \\ &= x^2 + 6x + 6. \end{aligned}$$

Daher ist

$$\begin{aligned} (2x^2 + 5x + 3) \cdot (3x^2 + x + 6) &= 6x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 5x + 4 \\ &= 6(x^2 + 6x + 6) + 3(3x^2 + 6x + 2) + 5x^2 + 5x + 4 \\ &= 6x^2 + 3x + 4. \end{aligned}$$

Aufgabe 1.9. (6 Punkte)

Beweise die „Gradformel“ für eine Folge von endlichen Körpererweiterungen $K \subseteq L \subseteq M$.

Lösung

Wir setzen $\operatorname{grad}_K L = n$ und $\operatorname{grad}_L M = m$. Es sei $x_1, \ldots, x_n \in L$ eine K-Basis von L und $y_1, \ldots, y_m \in M$ eine L-Basis von M. Wir behaupten, dass die Produkte

$$x_i y_j, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m,$$

eine K-Basis von M bilden. Wir zeigen zuerst, dass diese Produkte den Vektorraum M über K aufspannen. Sei dazu $z \in M$. Wir schreiben

$$z = b_1 y_1 + \ldots + b_m y_m \text{ mit Koeffizienten } b_j \in L.$$

Wir können jedes b_j als $b_j = a_{1j} x_1 + \ldots + a_{nj} x_n$ mit Koeffizienten $a_{ij} \in K$ ausdrücken. Das ergibt

$$\begin{aligned} z &= b_1 y_1 + \ldots + b_m y_m \\ &= (a_{11} x_1 + \ldots + a_{n1} x_n) y_1 + \ldots + (a_{1m} x_1 + \ldots + a_{nm} x_n) y_m \\ &= \sum_{1 \leq i \leq n,\, 1 \leq j \leq m} a_{ij} x_i y_j. \end{aligned}$$

Daher ist z eine K-Linearkombination der Produkte $x_i y_j$. Um zu zeigen, dass diese Produkte linear unabhängig sind, sei

$$0 = \sum_{1 \leq i \leq n,\, 1 \leq j \leq m} c_{ij} x_i y_j$$

angenommen mit $c_{ij} \in K$. Wir schreiben dies als $0 = \sum_{j=1}^{m} (\sum_{i=1}^{n} c_{ij} x_i) y_j$. Da die y_j linear unabhängig über L sind und die Koeffizienten der y_j zu L gehören folgt, dass $\sum_{i=1}^{n} c_{ij} x_i = 0$ ist für jedes j. Da die x_i linear unabhängig über K sind und $c_{ij} \in K$ ist folgt, dass $c_{ij} = 0$ ist für alle i, j.

Aufgabe 1.10. (7 Punkte)

Es seien k und n ganze Zahlen. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(1) k teilt n.
(2) Es ist $\mathbb{Z}n \subseteq \mathbb{Z}k$.
(3) Es gibt einen Ringhomomorphismus
$$\mathbb{Z}/(n) \longrightarrow \mathbb{Z}/(k).$$
(4) Es gibt einen surjektiven Gruppenhomomorphismus
$$\mathbb{Z}/(n) \longrightarrow \mathbb{Z}/(k)$$

Lösung

(1) $\Rightarrow$ (2). Wenn k ein Teiler von n ist, so ist $n = ak$ mit einem $a \in \mathbb{Z}$ und daher ist $n \in \mathbb{Z}k$. Somit gilt die Idealinklusion $\mathbb{Z}n \subseteq \mathbb{Z}k$. (2) $\Rightarrow$ (3). Wegen der Idealinklusion $\mathbb{Z}n \subseteq \mathbb{Z}k$ wird unter dem Restklassen-Ringhomomorphismus
$$\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/(k)$$
das Ideal $\mathbb{Z}n$ auf 0 abgebildet. Daher gibt es aufgrund des Satzes über die induzierte Abbildung einen Ringhomomorphismus
$$\mathbb{Z}/(n) \longrightarrow \mathbb{Z}/(k).$$
(3) $\Rightarrow$ (4). Es sei
$$\varphi : \mathbb{Z}/(n) \longrightarrow \mathbb{Z}/(k)$$
der gegebene Ringhomomorphismus. Dieser ist insbesondere ein Gruppenhomomorphismus, und es gilt $\varphi(1) = 1$. Da die $1 \in \mathbb{Z}/(k)$ diese Gruppe erzeugt, ist φ surjektiv. (4) $\Rightarrow$ (1). Es sei
$$\varphi : \mathbb{Z}/(n) \longrightarrow \mathbb{Z}/(k)$$
ein surjektiver Gruppenhomomorphismus. Bei $n = 0$ ist die Aussage richtig. Sei also $n \neq 0$, so dass die angegebenen Gruppen die endlichen Ordnungen n bzw. k besitzen. Dabei ist nach dem Isomorphiesatz die Gruppe $\mathbb{Z}/(k)$ isomorph zu einer Restklassengruppe von $\mathbb{Z}/(n)$ und aufgrund der Indexformel ist k (die Anzahl der Nebenklassen) ein Teiler von n.

Aufgabe 1.11. (8 Punkte)

Es sei $n \in \mathbb{N}_+$ und es sei $\mu_n \subseteq \mathbb{C}$ die Menge der n-ten komplexen Einheitswurzeln. Es sei $F \in \mathbb{C}[X]$ ein Polynom. Zeige, dass $F \in \mathbb{C}[X^n]$ (d.h., dass F als Polynom in X^n geschrieben werden kann) genau dann gilt, wenn für jedes $z \in \mu_n$ die Gleichheit

$$F(zX) = F(X)$$

gilt.

Lösung

Sei zunächst $F \in \mathbb{C}[X^n]$. Dann schreiben wir $F = \sum_{i=0}^{k} a_i (X^n)^i$. Für $z \in \mu_n$ ist somit

$$F(zX) = \sum_{i=0}^{k} a_i ((zX)^n)^i = \sum_{i=0}^{k} a_i (z^n X^n)^i = \sum_{i=0}^{k} a_i (X^n)^i = F(X).$$

Für die Umkehrung sei

$$F = \sum_{i=0}^{k} c_i X^i \, .$$

Es sei z eine primitive n-te Einheitswurzel, so dass man alle Einheitswurzeln eindeutig als z^j, $j = 0, \ldots, n-1$, schreiben kann. Es ist

$$\begin{aligned} nF(X) &= \sum_{j=0}^{n-1} F(z^j X) \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} (\sum_{i=0}^{k} c_i (z^j)^i X^i) \\ &= \sum_{i=0}^{k} (c_i \sum_{j=0}^{n-1} (z^i)^j) X^i. \end{aligned}$$

Wir zeigen, dass die Koeffizienten zu X^i, wenn i kein Vielfaches von n ist, gleich 0 sind. Dies gilt dann auch für F.

Sei also i kein Vielfaches von n. Da z primitiv ist, ist $w = z^i$ eine n-te Einheitswurzel, aber nicht 1. Wegen der Faktorisierung

$$X^n - 1 = (X-1)(X^{n-1} + \ldots + X + 1)$$

ist daher $\sum_{j=0}^{n-1} w^j = 0$.

Aufgabe 1.12. (5 Punkte)

Sei K ein Körper und $K[X]$ der Polynomring über K. Zeige unter Verwendung der Division mit Rest, dass $K[X]$ ein Hauptidealbereich ist.

Lösung

Sei I ein von null verschiedenes Ideal in $K[X]$. Betrachte die nichtleere Menge

$$\{\operatorname{grad}(P) |\, P \in I,\, P \neq 0\}\,.$$

Diese Menge hat ein Minimum $m \in \mathbb{N}$, das von einem Element $F \in I$, $F \neq 0$, herrührt, sagen wir $m = \operatorname{grad}(F)$. Wir behaupten, dass $I = (F)$ ist. Sei hierzu $P \in I$ gegeben. Aufgrund der Division mit Rest gilt

$$P = FQ + R \text{ mit } \operatorname{grad}(R) < \operatorname{grad}(F) \text{ oder } R = 0\,.$$

Wegen $R \in I$ und der Minimalität von $\operatorname{grad}(F)$ kann der erste Fall nicht eintreten. Also ist $R = 0$ und P ist ein Vielfaches von F.

Aufgabe 1.13. (4 Punkte)

Bestimme die Galoisgruppe (einschließlich der Gruppenstruktur) der Körpererweiterung $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}[i]$.

Lösung

Es ist $\mathbb{Q}[i] \cong \mathbb{Q}[X]/(X^2+1)$. Ein $\mathbb{Q}$-Algebra-Homomorphismus muss i auf eine Nullstelle von X^2+1 schicken, also auf i oder auf $-i$. Die dadurch definierten surjektiven Einsetzungshomomorphismen

$$\mathbb{Q}[X] \longrightarrow \mathbb{Q}[i]$$

legen nach dem Isomorphiesatz einen $\mathbb{Q}$-Algebra-Automorphismus

$$\mathbb{Q}[i] \longrightarrow \mathbb{Q}[i]$$

fest. Die Galoisgruppe besteht also aus der Identität und der Konjugation $a+bi \mapsto a-bi$. Die Identität ist das neutrale Element dieser Gruppe und die Hintereinanderausführung der Konjugation ist die Identität, was die Gruppenstruktur festlegt.

Aufgabe 1.14. (5 (3+2) Punkte)

Es seien D_1 und D_2 kommutative Gruppen und seien $D_1^\vee$ und $D_2^\vee$ die zugehörigen Charaktergruppen zu einem Körper K.

(1) Zeige, dass zu einem Gruppenhomomorphismus

$$\varphi : D_1 \longrightarrow D_2$$

durch die Zuordnung $\chi \mapsto \chi \circ \varphi$ ein Gruppenhomomorphismus

$$\varphi^\vee : D_2^\vee \longrightarrow D_1^\vee$$

definiert wird.

(2) Es sei D_3 eine weitere kommutative Gruppe und sei

$$\psi : D_2 \longrightarrow D_3$$

ein Gruppenhomomorphismus. Zeige die Gleichheit

$$(\psi \circ \varphi)^\vee = \varphi^\vee \circ \psi^\vee.$$

Lösung

(1) Ein Charakter $\chi \in D_2^\vee$ ist ein Gruppenhomomorphismus

$$D_2 \longrightarrow K^\times,$$

daher ist die Verknüpfung

$$\chi \circ \varphi : D_1 \longrightarrow K^\times$$

ein Element aus $D_1^\vee$, die Abbildung ist also wohldefiniert. Zu zwei Charakteren $\chi_1, \chi_2 \in D_2^\vee$ und einem beliebigen Element $d \in D_1$ ist

$$\begin{array}{rcl} ((\chi_1 \cdot \chi_2) \circ \varphi)(d) & = & (\chi_1 \cdot \chi_2)(\varphi(d)) \\ & = & \chi_1(\varphi(d)) \cdot \chi_2(\varphi(d)) \\ & = & ((\chi_1 \circ \varphi)(d)) \cdot ((\chi_2 \circ \varphi)(d)) \\ & = & ((\chi_1 \circ \varphi) \cdot (\chi_2 \circ \varphi))(d). \end{array}$$

Also ist

$$\varphi^\vee(\chi_1 \cdot \chi_2) = (\chi_1 \cdot \chi_2) \circ \varphi = (\chi_1 \circ \varphi) \cdot (\chi_2 \circ \varphi) = \varphi^\vee(\chi_1) \cdot \varphi^\vee(\chi_2)$$

und die Zuordnung ist ein Gruppenhomomorphismus.

(2) Dies ergibt sich für $\chi \in D_3^\vee$ direkt aus

$$(\psi \circ \varphi)^\vee(\chi) = \chi \circ (\psi \circ \varphi) = (\chi \circ \psi) \circ \varphi = \varphi^\vee(\chi \circ \psi) = \varphi^\vee(\psi^\vee(\chi)) = (\varphi^\vee \circ \psi^\vee)(\chi).$$

Testklausur 2

Fachbereich Mathematik/Informatik **2. Juli 2011**
Prof. Dr. H. Brenner

Körper- und Galoistheorie

Testklausur II

Dauer: Zwei volle Stunden + 10 Minuten Orientierung, in denen noch nicht geschrieben werden darf.

Es sind keine Hilfsmittel erlaubt.

Alle Antworten sind zu begründen.

Es gibt insgesamt 64 Punkte. Es gilt die Sockelregelung, d.h. die Bewertung pro Aufgabe(nteil) beginnt bei der halben Punktzahl. Die Gesamtpunktzahl geht doppelt in Ihre Übungspunktzahl ein.

Zur Orientierung: Zum Bestehen braucht man 16 Punkte, ab 32 Punkten gibt es eine Eins

Tragen Sie auf dem Deckblatt Ihren Namen ein.

Viel Erfolg!

Name, Vorname: .....

Matrikelnummer: .....

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	$\sum$
mögl. Pkt.:	4	4	3	4	4	3	5	4	3	3	5	5	10	7	64
erhalt. Pkt.:															

Note:

Aufgabe 2.1. (4 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

(1) Ein *Normalteiler* N in einer Gruppe G.
(2) Eine *auflösbare* Gruppe G.
(3) Eine *n-te primitive* Einheitswurzel ζ in einem Körper K ($n \in \mathbb{N}_+$).
(4) Der *Grad* einer endlichen Körpererweiterung $K \subseteq L$.
(5) Ein *separables* Polynom $P \in K[X]$ über einem Körper K.
(6) Die *Galoisgruppe* einer Körpererweiterung $K \subseteq L$.
(7) Eine (endliche) *Galoiserweiterung* $K \subseteq L$.
(8) Der n-te *Kreisteilungskörper* (über $\mathbb{Q}$).

Aufgabe 2.2. (4 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze bzw. Formeln.

(1) Das *Lemma von Dedekind* für Charaktere auf einem Monoid M in einen Körper K.
(2) Der *Satz über die Galoiskorrespondenz* bei einer endlichen Galoiserweiterung $K \subseteq L$.
(3) Das *Eisensteinsche Irreduzibilitätskriterium* (über $\mathbb{Z}$ bzw. $\mathbb{Q}$).
(4) Der *Satz über den Grad der Kreisteilungskörper* (über $\mathbb{Q}$).

Aufgabe 2.3. (3 Punkte)

Bestimme das Minimalpolynom der komplexen Zahl $\pi + ei$ über $\mathbb{R}$.

Aufgabe 2.4. (4 (1+1+2) Punkte)

a) Zeige, dass durch

$$K = \mathbb{Z}/(7)[T]/(T^3 - 2)$$

ein Körper mit 343 Elementen gegeben ist.

b) Berechne in K das Produkt $(T^2 + 2T + 4)(2T^2 + 5)$.

c) Berechne das (multiplikativ) Inverse zu $T + 1$.

Aufgabe 2.5. (4 (1+1+1+1) Punkte)

Wir betrachten das Polynom

$$P = X^{7129} + 105X^{103} + 15X + 45\,.$$

Bestimme für die folgenden Körper K, ob P irreduzibel in $K[X]$ ist.

a) $K = \mathbb{Q}$.

b) $K = \mathbb{R}$.

c) $K = \mathbb{Z}/(2)$.

d) $K = \mathbb{Q}[T]/(T^{7129} + 105T^{103} + 15T + 45)$.

Aufgabe 2.6. (3 (1+2) Punkte)

Sei $\mathbb{Q} \subseteq K$ eine endliche normale Körpererweiterung und sei

$$\kappa : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

die komplexe Konjugation.

a) Zeige, dass $\kappa(K) \subseteq K$ gilt.

b) Zeige, dass $\kappa|_K = \mathrm{id}_K$ genau dann gilt, wenn $K \subseteq \mathbb{R}$ ist.

Aufgabe 2.7. (5 Punkte)

Es sei K ein Körper. Beweise die Produktregel für das formale Ableiten

$$D : K[X] \longrightarrow K[X],\ F \longmapsto F'.$$

Aufgabe 2.8. (4 Punkte)

Beweise das Lemma von Dedekind für zwei Charaktere

$$\chi_1, \chi_2 : G \longrightarrow K$$

auf einem Monoid G in einen Körper K.

Aufgabe 2.9. (3 Punkte)

Bestimme die Matrix des Frobenius-Homomorphismus

$$\Phi : \mathbb{F}_{25} \longrightarrow \mathbb{F}_{25}$$

bzgl. einer geeigneten $\mathbb{F}_5$-Basis von $\mathbb{F}_{25}$.

Aufgabe 2.10. (3 Punkte)

Wie viele Unterkörper besitzt der endliche Körper $\mathbb{F}_{625}$?

Aufgabe 2.11. (5 Punkte)

Sei $D = \mathbb{Z}/(n)$ und sei K ein Körper, der eine n-te primitive Einheitswurzel ζ enthält. Es sei L eine D-graduierte Körpererweiterung von K. Beschreibe die Matrizen der K-Algebra-Automorphismen auf L (also die Elemente der Galoisgruppe $\mathrm{Gal}\,(L|K)$) bezüglich einer geeigneten K-Basis von L.

Aufgabe 2.12. (5 Punkte)

Es sei $K \subseteq L$ eine endliche Galoiserweiterung mit Galoisgruppe G und es seien $H_1, H_2 \subseteq G$ Untergruppen mit den zugehörigen Fixkörpern $K_1 = \mathrm{Fix}\,(H_1)$ und $K_2 = \mathrm{Fix}\,(H_2)$. Zeige, dass der Durchschnitt $K_1 \cap K_2$ gleich dem Fixkörper zu H ist, wobei H die von H_1 und H_2 erzeugte Untergruppe bezeichnet (das ist die kleinste Untergruppe von G, die sowohl H_1 als auch H_2 enthält).

Aufgabe 2.13. (10 (4+6) Punkte)

Es sei $\mathbb{Q} \subseteq K_n$ (in $\mathbb{C}$) der n-te Kreisteilungskörper und sei ζ eine n-te primitive Einheitswurzel. Wir betrachten die Elemente ζ^i, $i \in (\mathbb{Z}/(n))^\times$.

a) Zeige, dass für eine Primzahl $n = p$ diese Elemente eine $\mathbb{Q}$-Basis von K_n bilden.

b) Sei p eine Primzahl und $n = p^2$. Zeige, dass diese Elemente keine $\mathbb{Q}$-Basis von K_n bilden.

Aufgabe 2.14. (7 Punkte)

Es sei G eine auflösbare Gruppe und

$$q : G \longrightarrow H$$

ein surjektiver Gruppenhomomorphismus. Zeige, dass auch H auflösbar ist.

Fachbereich Mathematik/Informatik **2. Juli 2011**
Prof. Dr. H. Brenner

Körper- und Galoistheorie

Testklausur II mit Lösungen

Dauer: Zwei volle Stunden + 10 Minuten Orientierung, in denen noch nicht geschrieben werden darf.

Es sind keine Hilfsmittel erlaubt.

Alle Antworten sind zu begründen.

Es gibt insgesamt 64 Punkte. Es gilt die Sockelregelung, d.h. die Bewertung pro Aufgabe(nteil) beginnt bei der halben Punktzahl. Die Gesamtpunktzahl geht doppelt in Ihre Übungspunktzahl ein.

Zur Orientierung: Zum Bestehen braucht man 16 Punkte, ab 32 Punkten gibt es eine Eins

Tragen Sie auf dem Deckblatt Ihren Namen ein.

Viel Erfolg!

Name, Vorname: .....

Matrikelnummer: .....

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	$\sum$
mögl. Pkt.:	4	4	3	4	4	3	5	4	3	3	5	5	10	7	64
erhalt. Pkt.:															

Note:

Aufgabe 2.1. (4 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

(1) Ein *Normalteiler* N in einer Gruppe G.
(2) Eine *auflösbare* Gruppe G.
(3) Eine *n-te primitive* Einheitswurzel ζ in einem Körper K ($n \in \mathbb{N}_+$).
(4) Der *Grad* einer endlichen Körpererweiterung $K \subseteq L$.
(5) Ein *separables* Polynom $P \in K[X]$ über einem Körper K.
(6) Die *Galoisgruppe* einer Körpererweiterung $K \subseteq L$.
(7) Eine (endliche) *Galoiserweiterung* $K \subseteq L$.
(8) Der n-te *Kreisteilungskörper* (über $\mathbb{Q}$).

Lösung

(1) Ein Untergruppe $H \subseteq G$ ist ein *Normalteiler*, wenn
$$xH = Hx$$
ist für alle $x \in G$.
(2) Eine Gruppe G heißt *auflösbar*, wenn es eine Filtrierung
$$\{e\} = G_0 \subseteq G_1 \subseteq G_2 \subseteq \ldots \subseteq G_{k-1} \subseteq G_k = G$$
gibt derart, dass G_i ein Normalteiler in G_{i+1} ist und die Restklassengruppe G_{i+1}/G_i abelsch ist (für jedes $i = 0, \ldots, k-1$).
(3) Eine n-te Einheitswurzel heißt *primitiv*, wenn sie die Ordnung n besitzt.
(4) Bei einer endlichen Körpererweiterung $K \subseteq L$ nennt man die K-(Vektorraum-)Dimension von L den *Grad* der Körpererweiterung.
(5) Ein Polynom $P \in K[X]$ heißt *separabel*, wenn es über keinem Erweiterungskörper $K \subseteq L$ mehrfache Nullstellen besitzt.
(6) Unter der *Galoisgruppe* versteht man die Gruppe der K-Algebra-Automorphismen
$$\mathrm{Aut}_K(L).$$
(7) Eine endliche Körpererweiterung $K \subseteq L$ heißt eine *Galoiserweiterung*, wenn
$$\#(\mathrm{Gal}(L|K)) = \mathrm{grad}_K L$$
gilt.
(8) Der n-te *Kreisteilungskörper* ist der Zerfällungskörper des Polynoms
$$X^n - 1$$
über $\mathbb{Q}$.

Aufgabe 2.2. (4 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze bzw. Formeln.

(1) Das *Lemma von Dedekind* für Charaktere auf einem Monoid M in einen Körper K.
(2) Der *Satz über die Galoiskorrespondenz* bei einer endlichen Galoiserweiterung $K \subseteq L$.
(3) Das *Eisensteinsche Irreduzibilitätskriterium* (über $\mathbb{Z}$ bzw. $\mathbb{Q}$).
(4) Der *Satz über den Grad der Kreisteilungskörper* (über $\mathbb{Q}$).

Lösung

(1) Es sei G ein Monoid, K ein Körper und $\chi_1, \ldots, \chi_n \in \operatorname{Char}(G, K)$ seien n Charaktere. Dann sind diese Charaktere linear unabhängig (als Elemente in $\operatorname{Hom}_K(G, K)$).
(2) Es sei $K \subseteq L$ eine endliche Galoiserweiterung mit der Galoisgruppe $G = \operatorname{Gal}(L|K)$. Dann sind die Zuordnungen
$$M \longmapsto \operatorname{Gal}(L|M) \text{ und } H \longmapsto \operatorname{Fix}(H)$$
zueinander inverse Abbildungen zwischen der Menge der Zwischenkörper M, $K \subseteq M \subseteq L$, und der Menge der Untergruppen von G. Bei dieser Korrespondenz werden die Inklusionen umgekehrt.
(3) Es sei $F = \sum_{i=0}^{n} c_i X^i \in \mathbb{Z}[X]$ ein Polynom. Es sei $p \in \mathbb{Z}$ eine Primzahl mit der Eigenschaft, dass p den Leitkoeffizienten c_n nicht teilt, aber alle anderen Koeffizienten teilt, aber dass p^2 nicht den konstanten Koeffizienten c_0 teilt. Dann ist F irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$.
(4) Der Kreisteilungskörper K_n besitzt über $\mathbb{Q}$ den Grad $\varphi(n)$ (φ die eulersche φ-Funktion).

Aufgabe 2.3. (3 Punkte)

Bestimme das Minimalpolynom der komplexen Zahl $\pi + ei$ über $\mathbb{R}$.

Lösung

Wegen $e \neq 0$ gehört diese Zahl nicht zu $\mathbb{R}$, daher besitzt das Minimalpolynom den Grad 2. Es ist

$$(\pi+ei)^2 = \pi^2-e^2+2\pi ei = \pi^2-e^2+2\pi(\pi+ei)-2\pi^2 = 2\pi(\pi+ei)-\pi^2-e^2.$$

Daher ist

$$X^2 - 2\pi X + \pi^2 + e^2$$

das Minimalpolynom.

Aufgabe 2.4. (4 (1+1+2) Punkte)

a) Zeige, dass durch

$$K = \mathbb{Z}/(7)[T]/(T^3 - 2)$$

ein Körper mit 343 Elementen gegeben ist.

b) Berechne in K das Produkt $(T^2 + 2T + 4)(2T^2 + 5)$.

c) Berechne das (multiplikativ) Inverse zu $T + 1$.

Lösung

a) Es ist

$$1^3 = 1,\ 2^3 = 1,\ 3^3 = 6,\ 4^3 = 1,\ 5^3 = 6,\ 6^3 = 6\,.$$

Also besitzt das Polynom $T^3 - 2$ keine Nullstelle in $\mathbb{Z}/(7)$ und ist somit irreduzibel, also ist $\mathbb{Z}/(7)[T]/(T^3-2)$ ein Körper. Die Restklassen von $1, T, T^2$ bilden eine $\mathbb{Z}/(7)$-Basis, so dass dieser Körper $7^3 = 343$ Elemente besitzt.

b) Es ist

$$\begin{aligned}(T^2 + 2T + 4)(2T^2 + 5) &= 2T^4 + 4T^3 + 6T^2 + 3T + 6\\ &= 4T + 1 + 6T^2 + 3T + 6\\ &= 6T^2.\end{aligned}$$

c) Polynomdivision liefert

$$T^3 - 2 = (T^2 + 6T + 1)(T + 1) + 4\,.$$

In K gilt somit $(T + 1)(T^2 + 6T + 1) = 3$. Das Inverse von 3 in $\mathbb{Z}/(7)$ ist 5, also ist $5T^2 + 2T + 5$ das Inverse von $T + 1$.

Aufgabe 2.5. (4 (1+1+1+1) Punkte)

Wir betrachten das Polynom

$$P = X^{7129} + 105X^{103} + 15X + 45\,.$$

Bestimme für die folgenden Körper K, ob P irreduzibel in $K[X]$ ist.

a) $K = \mathbb{Q}$.

b) $K = \mathbb{R}$.

c) $K = \mathbb{Z}/(2)$.

d) $K = \mathbb{Q}[T]/(T^{7129} + 105T^{103} + 15T + 45)$.

Lösung

a) Wir können das Eisenstein-Kriterium mit der Primzahl 5 anwenden. Die 5 teilt alle Koeffizienten von P außer dem Leitkoeffizienten, und 5^2 teilt nicht den konstanten Term. Also ist P irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$.

b) Das Polynom hat ungeraden Grad, daher besitzt es aufgrund des Zwischenwertsatzes eine reelle Nullstelle und ist daher nicht irreduzibel in $\mathbb{R}[X]$.

c) Über $K = \mathbb{Z}/(2)$ wird das Polynom zu $X^{7129} + X^{103} + X + 1$, das die Nullstelle 1 besitzt. Also ist P nicht irreduzibel in $\mathbb{Z}/(2)[X]$.

d) Zunächst ist K ein Körper aufgrund von Teil (a). Es sei t die Restklasse von T. In K ist nach Konstruktion $P(t) = 0$, also ist t eine Nullstelle von P und P ist nicht irreduzibel in $K[X]$.

Aufgabe 2.6. (3 (1+2) Punkte)

Sei $\mathbb{Q} \subseteq K$ eine endliche normale Körpererweiterung und sei

$$\kappa : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

die komplexe Konjugation.

a) Zeige, dass $\kappa(K) \subseteq K$ gilt.

b) Zeige, dass $\kappa|_K = \mathrm{id}_K$ genau dann gilt, wenn $K \subseteq \mathbb{R}$ ist.

Lösung

a) Die Verknüpfung $K \xrightarrow{\iota} \mathbb{C} \xrightarrow{\kappa} \mathbb{C}$ (ι die Inklusion) ist ein $\mathbb{Q}$-Algebra-Homomorphismus, daher ist das Bild dieser Abbildung nach Satz 14.3 gleich K.

b) Bei $K \subseteq \mathbb{R}$ ist natürlich $\kappa|_K = \mathrm{id}_K$, da die komplexe Konjugation auf $\mathbb{R}$ die Identität ist und sich diese Eigenschaft auf eine Teilmenge überträgt. Wenn andererseits $K \not\subseteq \mathbb{R}$ ist, so gibt es (wegen $K \subseteq \mathbb{C}$) ein $a + bi \in K$ mit $b \neq 0$. Für dieses Element ist $\kappa(a+bi) = a-bi \neq a+bi$, so dass die komplexe Konjugation nicht die Identität auf K ist.

Aufgabe 2.7. (5 Punkte)

Es sei K ein Körper. Beweise die Produktregel für das formale Ableiten

$$D : K[X] \longrightarrow K[X],\ F \longmapsto F'.$$

Lösung

Die Produktregel besagt

$$(F \cdot G)' = F \cdot G' + F' \cdot G\,.$$

Nach Definition ist die Ableitung $F \mapsto F'$ eine K-lineare Abbildung. Deshalb und aufgrund des Distributivgesetzes sind für festes G die Abbildungen

$$F \longmapsto F \cdot G \longmapsto (F \cdot G)'\,,$$

$$F \longmapsto F \cdot G'$$

und

$$F \longmapsto F' \cdot G$$

K-linear. Da jedes F eine eindeutige Darstellung als K-Linearkombination mit den Potenzen X^n, $n \in \mathbb{N}$, besitzt, genügt es, die Aussage für $F = X^n$ zu zeigen. Die gleiche Überlegung zeigt, dass man lediglich $G = X^m$ betrachten muss. Dann gilt einerseits

$$(X^n \cdot X^m)' \;=\; (X^{n+m})' \;=\; (n+m)X^{n+m-1}$$

und andererseits

$$\begin{aligned} X^n \cdot (X^m)' + (X^n)' \cdot X^m &= mX^nX^{m-1} + nX^{n-1}X^m \\ &= mX^{n+m-1} + nX^{n+m-1} \\ &= (n+m)X^{n+m-1}, \end{aligned}$$

so dass Gleichheit gilt.

Aufgabe 2.8. (4 Punkte)

Beweise das Lemma von Dedekind für zwei Charaktere

$$\chi_1, \chi_2 : G \longrightarrow K$$

auf einem Monoid G in einen Körper K.

Lösung

Wir müssen zeigen, dass χ_1 und χ_2 als Abbildungen von G nach K linear unabhängig sind. Das bedeutet, dass sie sich nicht um einen konstanten Faktor unterscheiden. Wir nehmen $\chi_2 = a \cdot \chi_1$ mit $a \in K^\times$ an. Wegen $\chi_1(e) = \chi_2(e) = 1$ für das neutrale Element $e \in G$ muss $a = 1$ sein. Dann ist aber $\chi_2 = \chi_1$ und es würden nicht zwei verschiedene Charaktere vorliegen.

Aufgabe 2.9. (3 Punkte)

Bestimme die Matrix des Frobenius-Homomorphismus

$$\Phi : \mathbb{F}_{25} \longrightarrow \mathbb{F}_{25}$$

bzgl. einer geeigneten $\mathbb{F}_5$-Basis von $\mathbb{F}_{25}$.

Lösung

Wegen $1^2 = (-1)^2 = 1$ und $2^2 = 3^2 = 4$ in $\mathbb{F}_5 = \mathbb{Z}/(5)$ ist $X^2 - 2$ irreduzibel über $\mathbb{F}_5$. Daher ist $\mathbb{F}_{25} = \mathbb{Z}/(5)[X]/(X^2 - 2)$. Wir betrachten den Frobenius-Homomorphismus bzgl. der Basis 1 und x (x sei die Restklasse von X). Dabei ist $1^5 = 1$ und

$$x^5 \;=\; x^2 \cdot x^2 \cdot x \;=\; 2 \cdot 2 \cdot x \;=\; 4x.$$

Also ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

die beschreibende Matrix.

Aufgabe 2.10. (3 Punkte)

Wie viele Unterkörper besitzt der endliche Körper $\mathbb{F}_{625}$?

Lösung

Wegen $625 = 5^4$ ist die Galoisgruppe der Körpererweiterung $\mathbb{F}_5 \subset \mathbb{F}_{625}$ zyklisch der Ordnung 4, also isomorph zu $\mathbb{Z}/(4)$. Diese Gruppe besitzt drei Untergruppen, nämlich 0, die durch 2 erzeugte Untergruppe und sich selbst. Nach dem Satz über die Galoiskorrespondenz besitzt daher $\mathbb{F}_{625}$ drei Zwischenkörper.

Aufgabe 2.11. (5 Punkte)

Sei $D = \mathbb{Z}/(n)$ und sei K ein Körper, der eine n-te primitive Einheitswurzel ζ enthält. Es sei L eine D-graduierte Körpererweiterung von K. Beschreibe die Matrizen der K-Algebra-Automorphismen auf L (also die Elemente der Galoisgruppe $\mathrm{Gal}\,(L|K)$) bezüglich einer geeigneten K-Basis von L.

Lösung

Die Automorphismen auf L entsprechen den Charakteren auf $D = \mathbb{Z}/(n)$. Diese entsprechen wiederum eindeutig dem Bild der 1, welches eine n-te Einheitswurzel sein muss, also sich mittels der gegebenen primitiven Einheitswuzel als ζ^i mit einem eindeutigen i zwischen 0 und $n-1$ schreiben lässt. Es sei $x \in L_1$ ein von 0 verschiedenes Element der ersten Stufe. Dann bilden die x^d, $0 \leq d \leq n-1$, eine K-Basis von L. Der zu einem Charakter χ gehörende Automorphismus wirkt dabei in der d-ten Stufe durch Multiplikation mit $\chi(d)$. Daher besitzt der Automorphismus zum Charakter χ mit $\chi(1) = \zeta^i$ bzgl. dieser Basis die Matrixdarstellung

$$\begin{pmatrix} \zeta^0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \zeta^i & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \zeta^{2i} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \zeta^{i(n-1)} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2.12. (5 Punkte)

Es sei $K \subseteq L$ eine endliche Galoiserweiterung mit Galoisgruppe G und es seien $H_1, H_2 \subseteq G$ Untergruppen mit den zugehörigen Fixkörpern $K_1 = \mathrm{Fix}\,(H_1)$ und $K_2 = \mathrm{Fix}\,(H_2)$. Zeige, dass der Durchschnitt $K_1 \cap K_2$ gleich dem Fixkörper zu H ist, wobei H die von H_1 und H_2 erzeugte Untergruppe bezeichnet (das ist die kleinste Untergruppe von G, die sowohl H_1 als auch H_2 enthält).

Lösung

Es sei zuerst $x \in \mathrm{Fix}\,(H)$. Wegen $H_1, H_2 \subseteq H$ ist insbesondere $x \in \mathrm{Fix}\,(H_1)$ und $x \in \mathrm{Fix}\,(H_2)$, also auch $x \in \mathrm{Fix}\,(H_1) \cap \mathrm{Fix}\,(H_2) = K_1 \cap K_2$.

Aufgrund der Galoiskorrespondenz können wir die andere Inklusion $K_1 \cap K_2 \subseteq \mathrm{Fix}\,(H)$ dadurch zeigen, dass wir die umgekehrte Inklusion der Galoisgruppen nachweisen. D.h. wir müssen $H \subseteq \mathrm{Gal}\,(L|K_1 \cap K_2)$ zeigen. Da rechts eine Gruppe steht und H die von H_1 und H_2 erzeugte Untergruppe ist, müssen wir lediglich $H_1, H_2 \subseteq \mathrm{Gal}\,(L|K_1 \cap K_2)$ zeigen. Wegen $K_1 \cap K_2 \subseteq K_1$ ist aber $H_1 \subseteq \mathrm{Gal}\,(L|K_1 \cap K_2)$ (ebenso für H_2).

Aufgabe 2.13. (10 (4+6) Punkte)

Es sei $\mathbb{Q} \subseteq K_n$ (in $\mathbb{C}$) der n-te Kreisteilungskörper und sei ζ eine n-te primitive Einheitswurzel. Wir betrachten die Elemente ζ^i, $i \in (\mathbb{Z}/(n))^\times$.

a) Zeige, dass für eine Primzahl $n = p$ diese Elemente eine $\mathbb{Q}$-Basis von K_n bilden.

b) Sei p eine Primzahl und $n = p^2$. Zeige, dass diese Elemente keine $\mathbb{Q}$-Basis von K_n bilden.

Lösung

a) Der Kreisteilungskörper K_n wird beschrieben als $K_n = \mathbb{Q}[X]/(\Phi_n)$ mit dem n-ten Kreisteilungspolynom Φ_n. Dieses hat den Grad $\varphi(n)$ (mit der eulerschen φ-Funktion), und X wird durch ζ ersetzt. Daher ist $\zeta^0, \zeta^1, \ldots, \zeta^{\varphi(n)-1}$ eine $\mathbb{Q}$-Basis von K_n. Bei $n = p$ ist $\varphi(p) = p - 1$ und wir betrachten die Elemente ζ^i, $i = 1, \ldots, p-1$. Das p-te Kreisteilungspolynom ist $X^{p-1} + X^{p-2} + \ldots + X + 1$. Daher ist

$$1 = -\zeta^{p-1} - \zeta^{p-2} - \ldots - \zeta,$$

so dass man die 1 als Linearkombination der angegebenen Elemente darstellen kann. Daher bilden sie ein Erzeugendensystem und somit auch eine Basis, da es sich um $\varphi(p)$ Elemente handelt.

b) Die Einheiten in $\mathbb{Z}/(p^2)$ sind alle Zahlen, die keine Vielfachen von p sind. Es gilt

$$0 = 1 + \zeta + \zeta^2 + \ldots + \zeta^{n-1}\,.$$

Wir schreiben diese Summe als

$$0 = \sum_{i=0}^{n-1} \zeta^i = \sum_{i=0,\, p|i}^{n-1} \zeta^i + \sum_{i=0,\, p\not| i}^{n-1} \zeta^i = \sum_{j=0}^{p-1} \zeta^{pj} + \sum_{i=0,\, p\not| i}^{n-1} \zeta^i.$$

Da ζ eine p^2-te primitive Einheitswurzel ist, ist ζ^p eine p-te primitive Einheitswurzel. Die linke Summe ist daher

$$\sum_{j=0}^{p-1} \zeta^{pj} = \sum_{j=0}^{p-1} (\zeta^p)^j = 0.$$

Also ist auch die rechte Summe

$$\sum_{i=0,\, p\not| i}^{n-1} \zeta^i = 0.$$

Dies ist aber die Summe über alle Elemente aus unserer Familie, so dass diese Familie linear abhängig ist.

Aufgabe 2.14. (7 Punkte)

Es sei G eine auflösbare Gruppe und

$$q : G \longrightarrow H$$

ein surjektiver Gruppenhomomorphismus. Zeige, dass auch H auflösbar ist.

Lösung

Wir fixieren eine auflösende Filtrierung

$$\{e\} = G_0 \subseteq G_1 \subseteq G_2 \subseteq \ldots \subseteq G_{k-1} \subseteq G_k = G$$

und setzen $H_i = q(G_i)$, dies ist eine Filtrierung von H mit Untergruppen. Wir betrachten das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} G_i & \longrightarrow & G_{i+1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_i & \longrightarrow & H_{i+1} \end{array} ,$$

wobei die vertikalen Homomorphismen surjektiv sind. Wir behaupten, dass H_i ein Normalteiler in H_{i+1} ist, und ziehen dazu Lemma 5.4 heran. Sei also $h \in H_i$ und $x \in H_{i+1}$, die wir durch $\tilde{h} \in G_i$ bzw. $\tilde{x} \in G_{i+1}$ repräsentieren. Dann ist $xhx^{-1} = q(\tilde{x}\tilde{h}\tilde{x}^{-1})$ und wegen der Normalität von G_i ist $\tilde{x}\tilde{h}\tilde{x}^{-1} \in G_i$ und somit $xhx^{-1} \in H_i$. Wir betrachten die zusammengesetzte surjektive Abbildung

$$G_{i+1} \longrightarrow H_{i+1} \longrightarrow H_{i+1}/H_i \, .$$

Da G_i zum Kern dieser Abbildung gehört, gibt es aufgrund von Satz 5.10 eine surjektive Abbildung

$$G_{i+1}/G_i \longrightarrow H_{i+1}/H_i,$$

weshalb H_{i+1}/H_i ebenfalls kommutativ ist.

Anhang 1: Der Polynomring

Der Polynomring über einem Körper

Definition 1.15. Der *Polynomring* über einem Körper K besteht aus allen Polynomen

$$P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \ldots + a_nX^n$$

mit $a_i \in K$, $n \in \mathbb{N}$, und mit komponentenweiser Addition und einer Multiplikation, die durch distributive Fortsetzung der Regel

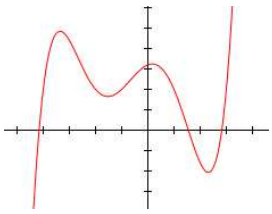
$$X^n \cdot X^m := X^{n+m}$$

definiert ist.

Ein Polynom $P = \sum_{i=0}^{n} a_iX^i = a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n$ ist formal gesehen nichts anderes als das Tupel $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$, die die *Koeffizienten* des Polynoms heißen. Der Körper K heißt in diesem Zusammenhang der *Grundkörper* des Polynomrings. Aufgrund der komponentenweisen Definition der Addition liegt unmittelbar eine Gruppe vor, mit dem *Nullpolynom* (bei dem alle Koeffizienten null sind) als neutralem Element. Zwei Polynome sind genau dann gleich, wenn sie in allen ihren Koeffizienten übereinstimmen. Die Polynome mit $a_i = 0$ für alle $i \geq 1$ heißen *konstante Polynome*, man schreibt sie einfach als a_0.

Die für ein einfaches Tupel zunächst ungewöhnliche Schreibweise deutet in suggestiver Weise an, wie die Multiplikation aussehen soll, das Produkt $X^n \cdot X^m$ ist nämlich durch die Addition der Exponenten gegeben. Dabei nennt man X die *Variable* des Polynomrings. Für beliebige Polynome ergibt sich die Multiplikation aus dieser einfachen Multiplikationsbedingung durch distributive Fortsetzung gemäß der Vorschrift, „alles mit allem“ zu multiplizieren. Die Multiplikation ist also explizit durch folgende Regel gegeben:

$$\sum_{i=0}^{n} a_iX^i \cdot \sum_{j=0}^{m} b_jX^j = \sum_{k=0}^{n+m} c_kX^k \text{ mit } c_k = \sum_{r=0}^{k} a_rb_{k-r}\,.$$



Der Graph einer Polynomfunktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ vom Grad 5.

In ein Polynom $P \in K[X]$ kann man ein Element $a \in K$ *einsetzen*, indem man die Variable X an jeder Stelle durch a ersetzt. Dies führt zu einer Abbildung

$$K \longrightarrow K,\ a \longmapsto P(a),$$

die die durch das Polynom definierte *Polynomfunktion* heißt.

Definition 1.16. Der *Grad* eines von null verschiedenen Polynoms

$$P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \ldots + a_nX^n$$

mit $a_n \neq 0$ ist n.

Das Nullpolynom bekommt keinen Grad. Der Koeffizient a_n, der zum Grad n des Polynoms gehört, heißt *Leitkoeffizient* des Polynoms.

Satz 1.17. *Sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K. Es seien $P, T \in K[X]$ zwei Polynome mit $T \neq 0$. Dann gibt es eindeutig bestimmte Polynome $Q, R \in K[X]$ mit*

$$P = TQ + R \text{ und mit } \operatorname{grad}(R) < \operatorname{grad}(T) \text{ oder } R = 0\,.$$

Beweis. Wir beweisen die Existenzaussage durch Induktion über den Grad von P. Wenn der Grad von T größer als der Grad von P ist, so ist $Q = 0$ und $R = P$ die Lösung, so dass wir dies nicht weiter betrachten müssen. Bei $\operatorname{grad}(P) = 0$ ist nach der Vorbemerkung auch $\operatorname{grad}(T) = 0$ und damit ist (da $T \neq 0$ und K ein Körper ist) $Q = P/T$ und $R = 0$ die Lösung. Sei nun $\operatorname{grad}(P) = n$ und die Aussage für kleineren Grad schon bewiesen. Wir schreiben $P = a_nX^n + \ldots + a_1X + a_0$ und $T = b_kX^k + \ldots + b_1X + b_0$ mit $a_n, b_k \neq 0$, $k \leq n$. Dann gilt mit $H = \frac{a_n}{b_k}X^{n-k}$ die Beziehung

$$\begin{aligned} P' = P - TH = 0X^n + (a_{n-1} - \frac{a_n}{b_k}b_{k-1})X^{n-1} + \ldots \\ + (a_{n-k} - \frac{a_n}{b_k}b_0)X^{n-k} + a_{n-k-1}X^{n-k-1} + \ldots + a_0. \end{aligned}$$

Dieses Polynom P' hat einen Grad kleiner als n und darauf können wir die Induktionsvoraussetzung anwenden, d.h. es gibt Q' und R' mit

$$P' = TQ' + R' \text{ mit } \operatorname{grad}(R') < \operatorname{grad}(T) \text{ oder } R' = 0\,.$$

Daraus ergibt sich insgesamt

$$P \;=\; P' + TH \;=\; TQ' + TH + R' \;=\; T(Q' + H) + R',$$

so dass also $Q = Q' + H$ und $R = R'$ die Lösung ist. Zur Eindeutigkeit sei $P = TQ + R = TQ' + R'$ mit den angegebenen Bedingungen. Dann ist $T(Q - Q') = R' - R$. Da die Differenz $R' - R$ einen Grad kleiner als $\operatorname{grad}(T)$ besitzt, und der Polynomring nullteilerfrei ist, ist diese Gleichung nur bei $R = R'$ und somit $Q = Q'$ lösbar. □

Lemma 1.18. *Sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K. Sei $P \in K[X]$ ein Polynom und $a \in K$. Dann ist a genau dann eine Nullstelle von P, wenn P ein Vielfaches des linearen Polynoms $X - a$ ist.*

Beweis. Wenn P ein Vielfaches von $X-a$ ist, so kann man

$$P = (X-a)Q$$

mit einem weiteren Polynom Q schreiben. Einsetzen ergibt

$$P(a) = (a-a)Q(a) = 0\,.$$

Im Allgemeinen gibt es aufgrund der Division mit Rest eine Darstellung

$$P = (X-a)Q + R\,,$$

wobei $R = 0$ oder aber den Grad null besitzt, also eine Konstante ist. Einsetzen ergibt

$$P(a) = R\,.$$

Wenn also $P(a) = 0$ ist, so muss der Rest $R = 0$ sein, und das bedeutet, dass $P = (X-a)Q$ ist. Also ist $X-a$ ein Linearfaktor von P. □

Korollar 1.19. *Es sei K ein Körper und $K[X]$ der Polynomring über K. Sei $P \in K[X]$ ein Polynom (ungleich null) vom Grad d. Dann besitzt P maximal d Nullstellen.*

Beweis. Wir beweisen die Aussage durch Induktion über d. Für $d = 0, 1$ ist die Aussage offensichtlich richtig. Sei also $d \geq 2$ und die Aussage sei für kleinere Grade bereits bewiesen. Sei a eine Nullstelle von P. Dann ist $P = Q(X-a)$ nach Lemma Anhang 1.4 und Q hat den Grad $d-1$, so dass wir auf Q die Induktionsvoraussetzung anwenden können. Das Polynom Q hat also maximal $d-1$ Nullstellen. Für $b \in K$ gilt $P(b) = Q(b)(b-a)$. Dies kann nur dann null sein, wenn einer der Faktoren null ist, so dass eine Nullstelle von P gleich a ist oder aber eine Nullstelle von Q ist. Es gibt also maximal d Nullstellen von P. □

Korollar 1.20. *Sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K. Dann besitzt jedes $P \in K[X]$, $P \neq 0$, eine Produktzerlegung*

$$P = (X-\lambda_1)^{\mu_1} \cdots (X-\lambda_k)^{\mu_k} \cdot Q$$

mit $\mu_j \geq 1$ und einem nullstellenfreien Polynom Q. Dabei sind die auftretenden verschiedenen Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ und die zugehörigen Exponenten $\mu_1, \ldots, \mu_k$ (bis auf die Reihenfolge) eindeutig bestimmt.

Beweis. Siehe Aufgabe 17.7 (Mathematik (Osnabrück 2009-2011)/Teil I). □

Es gilt allgemeiner, dass die Zerlegung eines Polynoms in irreduzible Faktoren im Wesentlichen eindeutig ist. Der Polynomring $K[X]$ ist ein kommutativer Ring, aber kein Körper.

Anhang 2: Verknüpfung und Gruppen

Definition 2.1. Eine *Verknüpfung* $\circ$ auf einer Menge M ist eine Abbildung

$$\circ : M \times M \longrightarrow M,\ (x, y) \longmapsto \circ(x, y) = x \circ y.$$

Statt $\circ(x, y)$ schreibt man $x \circ y$ oder $x * y$ oder einfach xy.

Wenn X ein geometrisches Objekt ist, und $M = \mathrm{Bew}\,(X)$ die Menge der Bewegungen auf X (also die bijektiven Abbildungen von X nach X, die die geometrische Struktur von X respektieren), so ist die Hintereinanderschaltung von Bewegungen, also

$$\mathrm{Bew}\,(X) \times \mathrm{Bew}\,(X) \longrightarrow \mathrm{Bew}\,(X),\ (f, g) \longmapsto g \circ f,$$

eine Verknüpfung.

Definition 2.2. Ein *Monoid* ist eine Menge M zusammen mit einer Verknüpfung

$$\circ : M \times M \to M$$

und einem ausgezeichneten Element $e \in M$ derart, dass folgende beiden Bedingungen erfüllt sind.

(1) Die Verknüpfung ist *assoziativ*, d.h. es gilt

$$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$$

für alle $x, y, z \in M$.

(2) e ist *neutrales Element* der Verknüpfung, d.h. es gilt

$$x \circ e = x = e \circ x$$

für alle $x \in M$.

Die Hintereinanderausführung von Bewegungen ist assoziativ, da es allgemeiner bei der Hintereinanderausführung von Abbildungen nicht auf die Klammerung ankommt. Die identische Bewegung ist die neutrale Bewegung. In einem Monoid ist das neutrale Element eindeutig bestimmt. Wenn es nämlich zwei Elemente e_1 und e_2 gibt mit der neutralen Eigenschaft, so folgt sofort

$$e_1 = e_1 e_2 = e_2.$$

Definition 2.3. Ein Monoid $(G, \circ, e)$ heißt *Gruppe*, wenn jedes Element ein *inverses Element* besitzt, d.h. wenn es zu jedem $x \in G$ ein $y \in G$ gibt mit $x \circ y = e = y \circ x$.

Die Menge aller Abbildungen auf einer Menge X in sich selbst ist mit der Hintereinanderschaltung ein Monoid; die nicht bijektiven Abbildungen sind aber nicht umkehrbar, so dass sie kein Inverses besitzen und daher keine Gruppe vorliegt. Die Menge der bijektiven Selbstabbildungen einer Menge und die Menge der Bewegungen eines geometrischen Objektes sind hingegen eine Gruppe. In einer Gruppe ist das inverse Element zu einem Element

$x \in G$ eindeutig bestimmt. Wenn nämlich y und z die Eigenschaft besitzen, zu x invers zu sein, so gilt

$$y = ye = y(xz) = (yx)z = ez = z.$$

Daher schreibt man das zu einem Gruppenelement $x \in G$ eindeutig bestimmte inverse Element als

$$x^{-1}.$$

Definition 2.4. Eine Gruppe $(G, \circ, e)$ heißt *kommutativ* (oder *abelsch*), wenn die Verknüpfung kommutativ ist, wenn also $x \circ y = y \circ x$ für alle $x, y \in G$ gilt.

Lemma 2.5. *Sei $(G, e, \circ)$ eine Gruppe. Dann besitzen zu je zwei Gruppenelementen $a, b \in G$ die beiden Gleichungen*

$$a \circ x = b \text{ und } y \circ a = b$$

eindeutige Lösungen $x, y \in G$.

Beweis. Wir betrachten die linke Gleichung. Aus beidseitiger Multiplikation mit a^{-1} (bzw. mit a) von links folgt, dass nur

$$x = a^{-1} \circ b$$

als Lösung in Frage kommt. Wenn man dies einsetzt, so sieht man, dass es sich in der Tat um eine Lösung handelt. □

Definition 2.6. Sei $(G, e, \circ)$ eine Gruppe. Eine Teilmenge $H \subseteq G$ heißt *Untergruppe* von G wenn folgendes gilt.

(1) $e \in H$.
(2) Mit $g, h \in H$ ist auch $g \circ h \in H$.
(3) Mit $g \in H$ ist auch $g^{-1} \in H$.

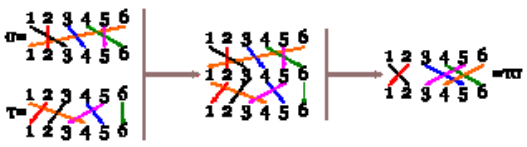
Anhang 3: Permutationsgruppen

Definition 3.1. Zu einer Menge M nennt man die Menge

$$\mathrm{Aut}\,(M) = \mathrm{Perm}\,(M) = \{\varphi : M \longrightarrow M \,|\, \varphi \text{ bijektiv}\}$$

der bijektiven Selbstabbildungen die *Automorphismengruppe* oder die *Permutationsgruppe* zu M.

Eine bijektive Selbstabbildung $\varphi : M \to M$ nennt man auch eine *Permutation*. Für eine endliche Menge $I = \{1, \ldots, n\}$ schreibt man $S_n = \mathrm{Perm}\,(I)$. Eine endliche Permutation kann man bspw. mit einer (vollständigen) Wertetabelle oder mit einem Pfeildiagramm beschreiben.



Lemma 3.2. *Sei M eine endliche Menge mit n Elementen. Dann besitzt die Permutationsgruppe* $\mathrm{Perm}\,(M) \cong S_n$ *genau $n!$ Elemente.*

Beweis. Es sei $M = \{1, \ldots, n\}$. Für die 1 gibt es n mögliche Bilder, für 2 gibt es noch $n-1$ mögliche Bilder, für 3 gibt es noch $n-2$ mögliche Bilder, usw. Daher gibt es insgesamt

$$n(n-1)(n-2)\cdots 2 \cdot 1 = n!$$

mögliche Permutationen. □

Lemma 3.3. *Sei M eine Menge und $N \subseteq M$ eine Teilmenge. Dann gibt es eine natürliche injektive Abbildung*

$$\mathrm{Perm}\,(N) \longrightarrow \mathrm{Perm}\,(M),\ \sigma \longmapsto \tilde{\sigma},$$

wobei $\tilde{\sigma}$ auf N gleich σ und auf $M \setminus N$ die Identität ist. Mittels dieser Abbildung ist $\mathrm{Perm}\,(N)$ *eine Untergruppe von* $\mathrm{Perm}\,(M)$.

Beweis. Offenbar ist die Abbildung wohldefiniert. Sie ist injektiv, da aus $\tilde{\sigma} = \tilde{\tau}$ sofort folgt, dass $\sigma = \tau$ ist. Die Abbildung liefert eine Bijektion zwischen $\mathrm{Perm}\,(N)$ und der Menge der Permutationen auf M, die $M \setminus N$ fest lassen. Diese Permutationen bilden eine Untergruppe. □

Zykeldarstellung für Permutationen

Sei M eine endliche Menge, $\sigma \in \mathrm{Perm}\,(M)$ eine Permutation und $x \in M$. Dann kann man die Folge

$$\sigma^0(x) = \mathrm{id}\,(x) = x,\ \sigma^1(x) = \sigma(x),\ \sigma^2(x),\ \sigma^3(x) \ldots,$$

betrachten. Da M endlich ist, gibt es eine Wiederholung $\sigma^i(x) = \sigma^j(x)$ mit $i < j$. Durch Multiplikation mit σ^{-i} sieht man, dass es ein minimales $k \in \mathbb{N}_+$ gibt mit $\sigma^k(x) = \sigma^0(x) = x$, und dass alle $\sigma^j(x)$ für j, $1 \leq j < k$, verschieden sind. Ist $y = \sigma^j(x)$, so durchläuft auch $\sigma^i(y)$ dieselbe Teilmenge aus M.

Definition 3.4. Sei M eine endliche Menge und σ eine Permutation auf M. Man nennt σ einen *Zykel der Ordnung* r, wenn es eine r-elementige Teilmenge $Z \subseteq M$ gibt derart, dass σ auf $M \setminus Z$ die Identität ist und σ die Elemente aus Z zyklisch vertauscht. Wenn $Z = \{z, \sigma(z),\ \sigma^2(z), \ldots, \sigma^{r-1}(z)\}$ ist, so schreibt man einfach

$$\sigma = \langle z, \sigma(z),\ \sigma^2(z), \ldots, \sigma^{r-1}(z) \rangle\,.$$

Dabei kann man statt z jedes andere Element aus Z als Anfangsglied nehmen. Die Menge Z heißt auch der *Wirkungsbereich* des Zykels, und die (geordnete) Auflistung heißt die *Wirkungsfolge* des Zykels.

Definition 3.5. Eine *Transposition* auf einer endlichen Menge M ist eine Permutation auf M, die genau zwei Elemente miteinander vertauscht und alle anderen Elemente unverändert lässt.

Eine Transposition ist also ein besonders einfacher Zykel mit der Zyklendarstellung $\langle x, y\rangle$, wenn die Transposition die Punkte x und y vertauscht.

Lemma 3.6. *Jede Permutation auf einer endlichen Menge M kann man als Produkt von Transpositionen schreiben.*

Beweis. Wir beweisen die Aussage durch Induktion über die Anzahl der Menge M. Für $\#(M) = 1$ ist nichts zu zeigen, sei also $\#(M) \geq 2$. Die Identität ist das leere Produkt aus Transpositionen. Sei also σ nicht die Identität, und sei $\sigma(x) = y \neq x$. Es sei τ die Transposition, die x und y vertauscht. Dann ist y ein Fixpunkt von $\sigma\tau$, und man kann $\sigma\tau$ auffassen als eine Permutation auf $M' = M \setminus \{y\}$. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es dann Transpositionen τ_j auf M' mit $\sigma\tau = \prod_j \tau_j$ auf M'. Dies gilt dann auch auf M, und daher ist $\sigma = \prod_j \tau_j\tau$. □

Satz 3.7. *Sei M eine endliche Menge und σ eine Permutation auf M. Dann gibt es eine Darstellung*

$$\sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_k \,,$$

wobei die σ_i Zykel der Ordnung ≥ 2 sind mit disjunkten Wirkungsbereichen. Dabei ist die Darstellung bis auf die Reihenfolge eindeutig.

Beweis. Es sei F die Fixpunktmenge von σ und es seien $Z_1, \ldots, Z_k$ diejenigen Teilmengen von M mit mindestens zwei Elementen derart, dass σ die Elemente aus jedem Z_i zyklisch vertauscht. Dann ist M die disjunkte Vereinigung aus F und den Z_i. Zu i, $1 \leq i \leq k$ sei σ_i der Zykel auf M, der auf $M \setminus Z_i$ die Identität ist und auf Z_i mit σ übereinstimmt. Wir behaupten

$$\sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_k \,.$$

Um dies einzusehen, sei $x \in M$ beliebig. Bei $x \in F$ ist x ein Fixpunkt für alle σ_i und daher kommt links und rechts wieder x raus. Sei also x kein Fixpunkt der Permutation. Dann gehört $x \in Z_i$ für genau ein i. Für alle $j \neq i$ ist x ein Fixpunkt von σ_j. Da $y = \sigma(x)$ ebenfalls zu Z_i gehört, ist auch y ein Fixpunkt von σ_j für alle $j \neq i$. Wendet man daher die rechte Seite auf x an, so wird x auf x abgebildet bis man zu σ_i kommt. Dieses bildet x auf y ab und die folgenden σ_j bilden y auf y ab, so dass die rechte Seite insgesamt x auf y schickt und daher mit σ übereinstimmt. □

Aufgrund von diesem Satz können wir allgemein eine Zyklendarstellung für eine beliebige Permutation definieren.

Definition 3.8. Sei M eine endliche Menge und σ eine Permutation auf M. Es seien $Z_1, \ldots, Z_k$ die Wirkungsbereiche der Zyklen von σ mit $n_i = \#(Z_i)$. Es sei $x_i \in Z_i$ und $Z_i = \{x_i, \sigma(x_i), \ldots, \sigma^{n_i-1}(x_i)\}$. Dann nennt man

$$\langle x_1, \sigma(x_1), \ldots, \sigma^{n_1-1}(x_1)\rangle\langle x_2, \sigma(x_2), \ldots, \sigma^{n_2-1}(x_2)\rangle \cdots \langle x_k, \sigma(x_k), \ldots, \sigma^{n_k-1}(x_k)\rangle$$

die *Zyklendarstellung* von σ.

Das Signum einer Permutation

Definition 3.9. Sei $M = \{1, \ldots, n\}$ und sei σ eine Permutation auf M. Dann heißt die Zahl

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = \prod_{i<j} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}$$

das *Signum* (oder das *Vorzeichen*) der Permutation σ.

Das Signum ist 1 oder -1, da im Zähler und im Nenner die positive oder die negative Differenz $\pm(i - j)$ steht. Es gibt für das Signum also nur zwei mögliche Werte. Bei $\operatorname{sgn}(\sigma) = 1$ spricht man von einer *geraden Permutation* und bei $\operatorname{sgn}(\sigma) = -1$ von einer *ungeraden Permutation*.

Definition 3.10. Sei $M = \{1, \ldots, n\}$ und sei σ eine Permutation auf M. Dann heißt ein Indexpaar $i < j$ ein *Fehlstand*, wenn $\sigma(i) > \sigma(j)$ ist.

Lemma 3.11. *Sei $M = \{1, \ldots, n\}$ und sei σ eine Permutation auf M. Es sei $k = \#(F)$ die Anzahl der Fehlstände von σ. Dann ist das Signum von σ gleich*

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^k .$$

Beweis. Wir schreiben

$$\begin{aligned}
\operatorname{sgn}(\sigma) &= \prod_{i<j} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i} \\
&= \prod_{(i,j)\in F} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i} \prod_{(i,j)\notin F} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i} \\
&= (-1)^k \prod_{(i,j)\in F} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{j - i} \prod_{(i,j)\notin F} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i} \\
&= (-1)^k,
\end{aligned}$$

da nach dieser Umordnung sowohl im Zähler als auch im Nenner das Produkt aller positiven Differenzen steht. □

Beispiel 3.12. Wir betrachten die Permutation

x	1	2	3	4	5	6
$\sigma(x)$	2	4	6	5	3	1

mit der Zyklendarstellung

$$\langle 124536 \rangle .$$

Die Fehlstände sind

$$(1,6),\ (2,5),\ (2,6),\ (3,4),\ (3,5),\ (3,6),\ (4,5),\ (4,6),\ (5,6)\,,$$

also 9 Stück. Das Signum ist also $(-1)^9 = -1$ und die Permutation ist ungerade.

Satz 3.13. *Sei $M = \{1, \ldots, n\}$. Dann ist die Zuordnung*

$$S_n \longrightarrow \{1, -1\},\ \sigma \longmapsto \operatorname{sgn}(\sigma),$$

ein Gruppenhomomorphismus.

Beweis. Zunächst ist das Signum wirklich gleich 1 oder -1. Dies beruht darauf, dass sowohl im Zähler als auch im Nenner der Definition des Signums zu jedem Indexpaar $i \leq j$ die positive oder die negative Differenz $\pm(i-j)$ vorkommt.

Das Signum der Identität ist natürlich 1. Seien zwei Permutationen σ und τ gegeben. Dann ist

$$\begin{aligned}
\operatorname{sgn}(\sigma \circ \tau) &= \prod_{i<j} \frac{(\sigma\circ\tau)(j) - (\sigma\circ\tau)(i)}{j-i} \\
&= (\prod_{i<j} \frac{(\sigma\circ\tau)(j) - (\sigma\circ\tau)(i)}{\tau(j)-\tau(i)}) \prod_{i<j} \frac{\tau(j)-\tau(i)}{j-i} \\
&= (\prod_{i<j,\,\tau(i)<\tau(j)} \frac{\sigma(\tau(j)) - \sigma(\tau(i))}{\tau(j)-\tau(i)})(\prod_{i<j,\,\tau(i)>\tau(j)} \frac{\sigma(\tau(j)) - \sigma(\tau(i))}{\tau(j)-\tau(i)})\ \operatorname{sgn}(\tau) \\
&= (\prod_{i<j,\,\tau(i)<\tau(j)} \frac{\sigma(\tau(j)) - \sigma(\tau(i))}{\tau(j)-\tau(i)})(\prod_{i<j,\,\tau(i)>\tau(j)} \frac{\sigma(\tau(i)) - \sigma(\tau(j))}{\tau(i)-\tau(j)})\ \operatorname{sgn}(\tau) \\
&= \prod_{k<\ell} \frac{\sigma(\ell)-\sigma(k)}{\ell-k} \operatorname{sgn}(\tau) \\
&= \operatorname{sgn}(\sigma)\operatorname{sgn}(\tau).
\end{aligned}$$

□

Lemma 3.14. *Sei $M = \{1, \ldots, n\}$ und sei σ eine Permutation auf M. Es sei*

$$\sigma = \tau_1 \cdots \tau_r$$

geschrieben als ein Produkt von r Transpositionen. Dann gilt für das Signum die Darstellung

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^r .$$

Beweis. Die Transposition τ vertausche die beiden Zahlen $k < \ell$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\operatorname{sgn}(\tau) &= \prod_{i<j} \frac{\tau(j)-\tau(i)}{j-i} \\
&= \prod_{i,j\neq k,\ell} \frac{\tau(j)-\tau(i)}{j-i} \cdot \prod_{i=k, j\neq\ell} \frac{\tau(j)-\tau(i)}{j-i} \cdot \prod_{i\neq k, j=\ell} \frac{\tau(j)-\tau(i)}{j-i} \cdot \prod_{i=k,j=\ell} \frac{\tau(j)-\tau(i)}{j-i} \\
&= \prod_{j>k,\, j\neq\ell} \frac{j-\ell}{j-k} \cdot \prod_{i\neq k,\, i<\ell} \frac{k-i}{\ell-i} \cdot \frac{k-\ell}{\ell-k} \\
&= \prod_{j>\ell} \frac{j-\ell}{j-k} \cdot \prod_{i<k} \frac{k-i}{\ell-i} \cdot \prod_{k<j<\ell} \frac{j-\ell}{j-k} \cdot \prod_{k<i<\ell} \frac{k-i}{\ell-i} \cdot (-1)
\end{aligned}$$

$$= \quad -1.$$

Die letzte Gleichung ergibt sich daraus, dass im ersten und im zweiten Produkt alle Zähler und Nenner positiv sind und dass im dritten und im vierten Produkt die Zähler negativ und die Nenner positiv sind, so dass sich diese (wegen der gleichen Indexmenge) Minuszeichen wegkürzen.

Die Aussage folgt dann aus der Gruppeneigenschaft. □

Anhang 4: Hauptsatz über abelsche Gruppen

Satz 4.1. *Sei G eine endlich erzeugte kommutative Gruppe. Dann ist G das Produkt von zyklischen Gruppen. D.h. es gibt eine Isomorphie*

$$G \cong \mathbb{Z}^r \times \mathbb{Z}/(n_1) \times \cdots \times \mathbb{Z}/(n_s)\,.$$

Beweis. Für einen Beweis siehe Storch/Wiebe, Lineare Algebra, 8.C.12. □

Korollar 4.2. *Sei G eine endliche kommutative Gruppe. Dann ist G das Produkt von endlichen zyklischen Gruppen. D.h. es gibt eine Isomorphie*

$$G \cong \mathbb{Z}/(n_1) \times \cdots \times \mathbb{Z}/(n_s)\,.$$

Beweis. Dies folgt direkt aus Satz Anhang 4.1. □

In diesem Zusammenhang sollte auch der chinesische Restsatz erwähnt werden, der eine weitere Poduktzerlegung der zyklischen Gruppen erlaubt, wenn die Primfaktorzerlegung bekannt ist.

Satz 4.3. *Sei n eine positive natürliche Zahl mit kanonischer Primfaktorzerlegung $n = p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \cdots p_k^{r_k}$ (die p_i seien also verschieden und $r_i \geq 1$). Dann induzieren die kanonischen Ringhomomorphismen $\mathbb{Z}/(n) \to \mathbb{Z}/(p_i^{r_i})$ einen Isomorphismus*

$$\mathbb{Z}/(n) \cong \mathbb{Z}/(p_1^{r_1}) \times \mathbb{Z}/(p_2^{r_2}) \times \cdots \times \mathbb{Z}/(p_k^{r_k})\,.$$

Zu einer gegebenen ganzen Zahl $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ gibt es also genau eine natürliche Zahl $a < n$, die die simultanen Kongruenzen

$$a = a_1 \mod p_1^{r_1},\ a = a_2 \mod p_2^{r_2},\ \ldots,\ a = a_k \mod p_k^{r_k}$$

löst.

Beweis. Da die Ringe links und rechts beide endlich sind und die gleiche Anzahl von Elementen haben, nämlich n, genügt es, die Injektivität zu zeigen. Sei x eine natürliche Zahl, die im Produktring (rechts) zu null wird, also modulo $p_i^{r_i}$ den Rest null hat für alle $i = 1, 2, \ldots, k$. Dann ist x ein Vielfaches von $p_i^{r_i}$ für alle $i = 1, 2, \ldots, k$, d.h. in der Primfaktorzerlegung von x muss p_i zumindest mit Exponent r_i vorkommen. Also muss x

ein Vielfaches des Produktes sein muss, also ein Vielfaches von n. Damit ist $x = 0$ in $\mathbb{Z}/(n)$ und die Abbildung ist injektiv. □

Für die Einheitengruppe ergibt dies das folgende Korollar.

Korollar 4.4. *Sei n eine positive natürliche Zahl mit kanonischer Primfaktorzerlegung $n = p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \cdots p_k^{r_k}$ (die p_i seien also verschieden und $r_i \geq 1$). Dann gibt es einen kanonischen Gruppenisomorphismus*

$$(\mathbb{Z}/(n))^\times \cong (\mathbb{Z}/(p_1^{r_1}))^\times \times \cdots \times (\mathbb{Z}/(p_k^{r_k}))^\times .$$

Insbesondere ist eine Zahl a genau dann eine Einheit modulo n, wenn sie eine Einheit modulo $p_i^{r_i}$ ist für $i = 1, \ldots, k$.

Anhang 5: Gruppenoperationen

Es sei G eine multiplikativ geschriebene Gruppe mit neutralem Element e.

Definition 5.1. Es sei G eine Gruppe und M eine Menge. Eine Abbildung

$$G \times M \longrightarrow M,\ (g, x) \longmapsto gx,$$

heißt *Gruppenoperation* (von G auf M), wenn die beiden folgenden Eigenschaften gelten.

(1) $ex = x$ für alle $x \in M$.
(2) $(gh)x = g(hx)$ für alle $g, h \in G$ und für alle $x \in M$.

Man spricht auch von einer *Aktion* der Gruppe G auf M. Im Zusammenhang von Gruppenoperationen schreibt man die Gruppe zumeist multiplikativ, und ebenso schreibt man die Operation multiplikativ.

Definition 5.2. Es sei G eine Gruppe und M eine Menge. Eine Gruppenoperation von G auf M heißt *treu*, wenn aus $gx = x$ für alle $x \in M$ folgt, dass $g = e$ ist.

Lemma 5.3. *Es sei G eine Gruppe und M eine Menge. Es sei* $\mathrm{Perm}\,(M)$ *die Gruppe der Permutationen auf M. Dann gelten folgende Aussagen.*

(1) *Wenn G auf M operiert, so ist die Abbildung*

$$G \longrightarrow \mathrm{Perm}\,(M),\ g \longmapsto (x \mapsto gx),$$

ein Gruppenhomomorphismus.

(2) *Wenn umgekehrt ein Gruppenhomomorphismus*

$$\varphi : G \longrightarrow \mathrm{Perm}\,(M),$$

vorliegt, so wird durch

$$G \times M \longrightarrow M,\ (g, x) \longmapsto (\varphi(g))(x),$$

eine Gruppenoperation von G auf M definiert.

Beweis. Siehe Aufgabe *****. □

Unter dieser Korrespondenz ist die Operation genau dann treu, wenn φ injektiv ist.

Beispiel 5.4. Nach Lemma Anhang 5.3 und nach Lemma 4.4 ist eine Gruppenoperation von $(\mathbb{Z}, 0, +)$ auf einer Menge M dasselbe wie eine bijektive Abbildung

$$F : M \longrightarrow M,$$

wobei die 1 wie F wirkt. Bei gegebenem F ist also die Gruppenwirkung für $x \in M$ durch

$$n \cdot x = F^n(x)$$

definiert, wobei F^n bei $n \geq 0$ die n-fache Hintereinanderschaltung von F und bei $n < 0$ die $-n$-fache Hintereinanderschaltung der Umkehrabbildung F^{-1} bedeutet.

Definition 5.5. Es liege eine Gruppenoperation einer Gruppe G auf einer Menge M vor. Man nennt zwei Elemente $x, y \in M$ *G-äquivalent* (oder äquivalent unter G), wenn es ein $g \in G$ gibt mit $y = gx$.

Diese Relation ist in der Tat eine Äquivalenzrelation, wie man sich direkt überlegen kann. Die Äquivalenzklassen bekommen einen eigenen Namen.

Definition 5.6. Es liege eine Gruppenoperation einer Gruppe G auf einer Menge M vor. Die Äquivalenzklassen auf M zur G-Äquivalenz nennt man die *Bahnen der Operation*.

Definition 5.7. Es liege eine Gruppenoperation einer Gruppe G auf einer Menge M vor. Zu $x \in M$ heißt

$$G_x = \{g \in G | \, gx = x\}$$

die *Isotropiegruppe* zu x.

Dabei handelt es sich um eine Untergruppe von G. Andere Bezeichnungen hierfür sind *Standgruppe* oder *Stabilisator*.

Definition 5.8. Es liege eine Gruppenoperation einer Gruppe G auf einer Menge M vor. Ein Punkt $x \in M$ heißt *Fixpunkt der Operation*, wenn $gx = g$ ist für alle $g \in G$.

Ein Element $x \in M$ ist genau dann ein Fixpunkt der Operation, wenn die Bahn durch diesen Punkt einelementig ist, und dies ist genau dann der Fall, wenn die zugehörige Standgruppe ganz G ist.

Beispiel 5.9. Es sei G eine Gruppe und M eine Menge. Dann gibt es stets die sogenannte *triviale Operation* von G auf M, die durch $gx = x$ für alle $g \in G$ und alle $x \in M$ gegeben ist. In diesem Fall ist jeder Punkt ein Fixpunkt und alle Bahnen sind einelementig.

Beispiel 5.10. Sei G eine Gruppe. Die Verknüpfung

$$G \times G \longrightarrow G, \, (g, h) \longmapsto gh,$$

kann man als eine Gruppenoperation der Gruppe G auf sich selbst ansehen. Diese Operation ist treu und es gibt nur eine Bahn. Für zwei Elemente g_1 und g_2 ist ja $g_1 = (g_1 g_2^{-1}) g_2$.

Beispiel 5.11. Sei G eine Gruppe und $H \subseteq G$ eine Untergruppe. Dann liefert die Verknüpfung

$$H \times G \longrightarrow G,\, (h,g) \longmapsto hg,$$

eine Gruppenoperation von H auf G. Die Bahnen dieser Operation stimmen mit den Rechtsnebenklassen zu dieser Untergruppe überein. Wenn G endlich ist, so sind die Bahnen alle gleichmächtig, was bei einer beliebigen Gruppenoperation keineswegs sein muss.

Beispiel 5.12. Sei $n \in \mathbb{N}$, $M = \{1, \ldots, n\}$ und S_n die Gruppe der Permutationen auf M. Dann liegt eine natürliche Operation

$$S_n \times M \longrightarrow M,\, (\sigma, i) \longmapsto \sigma(i),$$

vor. Der zugehörige Gruppenhomomorphismus ist die Identität. Die Operation ist treu, da jede Permutation $\neq \mathrm{id}_M$ mindestens ein Element aus M bewegt. Zu jedem $i \in M$ ist die Isotropiegruppe G_i isomorph zur Permutationsgruppe $S_{n-1} \cong \mathrm{Perm}\,(M \setminus \{i\})$. Für je zwei Elemente $i, j \in M$ gibt es eine Permutation (z.B. eine Transposition), die i in j überführt. Bei dieser Gruppenoperation gibt es also nur eine Bahn.

Beispiel 5.13. Es sei R ein kommutativer Ring und $G = R^\times$ seine Einheitengruppe. Die Einschränkung der Ringmultiplikation

$$R^\times \times R \longrightarrow R,\, (r,s) \longmapsto rs,$$

liefert eine Gruppenoperation der Einheitengruppe auf dem Ring. Diese Operation ist treu, das Nullelement ist ein Fixpunkt der Operation. Zwei Elemente $a, b \in R$, die bzgl. dieser Operation äquivalent sind, heißen assoziiert. Dieser Begriff spielt bei der eindeutigen Primfaktorzerlegung in einem faktoriellen Bereich eine wichtige Rolle.

Satz 5.14. *Es sei G eine endliche Gruppe, die auf einer endlichen Menge M operiere. Es sei F die Menge der Fixpunkte der Operation und es seien $G_1, \ldots, G_n$ die verschiedenen Bahnen mit mindestens zwei Elementen. Dann ist*

$$\#(M) \;=\; \#(F) + \sum_{i=1}^{n} \#(G_i).$$

Beweis. Die Menge M ist zerlegt in die Bahnen der Operation, und diese sind entweder einelementig und entsprechen den Fixpunkten, oder mehrelementig, und werden dann rechts mitgezählt. □

Beispiel 5.15. Sei G eine Gruppe. Die Konjugation kann man als eine Operation von G auf sich selbst auffassen, indem man

$$g \cdot x = gxg^{-1}$$

setzt. Dabei haben wir die Gruppenverknüpfung symbolfrei und die Operation zur Unterscheidung mit $\cdot$ geschrieben. Dass eine Operation vorliegt kann man direkt nachprüfen oder aus Lemma 5.2 folgern. Die Äquivalenzklassen

unter dieser Operation, also die Bahnen der Konjugation, heißen *Konjugationsklassen*. Die Elemente im Zentrum der Gruppe sind genau die Fixpunkte.

Definition 5.16. Es liege eine Gruppenoperation einer Gruppe G auf einer Menge M vor. Dann nennt man die Menge der Bahnen den *Bahnenraum* der Operation. Er wird mit

$$M\backslash G$$

bezeichnet. Die Abbildung

$$M \longrightarrow M\backslash G,\, x \longmapsto [x],$$

wobei $[x]$ die Bahn durch x bezeichnet, heißt *Quotientenabbildung*.

Der Bahnenraum ist also einfach die Quotientenmenge der Äquivalenzrelation, die durch die Gruppenoperation festgelegt wird, und die angegebene Quotientenabbildung ist die zugehörige kanonische Projektion.

Beispiel 5.17. Es sei M eine Menge und

$$F : M \longrightarrow M$$

eine bijektive Abbildung mit der zugehörigen Gruppenoperation von $\mathbb{Z}$ auf M. Die Operation ist genau dann trivial, wenn F die Identität ist. Die Fixpunkte der Operation sind genau die Fixpunkte von F. Die Isotropiegruppe zu $x \in M$ ist $\mathbb{Z}k$ ($k \geq 1$), falls x ein Fixpunkt der k-ten Hintereinanderschaltung F^k und k minimal mit dieser Eigenschaft ist; andernfalls ist sie gleich 0. Die durch $x \in M$ definierte Bahn besteht aus

$$\{F^n(x) |\, n \in \mathbb{Z}\}\,.$$

Dabei können natürlich einzelne Bahnen endlich sein, auch wenn die Operation nicht treu ist.

Beispiel 5.18. Wir betrachten die n-dimensionale Sphäre

$$S = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} |\ ||\, x\, ||= 1\}$$

und die antipodale Abbildung

$$\alpha : S \longrightarrow S,\, x \longmapsto -x,$$

die also jeden Punkt auf seinen gegenüberliegenden Punkt abbildet. Wegen $\alpha \circ \alpha = \mathrm{id}_S$ gibt dies Anlass zu einer Operation von $G = \{1, -1\} \cong \mathbb{Z}/(2)$ auf der Sphäre S, bei der 1 durch die Identität und -1 durch α operiert. Diese Operation ist treu und jede Bahn ist zweielementig von der Form $\{x, -x\}$. Insbesondere besitzt die Operation keinen Fixpunkt. Der Bahnenraum (versehen mit einer geeigneten Topologie) heißt n-dimensionaler *reell-projektiver Raum*.

Definition 5.19. Sei G eine Gruppe und seien M und N zwei Mengen, auf denen jeweils G operiert. Dann heißt eine Abbildung

$$\varphi : M \longrightarrow N$$

G-invariant, wenn für alle $g \in G$ und alle $x \in M$ die Gleichheit

$$\varphi(gx) = g\varphi(x)$$

gilt.

Dieser Begriff wird insbesondere dann verwendet, wenn die Gruppe G auf der zweiten Menge N trivial operiert.

Lemma 5.20. *Es liege eine Gruppenoperation einer Gruppe G auf einer Menge M vor. Es sei $M\backslash G$ der Bahnenraum zu dieser Operation. Dann gelten folgende Aussagen.*

(1) *Die Quotientenabbildung*

$$q : M \longrightarrow M\backslash G,\ x \longmapsto [x],$$

ist G-invariant (wobei G auf dem Bahnenraum trivial operiert).

(2) *Wenn N eine weitere Menge ist und*

$$\psi : M \longrightarrow N$$

eine G-invariante Abbildung (wobei die Operation von G auf N trivial sei), so gibt es genau eine Abbildung

$$\tilde{\varphi} : M\backslash G \longrightarrow N$$

mit $\varphi = \tilde{\varphi} \circ q$.

Beweis. (1) Für $x \in M$ und $g \in G$ sind x und gx in der gleichen Äquivalenzklasse, also ist

$$q(gx) = [gx] = [x] = g[x].$$

(2) folgt aus Lemma 6.17 (Einführung in die Algebra (Osnabrück 2009)) (5).

□

Beispiel 5.21. Es sei X eine Menge und $n \in \mathbb{N}_+$. Wir setzen

$$M = X \times \cdots \times X$$

mit n Faktoren. Die Permutationsgruppe S_n operiert auf M durch

$$\sigma(x_1, \ldots, x_n) = (x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}),$$

d.h. σ vertauscht die Indizes. Die Fixpunkte dieser Operation sind genau die Diagonalelemente, also die Elemente der Form $(y, \ldots, y)$. Wenn r die Anzahl der verschiedenen Elemente in $x = (x_1, \ldots, x_n)$ bezeichnet und a_i, $1 \leq i \leq r$ die Anzahl angibt, wie oft die einzelnen Werte auftreten, so ist die Isotropiegruppe zu x gleich $S_{a_1} \times \cdots \times S_{a_r}$ (das sind diejenigen Permutationen, die einen jeden Index auf einen Index mit gleichem Eintrag abbilden) und besitzt genau $a_1! \cdots a_r!$ Elemente. Die zugehörige Bahn besitzt entsprechend $\frac{n!}{(a_1! \cdots a_r!)}$ Elemente.

Bei $X = \mathbb{R}$ sind die polynomialen Funktionen $x_1 + \ldots + x_n$, $\sum_{i<j} x_i x_j$, $x_1 \cdots x_n$ u.s.w. S_n-invariante Abbildungen nach $\mathbb{R}$.

Beispiel 5.22. Es liege eine Gruppenoperation einer Gruppe G auf einer Menge M vor. Es sei L eine weitere Menge und $\mathrm{Abb}\,(L, M)$ die Menge der Abbildungen von L nach M. Dann wird durch

$$G \times \mathrm{Abb}\,(L, M) \longrightarrow \mathrm{Abb}\,(L, M),\ (g, \varphi) \longmapsto g\varphi,$$

wobei $g\varphi$ durch

$$(g\varphi)(x) = g(\varphi(x))$$

definiert sei, eine Operation von G auf $\mathrm{Abb}\,(L, M)$ gegeben. Für das neutrale Element $e \in G$ gilt ja

$$(e\varphi)(x) \;=\; e(\varphi(x)) \;=\; \varphi(x)$$

für jedes $x \in M$, also $e\varphi \;=\; \varphi$, und für beliebige $g, h \in G$, $\varphi \in \mathrm{Abb}\,(L, M)$ und $x \in M$ gilt

$$((gh)\varphi)(x) \;=\; (gh)(\varphi(x)) \;=\; g(h(\varphi(x))) \;=\; g((h\varphi)(x)) \;=\; (g(h\varphi))(x),$$

also $(gh)\varphi \;=\; g(h\varphi)$.

Zu einer Gruppe G nennt man die Menge G mit der durch

$$g \cdot_{\mathrm{op}} h := hg$$

definierten Verknüpfung die *oppositionelle Gruppe* zu G.

Beispiel 5.23. Es liege eine Gruppenoperation einer Gruppe G auf einer Menge M vor. Es sei N eine weitere Menge und $\mathrm{Abb}\,(M, N)$ die Menge der Abbildungen von M nach N. Dann wird durch

$$G^{\mathrm{op}} \times \mathrm{Abb}\,(M, N) \longrightarrow \mathrm{Abb}\,(M, N),\ (g, \varphi) \longmapsto g\varphi,$$

wobei $g\varphi$ durch

$$(g\varphi)(x) = (\varphi(gx))$$

definiert sei, eine Operation der oppositionellen Gruppe G^{op} auf $\mathrm{Abb}\,(M, N)$ gegeben. Für das neutrale Element $e \in G$ gilt ja

$$(e\varphi)(x) \;=\; \varphi(ex) \;=\; \varphi(x)$$

für jedes $x \in M$, also $e\varphi \;=\; \varphi$, und für beliebige $g, h \in G$, $\varphi \in \mathrm{Abb}\,(M, N)$ und $x \in M$ gilt

$$((g \cdot_{\mathrm{op}} h)\varphi)(x) \;=\; ((hg)\varphi)(x) \;=\; \varphi((hg)(x)) \;=\; \varphi(h(gx)) \;=\; (h\varphi)(gx) \;=\; (g(h\varphi))(x),$$

also $(g \cdot_{\mathrm{op}} h)\varphi \;=\; g(h\varphi)$. Statt mit der oppositionellen Gruppe zu arbeiten kann man diese Konstruktion auch als eine Operation von rechts auffassen.

Die Fixelemente von $\mathrm{Abb}\,(M, N)$ unter dieser Operation sind gerade die G-invarianten Abbildungen von M nach N. Diese Konstruktion wird insbesondere bei $N = \mathbb{R}$ o.Ä. angewendet, wenn es also um auf M definierte Funktionen geht.

Anhang 6: Separabler Abschluss

Separable und rein-inseparable Elemente

Lemma 6.1. *Es sei K ein Körper der positiven Charakteristik $p > 0$ und sei $F \in K[X]$ ein irreduzibles Polynom. Dann gibt es ein irreduzibles und separables Polynom $G \in K[X]$ mit $F = G(X^{p^e})$ für ein geeignetes $e \in \mathbb{N}$.*

Beweis. Da F irreduzibel ist, ist der Grad von F mindestens 1. Es sei e der maximale Exponent derart, dass man $F = G(X^{p^e})$ mit einem Polynom $G \in K[X]$ schreiben kann. Dies muss es geben, da G nicht konstant ist und daher der Grad von $G(X^{p^e})$ mindestens so groß wie p^e ist. Das Polynom G ist ebenfalls irreduzibel, da eine Zerlegung davon sofort zu einer Zerlegung von F führt. Wegen der Maximalität von e ist $G \notin K[X^p]$. Daher ist $G' \neq 0$ und somit ist G' teilerfremd zum irreduziblen Polynom G. Also ist G nach Fakt separabel. □

Definition 6.2. Sei $K \subseteq L$ eine Körpererweiterung. Ein Element $x \in L$ heißt *separabel*, wenn x algebraisch über K ist, und sein Minimalpolynom separabel ist.

Definition 6.3. Sei $K \subseteq L$ eine Körpererweiterung. Ein Element $x \in L$ heißt *rein-inseparabel*, wenn x algebraisch ist und sein Minimalpolynom F in jedem Erweiterungskörper nur eine Nullstelle besitzt.

Ein Element $x \in L$, das zu K gehört, ist gemäß dieser Definition rein-inseparabel; sein Minimalpolynom ist ja $X - x$. In Charakteristik 0 sind dies auch schon die einzigen rein-inseparablen Elemente. In positiver Charakteristik kann man die folgende Charakterisierung angeben.

Lemma 6.4. *Es sei K ein Körper der positiven Charakteristik $p > 0$, es sei $K \subseteq L$ eine Körpererweiterung und $x \in L$ ein über K algebraisches Element. Dann ist x genau dann rein-inseparabel, wenn $x^{p^e} \in K$ ist für ein $e \in \mathbb{N}$.*

Beweis. Es sei $x^{p^e} = y \in K$. Dann ist $X^{p^e} - y = (X - x)^{p^e} \in K[X]$ ein Polynom, das x annuliert. Dieses Polynom besitzt über $K(x)$ die einzige Nullstelle x, so dass dies auch für das Minimalpolynom von x über K gilt, und zwar auch in jedem Erweiterungskörper. Also ist x rein-inseparabel. Sei nun x rein-inseparabel, mit dem Minimalpolynom $F \in K[X]$. Nach Fakt gibt es ein irreduzibles separables Polynom $G \in K[X]$ und ein $e \in \mathbb{N}$ mit $F = G(X^{p^e})$. Sei d der Grad von G. Es sei $K \subseteq M$ der Zerfällungskörper von G und $G = (X - a_1) \cdots (X - a_d)$ die Faktorzerlegung von G über M. Wegen der Separabilität von G sind diese Nullstellen verschieden. Bei $d > 1$ hätte auch F verschiedene Nullstellen (in einem geeigneten Erweiterungskörper $M \subseteq M'$). Also ist $d = 1$ und somit ist $F = X^{p^e} - y$ mit einem $y \in K$. □

Definition 6.5. Eine Körpererweiterung $K \subseteq L$ heißt *rein-inseparabel*, wenn jedes Element $x \in L$ rein-inseparabel über K ist.

Lemma 6.6. *Sei $K \subseteq L$ eine Körpererweiterung und es sei $x \in L$ ein Element, das sowohl separabel als auch rein-separabel über K ist. Dann ist $x \in K$.*

Beweis. Es sei $F \in K[X]$ das Minimalpolynom von x. Dann besitzt F wegen der Separabilität in jedem Erweiterungskörper nur einfache Nullstellen, aber wegen der reinen Inseparabilität überhaupt nur eine Nullstelle. Also besitzt F den Grad 1 und somit ist $x \in K$. □

Definition 6.7. Sei $K \subseteq L$ eine Körpererweiterung. Unter dem *separablen Abschluss* (von K in L) versteht man die Teilmenge $S \subseteq L$, die aus allen über K separablen Elementen aus L besteht.

Lemma 6.8. *Sei $K \subseteq L$ eine Körpererweiterung und es sei S, $K \subseteq S \subseteq L$, der separable Abschluss von K in L. Dann gelten folgende Aussagen.*

(1) *S ist ein Körper.*
(2) *Die Körpererweiterung $K \subseteq L$ ist separabel.*
(3) *Der separable Abschluss von S in L ist gleich S.*

Beweis. (1). Für zwei Elemente $x, y \in S$ ist $K[x, y] (\subseteq L)$ eine über K nach Fakt eine endliche und nach Fakt separable Körpererweiterung. Also ist $K[x, y] \subseteq S$ und S ist ein Unterring. Für $x \neq 0$ ist auch $x^{-1} \in K[x, y]$, so dass ein Körper vorliegt. (1) ist klar. (3). Sei $x \in L$ separabel über S. Dann ist x auch separabel über einem Körper M, $K \subseteq M \subseteq S$, der endlich über K ist. Daher ist x algebraisch über K. Es sei F das Minimalpolynom von x über K, das nach Fakt die Gestalt

$$F = G(X^q)$$

mit $q = p^e$ und einem irreduziblen separablen Polynom $G \in K[X]$. Für

$$y = x^q$$

ist G ein separables annullierendes Polynom, so dass $y \in S$ ist. Daher wird x von $X^q - y \in S[X]$ annulliert, so dass x auch rein-inseparabel über S ist. Daher ist $e = 0$ und $x = y \in S$. □

Satz 6.9. *Eine endliche Körpererweiterung ist genau dann étale, wenn sie separabel ist.*

Beweis. Sei zunächst $K \subseteq L$ separabel und $x \in L$. Das Minimalpolynom $F \in K[X]$ von x ist separabel, daher ist nach Fakt $F'(x) \neq 0$. Somit folgt aus

$$0 = dF(x) = F'(x)dx,$$

dass

$$dx = 0$$

ist. Sei nun umgekehrt $\Omega_{L|K} = 0$ vorausgesetzt. Wir verwenden den separablen Abschluss $K \subseteq S \subseteq L$ und müssen $S = L$ zeigen. Wir nehmen an, dass $S \neq L$ ist. Dann gibt es eine Kette

$$S \subseteq S(x_1) \subseteq S(x_1, x_2) \subseteq \ldots \subseteq S(x_1, \ldots, x_n) = L\,,$$

wobei wir $M = S(x_1, \ldots, x_{n-1}) \neq L$ annehmen können. Da $S \subseteq L$ rein-inseparabel ist, ist auch $M \subseteq L = M(x_n)$ rein-inseparabel. Daher ist das Minimalpolynom von x_n über M gleich $X^q - a$ mit $a \in M$ und $q = p^e$ mit $e \geq 1$. Also ist $L = M[X]/(X^q - a)$ und daher ist

$$\Omega_{L|M} \;\cong\; LdX/(X^q - a)'dX \;\cong\; LdX \;\neq\; 0$$

nach Fakt. Daher ist auch $\Omega_{L|K} \neq 0$ aufgrund von Fakt im Widerspruch zur Voraussetzung. □

Anhang 7: Diagonalisierbarkeit

Satz 7.1. *Es sei K ein Körper und es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei*

$$\varphi : V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(1) *φ ist diagonalisierbar.*
(2) *Das charakteristische Polynom χ_φ zerfällt in Linearfaktoren und für jede Nullstelle λ stimmt die algebraische Vielfachheit μ_λ mit der geometrischen Vielfachheit $\dim(\mathrm{Eig}_\lambda(\varphi))$ überein.*
(3) *Das Minimalpolynom P zu φ zerfällt in Linearfaktoren, die alle einfach sind.*

Definition 7.2. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Man sagt, dass die linearen Abbildungen

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_n : V \longrightarrow V$$

simultan diagonalisierbar sind, wenn es eine Basis v_i, $i \in I$, von V gibt, so dass jedes v_i für jedes φ_j ein Eigenvektor ist.

Korollar 7.3. *Es sei K ein Körper und es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei*

$$\varphi : V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung mit $\varphi^n = \mathrm{id}_V$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Es sei vorausgesetzt, dass K eine n-te primitive Einheitswurzel enthält. Dann ist φ diagonalisierbar.

Beweis. Nach der Voraussetzung an φ ist das Minimalpolynom von φ ein Teiler von $X^n - 1$. Nach der Voraussetzung an den Körper besitzt dieses Polynom n verschiedene Nullstellen. Daher zerfällt das Minimalpolynom in einfache Linearfaktoren. Nach Satz Anhang 7.1 ist somit φ diagonalisierbar. □

Satz 7.4. *Es sei K ein Körper und V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es seien*

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_n : V \longrightarrow V$$

lineare Abbildungen, die alle diagonalisierbar seien. Dann sind diese linearen Abbildungen genau dann simultan diagonaliserbar, wenn sie paarweise vertauschbar sind.

Anhang A: Bildlizenzen

Die Bilder dieses Textes stammen aus Commons (also http://commons.wikimedia.org), und stehen unter unterschiedlichen Lizenzen, die zwar alle die Verwendung hier erlauben, aber unterschiedliche Bedingungen an die Verwendung und Weitergabe stellen. Es folgt eine Auflistung der verwendeten Bilder dieses Textes (nach der Seitenzahl geordnet, von links nach rechts, von oben nach unten) zusammen mit ihren Quellen, Urhebern (Autoren) und Lizenzen. Dabei ist *Quelle* so zu verstehen, dass sich, wenn man

http://commons.wikimedia.org/wiki/File:

unmittelbar davor setzt, die entsprechende Datei auf Commons ergibt. *Autor* benennt den Urheber des Werkes, falls dieser bekannt ist. *Benutzer* meint den Hochlader der Datei; wenn keine weitere Information über den Autor vorliegt, so gilt der Benutzer als Urheber. Die Angabe des Benutzernamen ist so zu verstehen, dass sich, wenn man

http://commons.wikimedia.org/wiki/User:

unmittelbar davor setzt, die Benutzerseite ergibt. Wenn das Bild ursprünglich in einem anderen Wikimedia-Projekt hochgeladen wurde, so wird die Domäne (bspw. *de.wikipedia.org*) explizit angegeben.

Die *Lizenz* ist die auf der Dateiseite auf Commons angegebene Lizenz. Dabei bedeuten

- GFDL: Gnu Free Documentation License (siehe den angehängten Text, falls diese Lizenz vorkommt)
- CC-BY-SA-2.5 (3.0): Creative Commons Attribution ShareAlike 2.5 (oder 3.0)
- PD: gemeinfrei (public domain)

Abbildungsverzeichnis

Quelle = Pentagon construct.gif, Autor = TokyoJunkie (= Benutzer Mosmas auf PD), Lizenz = en.wikipedia.org 123

Quelle = Pie 2.svg, Autor = Benutzer Cronholm 144 auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0 126

Quelle = Cake quarters.svg, Autor = Benutzer Acdx, R. S. Shaw auf Commons, Lizenz = PD 126

Quelle = Luxembourg Vianden Nut-fair 10.jpg, Autor = Benutzer PlayMistyForMe auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0 126

Quelle = Polynomialdeg5.svg, Autor = Benutzer Geek3 auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0 207

Quelle = Composicion de permutaciones.svg, Autor = Benutzer Drini auf Commons, Lizenz = CC-by-SA 3.0 212