Mathematik für Anwender I

Prof. Dr. Holger Brenner
Universität Osnabrück
Fachbereich Mathematik/Informatik

Wintersemester 2011/2012

INHALTSVERZEICHNIS

Vorwort

Dieses Skript gibt die Vorlesung Mathematik für Anwender I wieder, die ich im Wintersemester 2011/2012 an der Universität Osnabrück gehalten habe. Ich habe diese Veranstaltung in dieser Form zum ersten Mal durchgeführt, bei einem zweiten Durchlauf würden sicher noch viele Korrekturen und Änderungen dazukommen. Dies bitte ich bei einer kritischen Durchsicht wohlwollend zu berücksichtigen.

Der Text wurde auf Wikiversity geschrieben und steht unter der Creative-Commons-Attribution-ShareAlike 3.0. Die Bilder wurden von Commons übernommen und unterliegen den dortigen freien Lizenzen. In einem Anhang werden die einzelnen Bilder mit ihren Autoren und Lizenzen aufgeführt. Die CC-BY-SA 3.0 Lizenz ermöglicht es, dass das Skript in seinen Einzelteilen verwendet, verändert und weiterentwickelt werden darf. Ich bedanke mich bei der Wikimedia-Gemeinschaft und insbesondere bei Benutzer Exxu für die wichtigen Beiträge im Projekt semantische Vorlagen, die eine weitgehend automatische Erstellung des Latexcodes ermöglichen.

Ich bedanke mich bei Herrn Daniel Brinkmann für Korrekturen und die Koordination des Übungsbetriebs, ferner bei den Übungsgruppenleitern Georg Biedermann, Daniel Brinkmann, Alessio Caminata, Julio Moyano und bei den Tutoren Danny Gomez-Ramirez, Linda Kock, Henning Mähr, Attila Meeßen, Michael Robben, Kristina Volk, Sebastian Voß für die hervorragende Mitarbeit bei der Veranstaltung. Bei Frau Marianne Gausmann bedanke ich mich für die Erstellung der Pdf-Files und bei den Studierenden für einzelne Korrekturen. Bei Jonathan Steinbuch bedanke ich mich für Verlinkungen und Korrekturen.

Holger Brenner

Vorlesungen

1. Vorlesung

1.1. **Zahlen.**

Wir arbeiten mit den folgenden Mengen, deren Kenntnis wir voraussetzen.

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\},$$

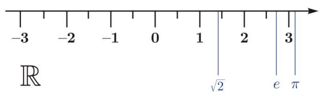
die Menge der *natürlichen Zahlen* (mit der 0).

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\},$$

die Menge der *ganzen Zahlen*.

$$\mathbb{Q} = \{a/b|\, a \in \mathbb{Z},\, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\},$$

die Menge der *rationalen Zahlen* und die Menge der *reellen Zahlen* $\mathbb{R}$.



Diese Mengen sind mit den natürlichen Operationen wie Addition und Multiplikation versehen, an deren Eigenschaften wir bald erinnern werden. Die reellen Zahlen stellen wir uns als die Punkte einer Geraden vor, auf der sich auch die zuvor genannten Zahlenmengen befinden. Zugleich kann man $\mathbb{R}$ als die Menge aller (vor dem Komma endlichen, nach dem Komma eventuell unendlichen) Ziffernfolgen auffassen. Wir werden im Laufe der Vorlesung alle entscheidenden Eigenschaften der reellen Zahlen kennenlernen (die sogenannten *Axiome* der reellen Zahlen, aus denen man alle anderen Eigenschaften logisch herleiten kann) und dann auch diese vorläufigen Sichtweisen präzisieren.

1.2. **Induktion.**

Mathematische Aussagen, die von natürlichen Zahlen abhängen, können mit dem Beweisprinzip der *vollständigen Induktion* bewiesen werden. Die folgende Aussage begründet dieses Prinzip.

Satz 1.1. *Für jede natürliche Zahl n sei eine Aussage $A(n)$ gegeben. Es gelte*

(1) *$A(0)$ ist wahr.*
(2) *Für alle n gilt: wenn $A(n)$ gilt, so ist auch $A(n+1)$ wahr.*

Dann gilt $A(n)$ für alle n.

Beweis. Es sei

$$M = \{n \in \mathbb{N} |\, A(n) \text{ ist wahr}\}\,.$$

Wir wollen zeigen, dass $M = \mathbb{N}$ ist, denn genau dies bedeutet, dass die Aussage für alle n gilt. Nach der ersten Bedingung ist

$$0 \in M\,.$$

Nach der zweiten Voraussetzung gilt für M, dass aus $n \in M$ stets $n+1 \in M$ folgt. Damit enthält M die 0, daher die 1, daher die 2, usw., und damit überhaupt alle natürlichen Zahlen. □

Der Nachweis von $A(0)$ heißt dabei der *Induktionsanfang* und der Schluss von $A(n)$ auf $A(n+1)$ heißt der *Induktionsschluss*. In manchen Situationen ist die Aussage $A(n)$ erst für $n \geq n_0$ für ein gewisses n_0 (definiert oder) wahr. Dann beweist man im Induktionsanfang die Aussage $A(n_0)$ und den Induktionsschluss führt man für $n \geq n_0$ durch.

Das folgende Standardbeispiel für einen Induktionsbeweis verwendet das Summenzeichen. Für gegebene reelle Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ bedeutet

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \;:=\; a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n.$$

Dabei hängen im Allgemeinen die a_k in einer formelhaften Weise von k ab. Entsprechend ist das Produktzeichen definiert, nämlich

$$\prod_{k=1}^{n} a_k \;:=\; a_1 \cdot a_2 \cdots a_{n-1} \cdot a_n.$$

Aufgabe 1.2. Beweise durch Induktion die folgende Formel.

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}\,.$$

Lösung

Beim Induktionsanfang ist $n = 1$, daher besteht die Summe links nur aus einem Summanden, nämlich der 1, und daher ist die Summe 1. Die rechte Seite ist $\frac{1 \cdot 2}{2} = 1$, so dass die Formel für $n = 1$ stimmt.

Für den Induktionsschritt setzen wir voraus, dass die Formel für ein n gilt, und müssen zeigen, dass sie auch für $n+1$ gilt. Dabei ist n beliebig. Es ist

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k &= \left(\sum_{k=1}^{n} k\right) + n + 1 \\
&= \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 \\
&= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2}
\end{aligned}$$

$$= \frac{(n+2)(n+1)}{2}.$$

Dabei haben wir für die zweite Gleichheit die Induktionsvoraussetzung verwendet. Der zuletzt erhaltene Term ist die rechte Seite der Formel für $n+1$, also ist die Formel bewiesen.

1.3. **Mengen.**

Georg Cantor (1845-1918) ist der Schöpfer der Mengentheorie.

David Hilbert (1862-1943) nannte sie ein *Paradies*, aus dem die Mathematiker nie mehr vertrieben werden dürfen.

Mathematische Strukturen, wie die eingangs erwähnten Zahlen, werden als Mengen beschrieben. Eine *Menge* ist eine Ansammlung von wohlunterschiedenen Objekten, die die *Elemente* der Menge heißen. Mit „wohlunterschieden" meint man, dass es klar ist, welche Objekte als gleich und welche als verschieden angesehen werden. Die *Zugehörigkeit* eines Elementes x zu einer Menge M wird durch

$$x \in M$$

ausgedrückt, die Nichtzugehörigkeit durch

$$x \notin M .$$

Für jedes Element(symbol) gilt stets genau eine dieser zwei Möglichkeiten.

Für Mengen gilt das *Extensionalitätsprinzip*, d.h. eine Menge ist durch die in ihr enthaltenen Elemente eindeutig bestimmt, darüber hinaus bietet sie keine Information. Insbesondere stimmen zwei Mengen überein, wenn beide die gleichen Elemente enthalten.

Die Menge, die kein Element besitzt, heißt *leere Menge* und wird mit

$$\emptyset$$

bezeichnet.

Eine Menge N heißt *Teilmenge* einer Menge M, wenn jedes Element aus N auch zu M gehört. Man schreibt dafür

$$N \subseteq M$$

(manche schreiben dafür $N \subset M$). Man sagt dafür auch, dass eine *Inklusion* $N \subseteq M$ vorliegt. Für die oben erwähnten Zahlenmengen gelten die Inklusionen

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}.$$

Im Nachweis, dass $N \subseteq M$ ist, muss man zeigen, dass für ein beliebiges Element $x \in N$ ebenfalls die Beziehung $x \in M$ gilt. Dabei darf man lediglich die Eigenschaft $x \in N$ verwenden.

Für uns werden Mengen hauptsächlich Zahlenmengen sein.

1.4. **Mengenoperationen.**

Es gibt mehrere Möglichkeiten, aus gegebenen Mengen neue Mengen zu bilden. Die wichtigsten sind die folgenden.

- *Vereinigung*

$$A \cup B := \{x | \, x \in A \text{ oder } x \in B\} ,$$

- *Durchschnitt*

$$A \cap B := \{x | \, x \in A \text{ und } x \in B\} ,$$

- *Differenzmenge*

$$A \setminus B := \{x | \, x \in A \text{ und } x \notin B\} .$$

Diese Operationen ergeben nur dann einen Sinn, wenn die beteiligten Mengen als Teilmengen in einer gemeinsamen Grundmenge gegeben sind. Dies sichert, dass man über die gleichen Elemente spricht. Häufig wird diese Grundmenge nicht explizit angegeben, dann muss man sie aus dem Kontext erschließen. Ein Spezialfall der Differenzmenge bei einer gegebenen Grundmenge G ist das *Komplement* einer Teilmenge $A \subseteq G$, das durch

$$\complement A := G \setminus A = \{x \in G |\, x \notin A\}$$

definiert ist. Wenn zwei Mengen einen leeren Schnitt haben, also $A \cap B = \emptyset$ gilt, so nennen wir sie *disjunkt*.

1.5. **Produktmenge.**

Wir wollen die Rechenoperationen auf den oben erwähnten Zahlenmengen, insbesondere die Addition und die Multiplikation, mengentheoretisch erfassen. Bei der Addition (beispielsweise auf $\mathbb{N}$) wird zwei natürlichen Zahlen a und b eine weitere natürliche Zahl, nämlich $a+b$, zugeordnet. Die Menge der Paare nennt man Produktmenge und die Zuordnung führt zum Begriff der Abbildung.

Wir definieren.[1]

Definition 1.3. Es seien zwei Mengen L und M gegeben. Dann nennt man die Menge

$$L \times M = \{(x, y) |\, x \in L,\, y \in M\}$$

die *Produktmenge* der beiden Mengen.

Die Elemente der Produktmenge nennt man *Paare* und schreibt (x, y). Dabei kommt es wesentlich auf die Reihenfolge an. Die Produktmenge besteht also aus allen Paarkombinationen, wo in der ersten *Komponenten* ein Element der ersten Menge und in der zweiten Komponenten ein Element der zweiten Menge steht. Zwei Paare sind genau dann gleich, wenn sie in beiden Komponenten gleich sind.

Wenn eine der beiden Mengen leer ist, so ist auch die Produktmenge leer. Wenn die beiden Mengen *endlich* sind, und es in der ersten Menge n Elemente und in der zweiten Menge k Elemente gibt, so gibt es in der Produktmenge $n \cdot$

[1]Definitionen werden in der Mathematik zumeist als solche deutlich herausgestellt und bekommen eine Nummer, damit man auf sie einfach Bezug nehmen kann. Es wird eine Situation beschrieben, bei der die verwendeten Begriffe schon zuvor definiert worden sein mussten, und in dieser Situation wird einem neuen Konzept ein Name (eine Bezeichnung) gegeben. Dieser Name wird *kursiv* gesetzt. Man beachte, dass das Konzept auch ohne den neuen Namen formulierbar ist, der neue Name ist nur eine Abkürzung für das Konzept. Sehr häufig hängen die Begriffe von Eingaben ab, wie den beiden Mengen in dieser Definition. Bei der Namensgebung herrscht eine gewisse Willkür, so dass die Bedeutung der Bezeichnung im mathematischen Kontext sich allein aus der expliziten Definition, aber nicht aus der alltäglichen Wortbedeutung erschließen lässt.

k Elemente. Man kann auch für mehr als nur zwei Mengen die Produktmenge bilden.

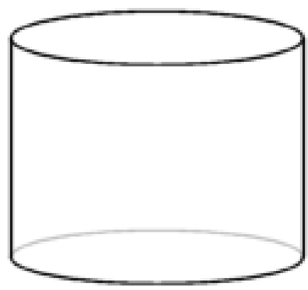
Beispiel 1.4. Es sei V die Menge aller Vornamen (sagen wir der Vornamen, die in einer bestimmten Grundmenge an Personen wirklich vorkommen) und N die Menge aller Nachnamen. Dann ist

$$V \times N$$

die Menge aller Namen. Aus einem Namen lässt sich einfach der Vorname und der Nachname herauslesen, indem man entweder auf die erste oder auf die zweite Komponente des Namens schaut. Auch wenn alle Vornamen und Nachnamen für sich genommen vorkommen, so muss natürlich nicht jeder daraus gebastelte mögliche Name wirklich vorkommen. Bei der Produktmenge werden eben alle Kombinationsmöglichkeiten aus den beiden beteiligten Mengen genommen.

Bei einer Produktmenge können natürlich auch beide Mengen gleich sein. Dann ist es verlockend, die Reihenfolge zu verwechseln, und also besonders wichtig, darauf zu achten, dies nicht zu tun.

Die Produktmenge $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ stellt man sich als eine Ebene vor, man schreibt dafür auch $\mathbb{R}^2$. Die Produktmenge $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ kann man sich als eine Menge von Gitterpunkten vorstellen.



Ein Zylindermantel ist die Produktmenge aus einem Kreis und einer Strecke

Beispiel 1.5. Es sei S ein Kreis, worunter wir die Kreislinie verstehen, und I eine Strecke. Der Kreis ist eine Teilmenge einer Ebene E und die Strecke ist eine Teilmenge einer Geraden G, so dass für die Produktmenge die Beziehung

$$S \times I \subseteq E \times G$$

gilt. Die Produktmenge $E \times G$ stellt man sich als einen dreidimensionalen Raum vor, und darin ist die Produktmenge $S \times I$ ein Zylindermantel.

1.6. **Abbildungen.**

Definition 1.6. Seien L und M zwei Mengen. Eine *Abbildung* F von L nach M ist dadurch gegeben, dass jedem Element der Menge L genau ein Element der Menge M zugeordnet wird. Das zu $x \in L$ eindeutig bestimmte Element wird mit $F(x)$ bezeichnet. Die Abbildung drückt man als Ganzes häufig durch

$$F : L \longrightarrow M, \, x \longmapsto F(x),$$

aus.

Bei einer Abbildung $F : L \to M$ heißt L die *Definitionsmenge* (oder Definitionsbereich) der Abbildung und M die *Wertemenge* (oder *Wertevorrat* oder *Zielbereich*) der Abbildung. Zu einem Element $x \in L$ heißt das Element

$$F(x) \in M$$

der *Wert* von F an der *Stelle* x. Statt Stelle sagt man auch häufig *Argument*.

Zwei Abbildungen $F : L_1 \to M_1$ und $G : L_2 \to M_2$ sind gleich, wenn die Definitionsmengen und die Wertemengen übereinstimmen und wenn für alle $x \in L_1 = L_2$ die Gleichheit $F(x) = G(x)$ in $M_1 = M_2$ gilt. Die Gleichheit von Abbildungen wird also zurückgeführt auf die Gleichheit von Elementen in einer Menge.

Abbildungen werden häufig auch *Funktionen* genannt. Wir werden den Begriff *Funktion* für solche Abbildungen reservieren, deren Wertemenge die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ sind.

Zu jeder Menge L nennt man die Abbildung

$$L \longrightarrow L, \, x \longmapsto x,$$

also die Abbildung, die jedes Element auf sich selbst schickt, die *Identität* (auf L). Sie wird mit Id_L bezeichnet. Zu einer weiteren Menge M und einem fixierten Element $c \in M$ nennt man die Abbildung

$$L \longrightarrow M, \, x \longmapsto c,$$

die also jedem Element $x \in L$ den *konstanten Wert* c zuordnet, die *konstante Abbildung* (mit dem Wert c). Sie wird häufig wieder mit c bezeichnet.[2]

[2]Von Hilbert stammt die etwas überaschende Aussage, die Kunst der Bezeichnung in der Mathematik besteht darin, unterschiedliche Sachen mit denselben Symbolen zu bezeichnen.

Für eine Abbildung gibt es mehrere Darstellungsmöglichkeiten, z.B. Wertetabelle, Balkendiagramm, Kuchendiagramm, Pfeildiagramm, den Graph der Abbildung. Dabei sind die Übergänge zwischen der formalen Definition einer Abbildung und den visuellen Realisierungen fließend. In der Mathematik wird eine Abbildung zumeist durch eine Abbildungsvorschrift beschrieben, die es erlaubt, die Werte der Abbildung zu berechnen.

Die Rechenoperationen Addition und Multiplikation innerhalb der reellen Zahlen fassen wir als eine Abbildung

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

auf, d.h. es wird dem Paar $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ die reelle Zahl $x + y$ (bzw. $x \cdot y$) zugeordnet. Eine solche Abbildung heißt eine Verknüpfung.

Definition 1.7. Eine *Verknüpfung* $\circ$ auf einer Menge M ist eine Abbildung

$$\circ : M \times M \longrightarrow M,\ (x, y) \longmapsto \circ(x, y) = x \circ y.$$

Der Definitionsbereich ist also die Produktmenge von M mit sich selbst und der Wertebereich ist ebenfalls M. Addition, Multiplikation und Subtraktion (auf $\mathbb{Z}$, auf $\mathbb{Q}$ oder auf $\mathbb{R}$) sind Verknüpfungen. Auf $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ ist die Division keine Verknüpfung, da sie nicht definiert ist, wenn die zweite Komponente gleich 0 ist (und schon gar nicht auf $\mathbb{Z}$). Allerdings ist die Division eine Verknüpfung auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. In der nächsten Vorlesung werden wir die algebraischen Eigenschaften der Addition und der Multiplikation auf den reellen Zahlen im Begriff des „Körpers“ zusammenfassen.

2. Vorlesung

2.1. **Körper.**

Wir werden nun die Eigenschaften der reellen Zahlen besprechen. Grundlegende Eigenschaften von mathematischen Strukuren werden als *Axiome* bezeichnet. In der Mathematik werden sämtliche Eigenschaften aus den Axiomen logisch abgeleitet. Die Axiome für die reellen Zahlen gliedern sich in algebraische Axiome, Anordnungsaxiome und das Vollständigkeitsaxiom. Die algebraischen Axiome werden im Begriff des Körpers zusammengefasst. Unter algebraischen Eigenschaften versteht man solche Eigenschaften, die sich auf die Rechenoperationen, also die Addition, die Subtraktion, die Multiplikation und die Division, beziehen. Diese Operationen ordnen zwei Elementen der gegebenen Menge M, also beispielsweise zwei reellen Zahlen, ein weiteres Element der Menge zu, es handelt sich also um Verknüpfungen.

Definition 2.1. Eine Menge K heißt ein *Körper*, wenn es zwei Verknüpfungen (genannt Addition und Multiplikation)

$$+ : K \times K \longrightarrow K \text{ und } \cdot : K \times K \longrightarrow K$$

und zwei verschiedene Elemente $0, 1 \in K$ gibt, die die folgenden Eigenschaften erfüllen.

(1) Axiome der Addition
   (a) Assoziativgesetz: Für alle $a, b, c \in K$ gilt: $(a+b)+c = a+(b+c)$.
   (b) Kommutativgesetz: Für alle $a, b \in K$ gilt $a + b = b + a$.
   (c) 0 ist das neutrale Element der Addition, d.h. für alle $a \in K$ ist $a + 0 = a$.
   (d) Existenz des Negativen: Zu jedem $a \in K$ gibt es ein Element $b \in K$ mit $a + b = 0$.

(2) Axiome der Multiplikation
   (a) Assoziativgesetz: Für alle $a, b, c \in K$ gilt: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
   (b) Kommutativgesetz: Für alle $a, b \in K$ gilt $a \cdot b = b \cdot a$.
   (c) 1 ist das neutrale Element der Multiplikation, d.h. für alle $a \in K$ ist $a \cdot 1 = a$.
   (d) Existenz des Inversen: Zu jedem $a \in K$ mit $a \neq 0$ gibt es ein Element $c \in K$ mit $a \cdot c = 1$.

(3) Distributivgesetz: Für alle $a, b, c \in K$ gilt $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$.

Dass all diese Axiome für die reellen Zahlen (und die rationalen Zahlen) mit den natürlichen Verknüpfungen gelten, ist aus der Schule bekannt.

In einem Körper gilt die *Klammerkonvention*, dass die Multiplikation stärker bindet als die Addition. Man kann daher $a \cdot b + c \cdot d$ statt $(a \cdot b) + (c \cdot d)$ schreiben. Zur weiteren Notationsvereinfachung wird das Produktzeichen häufig weggelassen. Die besonderen Elemente 0 und 1 in einem Körper werden als *Nullelement* und als *Einselement* bezeichnet. Nach der Definition müssen sie verschieden sein.

Die wichtigsten Beispiele für einen Körper sind für uns die rationalen Zahlen, die reellen Zahlen und die komplexen Zahlen, die wir in der nächsten Vorlesung kennenlernen werden.

Lemma 2.2. *In einem Körper K ist zu einem Element $x \in K$ das Element y mit $x + y = 0$ eindeutig bestimmt. Bei $x \neq 0$ ist auch das Element z mit $xz = 1$ eindeutig bestimmt.*

Beweis. Sei x vorgegeben und seien y und y' Elemente mit $x+y = 0 = x+y'$. Dann gilt

$$y = y + 0 = y + (x + y') = (y + x) + y' = (x + y) + y' = 0 + y' = y'.$$

Insgesamt ist also $y = y'$. Für den zweiten Teil sei x vorgegeben mit $x \neq 0$. Es seien z und z' Elemente mit $xz = 1 = xz'$. Dann ist

$$z = z1 = z(xz') = (zx)z' = 1z' = z'.$$

Also ist $z = z'$. □

Zu einem Element $a \in K$ nennt man das nach diesem Lemma eindeutig bestimmte Element y mit $a + y = 0$ das *Negative* von a und bezeichnet es mit $-a$. Es ist $-(-a) = a$, da wegen $a + (-a) = 0$ das Element a gleich dem eindeutig bestimmten Negativen von $-a$ ist.

Statt $b + (-a)$ schreibt man abkürzend $b - a$ und spricht von der *Differenz*. Die Differenz ist also keine grundlegende Verknüpfung, sondern wird auf die Addition mit dem Negativen zurückgeführt.

Das zu $a \in K$, $a \neq 0$, nach diesem Lemma eindeutig bestimmte Element z mit $az = 1$ nennt man das *Inverse* von a und bezeichnet es mit a^{-1}.

Für $a, b \in K$, $b \neq 0$, schreibt man auch abkürzend

$$a/b := \frac{a}{b} := ab^{-1}\,.$$

Die beiden linken Ausdrücke sind also eine Abkürzung für den rechten Ausdruck.

Zu einem Körperelement $a \in K$ und $n \in \mathbb{N}$ wird a^n als das n-fache Produkt von a mit sich selbst definiert, und bei $a \neq 0$ wird a^{-n} als $(a^{-1})^n$ interpretiert.

Ein „kurioser“ Körper wird im folgenden Beispiel beschrieben. Dieser Körper mit zwei Elementen ist in der Informatik und der Kodierungstheorie wichtig, wird für uns aber keine große Rolle spielen. Er zeigt, dass es nicht für jeden Körper sinnvoll ist, seine Elemente auf der Zahlengeraden zu verorten.

Beispiel 2.3. Wir suchen nach einer Körperstruktur auf der Menge $\{0, 1\}$. Wenn 0 das neutrale Element einer Addition und 1 das neutrale Element einer Multiplikation sein soll, so ist dadurch schon alles festgelegt, da $1 + 1 = 0$ sein muss, da 1 ein inverses Element bzgl. der Addition besitzen muss, und da in jedem Körper $0 \cdot 0 = 0$ gelten muss. Die Operationstafeln sehen also wie folgt aus.

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

und

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

Durch etwas aufwändiges Nachrechnen stellt man fest, dass es sich in der Tat um einen Körper handelt.

Die folgenden Eigenschaften sind für den Körper der reellen Zahlen vertraut, wir beweisen sie aber allein aus den Axiomen eines Körpers. Sie gelten daher für einen jeden Körper.

Lemma 2.4. *Es sei K ein Körper und seien $a, b, c, a_1, \ldots, a_r, b_1, \ldots, b_s$ Elemente aus K. Dann gelten folgende Aussagen.*

(1) $a0 = 0$ *(*Annullationsregel*).*
(2) $(-a)b = -ab = a(-b)$*.*

(3) $(-a)(-b) = ab$ *(*Vorzeichenregel*).*
(4) $a(b-c) = ab - ac.$
(5) $(\sum_{i=1}^{r} a_i)(\sum_{k=1}^{s} b_k) = \sum_{1 \le i \le r,\, 1 \le k \le s} a_i b_k$ *(*allgemeines Distributivgesetz*).*
(6) *Aus $a \cdot b = 0$ folgt $a = 0$ oder $b = 0$.*

Beweis. (1) Es ist $a0 = a(0+0) = a0 + a0$. Durch beidseitiges Abziehen von $a0$ ergibt sich die Behauptung.

(2)

$$(-a)b + ab = (-a+a)b = 0b = 0$$

nach Teil (1). Daher ist $(-a)b$ das (eindeutig bestimmte) Negative von ab. Die zweite Gleichheit folgt analog.

(3) Nach (2) ist $(-(-a))b = (-a)(-b)$ und wegen $-(-a) = a$ folgt die Behauptung.
(4) Dies folgt auch aus dem bisher Bewiesenen.
(5) Dies folgt aus einer Doppelinduktion, siehe Aufgabe 2.10.
(6) Nehmen wir an, dass a und b beide von null verschieden sind. Dann gibt es dazu inverse Elemente a^{-1} und b^{-1} und daher ist $(ab)(b^{-1}a^{-1}) = 1$. Andererseits ist aber nach Voraussetzung $ab = 0$ und daher ist nach der Annullationsregel

$$(ab)(b^{-1}a^{-1}) = 0(b^{-1}a^{-1}) = 0,$$

so dass sich der Widerspruch $0 = 1$ ergibt.

□

2.2. **Anordnungseigenschaften der reellen Zahlen.**

Bekanntlich kann man die reellen Zahlen mit einer Geraden identifizieren. Auf dem Zahlenstrahl liegen von zwei Punkten einer weiter rechts als der andere, was bedeutet, dass sein Wert größer ist. Wir besprechen nun diese Anordnungseigenschaften der reellen Zahlen.

Axiom 2.5. Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ erfüllen die folgenden *Anordnungsaxiome.*

(1) Für je zwei reelle Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ ist entweder $a > b$ oder $a = b$ oder $b > a$.
(2) Aus $a \ge b$ und $b \ge c$ folgt $a \ge c$ (für beliebige $a, b, c \in \mathbb{R}$).
(3) Aus $a \ge b$ folgt $a + c \ge b + c$ (für beliebige $a, b, c \in \mathbb{R}$).
(4) Aus $a \ge 0$ und $b \ge 0$ folgt $ab \ge 0$ (für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$).
(5) Für jede reelle Zahl $a \in \mathbb{R}$ gibt es eine natürliche Zahl n mit $n \ge a$.

Archimedes (ca. 287 -212 v. C.)

Die ersten beiden Eigenschaften drücken aus, dass auf $\mathbb{R}$ eine *totale* (oder *lineare*) *Ordnung* vorliegt; die in (2) beschriebene Eigenschaft heißt Transitivität. Die fünfte Eigenschaft heißt *Archimedes-Axiom*.

Statt $a \geq b$ schreibt man auch $b \leq a$. Die Schreibweise $a > b$ bedeutet $a \geq b$ und $a \neq b$. Eine wichtige Beziehung in $\mathbb{R}$ ist, dass $a \geq b$ äquivalent[3] zu $a - b \geq 0$ ist. Diese Äquivalenz ergibt sich durch beidseitiges Addieren von $-b$ bzw. b aus dem dritten Axiom. Eine reelle Zahl $a \in \mathbb{R}$ nennt man *positiv*, wenn $a > 0$ ist, und *negativ*, wenn $a < 0$ ist. Die 0 ist demnach weder positiv noch negativ, und jedes Element ist entweder positiv oder negativ oder null. Die Elemente a mit $a \geq 0$ nennt man dann einfach *nichtnegativ* und die Elemente a mit $a \leq 0$ *nichtpositiv*. Für die entsprechenden Teilmengen der reellen Zahlen schreibt man

$$\mathbb{R}_+,\ \mathbb{R}_-,\ \mathbb{R}_{\geq 0} = \mathbb{R}_+^0,\ \mathbb{R}_{\leq 0} = \mathbb{R}_-^0$$

oder Ähnliches.

Lemma 2.6. *Für reelle Zahlen gelten die folgenden Eigenschaften.*

(1) $1 > 0$.
(2) *Aus* $a \geq b$ *und* $c \geq 0$ *folgt* $ac \geq bc$.
(3) *Aus* $a \geq b$ *und* $c \leq 0$ *folgt* $ac \leq bc$.
(4) *Es ist* $a^2 \geq 0$.
(5) *Aus* $a \geq b \geq 0$ *folgt* $a^n \geq b^n$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$.
(6) *Aus* $a \geq 1$ *folgt* $a^n \geq a^m$ *für ganze Zahlen* $n \geq m$.
(7) *Aus* $a > 0$ *folgt* $\frac{1}{a} > 0$.
(8) *Aus* $a > b > 0$ *folgt* $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

Beweis. Siehe Aufgabe 2.4. □

[3]Man sagt, dass zwei Aussagen A und B zueinander *äquivalent* sind, wenn die Aussage A genau dann wahr ist, wenn die Aussage B wahr ist. Dabei sind die beiden Aussagen häufig abhängig von gewissen Variablenbelegungen, und die Äquivalenz bedeutet dann, dass $A(x)$ genau dann wahr ist, wenn $B(x)$ wahr ist.

Das folgende Lemma fasst Folgerungen aus dem Archimedes-Axiom zusammen.

Lemma 2.7. (1) *Zu $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $nx > y$.*

(2) *Zu $x > 0$ gibt es eine natürliche Zahl n mit $\frac{1}{n} < x$.*

(3) *Zu zwei reellen Zahlen $x < y$ gibt es auch eine rationale Zahl n/k (mit $n \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{N}_+$) mit*

$$x < \frac{n}{k} < y\,.$$

Beweis. (1). Wir betrachten y/x. Aufgrund des Archimedes-Axioms gibt es ein n mit $n > y/x$. Da x positiv ist, gilt nach Lemma 2.6 auch $nx > y$. (2). Es ist x^{-1} eine wohldefinierte, nach Lemma 2.6 positive reelle Zahl. Aufgrund des Archimedes-Axioms und daher gibt es eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $n > x^{-1}$. Dies ist nach Lemma 2.6 äquivalent zu

$$\frac{1}{n} = n^{-1} < (x^{-1})^{-1} = x.$$

(3). Wegen $y > x$ ist $y - x > 0$ und daher gibt es nach (2) ein $k \in \mathbb{N}_+$ mit $\frac{1}{k} < y - x$. Wegen (1) gibt es auch ein $n' \in \mathbb{N}$ mit $n'\frac{1}{k} > x$. Wegen der Archimedes-Eigenschaft gibt es ein $\tilde{n} \in \mathbb{N}$ mit $\tilde{n} \geq -xk$. Nach Lemma 2.6 gilt daher $(-\tilde{n})\frac{1}{k} \leq x$. Daher gibt es auch ein $n \in \mathbb{Z}$ derart, dass

$$n\frac{1}{k} > x \text{ und } (n-1)\frac{1}{k} \leq x$$

ist. Damit ist einerseits $x < \frac{n}{k}$ und andererseits

$$\frac{n}{k} = \frac{n-1}{k} + \frac{1}{k} < x + y - x = y$$

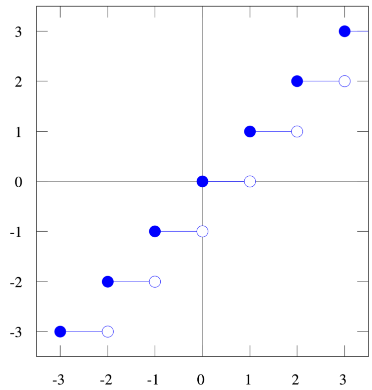
wie gewünscht. □

Definition 2.8. Für reelle Zahlen a, b, $a \leq b$, nennt man

- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} |\, x \geq a \text{ und } x \leq b\}$ das *abgeschlossene Intervall*.
- $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} |\, x > a \text{ und } x < b\}$ das *offene Intervall*.
- $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} |\, x > a \text{ und } x \leq b\}$ das *linksseitig offene Intervall*.
- $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} |\, x \geq a \text{ und } x < b\}$ das *rechtsseitig offene Intervall*.

Für das offene Intervall wird häufig auch (a, b) geschrieben. Die Zahlen a und b heißen die *Grenzen des Intervalls* (oder *Randpunkte* des Intervalls), genauer spricht man von *unterer* und *oberer Grenze*. Die Bezeichnung linksseitig und rechtsseitig bei den beiden letzten Intervallen (die man auch als *halboffen* bezeichnet) rühren von der üblichen Repräsentierung der reellen Zahlen als Zahlengerade her, bei der rechts die positiven Zahlen stehen. Manchmal werden auch Schreibweisen wie (a, ∞) verwendet. Dies bedeutet *nicht*, dass es in $\mathbb{R}$ ein Element ∞ gibt, sondern ist lediglich eine kurze Schreibweise für $\{x \in \mathbb{R} |\, x > a\}$.

Für die reellen Zahlen bilden die ganzzahligen Intervalle $[n, n+1[$, $n \in \mathbb{Z}$, eine disjunkte *Überdeckung*. Deshalb ist die folgende Definition sinnvoll.



Definition 2.9. Die *Gaußklammer* ist die Funktion

$$\lfloor\ \rfloor : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \lfloor x \rfloor,$$

die durch

$$\lfloor x \rfloor = n, \text{ falls } x \in [n, n+1[\text{ und } n \in \mathbb{Z}\,,$$

definiert wird.

Die Anordnungseigenschaften erlauben es auch, von wachsenden und fallenden Funktionen zu sprechen.

Definition 2.10. Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Dann heißt f *wachsend*, wenn

$$f(x') \geq f(x) \text{ für alle } x, x' \in I \text{ mit } x' \geq x \text{ gilt}\,,$$

streng wachsend, wenn

$$f(x') > f(x) \text{ für alle } x, x' \in I \text{ mit } x' > x \text{ gilt}\,,$$

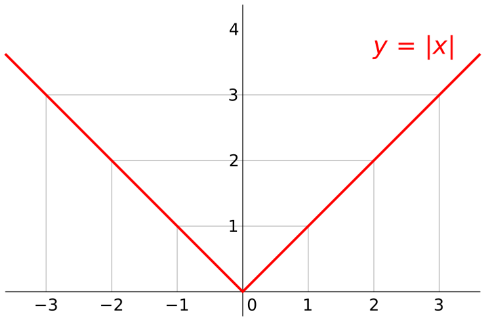
fallend, wenn

$$f(x') \leq f(x) \text{ für alle } x, x' \in I \text{ mit } x' \geq x \text{ gilt}\,,$$

streng fallend, wenn

$$f(x') < f(x) \text{ für alle } x, x' \in I \text{ mit } x' > x \text{ gilt}\,.$$

2.3. **Der Betrag.**



Definition 2.11. Für eine reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ ist der *Betrag* folgendermaßen definiert.

$$|x| = \begin{cases} x \text{ falls } x \geq 0 \\ -x \text{ falls } x < 0\,. \end{cases}$$

Der Betrag ist also nie negativ und hat nur bei $x = 0$ den Wert 0, sonst ist er immer positiv. Die Gesamtabbildung

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto |x|\,,$$

nennt man auch *Betragsfunktion*. Der Funktionsgraph setzt sich aus zwei Halbgeraden zusammen; eine solche Funktion nennt man auch *stückweise linear*.

Lemma 2.12. *Die reelle Betragsfunktion*

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto |x|\,,$$

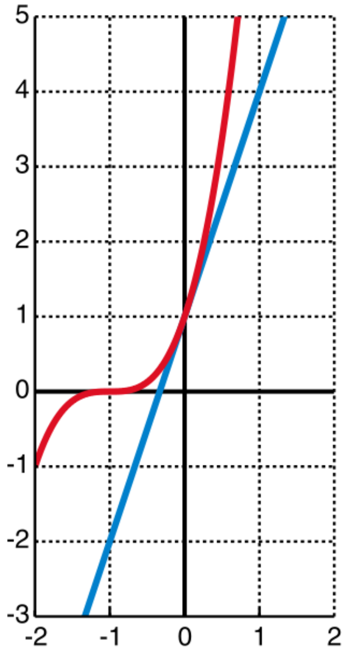
erfüllt folgende Eigenschaften (dabei seien x, y beliebige reelle Zahlen).

(1) $|x| \geq 0$.
(2) $|x| = 0$ *genau dann, wenn* $x = 0$ *ist.*
(3) $|x| = |y|$ *genau dann, wenn* $x = y$ *oder* $x = -y$ *ist.*
(4) $|y - x| = |x - y|$.
(5) $|xy| = |x|\,|y|$.
(6) *Für* $x \neq 0$ *ist* $|x^{-1}| = |x|^{-1}$.
(7) *Es ist* $|x + y| \leq |x| + |y|$ *(*Dreiecksungleichung für den Betrag*).*

Beweis. Siehe Aufgabe 2.7. $\square$

3. Vorlesung

3.1. Bernoullische Ungleichung.



Die Bernoulli'sche Ungleichung für $n = 3$.

Die folgende Aussage heißt *Bernoulli Ungleichung*.

Satz 3.1. *Für jede reelle Zahl $x \geq -1$ und eine natürliche Zahl n gilt die Abschätzung*

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx\,.$$

Beweis. Wir führen Induktion über n. Bei $n = 0$ steht beidseitig 1, so dass die Aussage gilt. Sei nun die Aussage für n bereits bewiesen. Dann ist

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &= (1+x)^n(1+x) \\ &\geq (1+nx)(1+x) \\ &= 1+(n+1)x+nx^2 \\ &\geq 1+(n+1)x.\end{aligned}$$

□

3.2. Die Binomialkoeffizienten.

Definition 3.2. Zu einer natürlichen Zahl n nennt man die Zahl

$$n! := n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$$

die *Fakultät* von n (sprich n Fakultät).

Man setzt $0! = 1$.

Definition 3.3. Es seien k und n natürliche Zahlen mit $k \leq n$.[4] Dann nennt man

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

den *Binomialkoeffizienten* „n über k“.

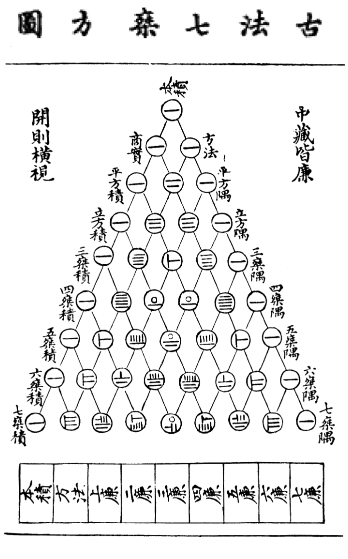
Diesen Bruch kann man auch als

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+2)(n-k+1)}{k(k-1)(k-2)\cdots 2\cdot 1}$$

schreiben, da die Faktoren aus $(n-k)!$ auch in $n!$ vorkommen und daher kürzbar sind. In dieser Darstellung stehen im Zähler und im Nenner gleich viele Faktoren. Von der Definition her ist es nicht sofort klar, dass es sich bei den Binomialkoeffizienten um natürliche Zahlen handelt. Dies folgt aus der folgenden Beziehung.

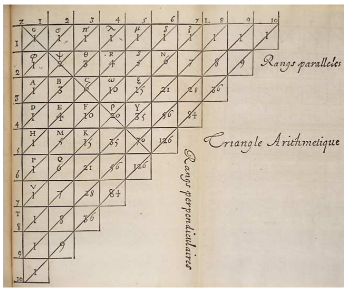
1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

Das *Dreieck der Binomialkoeffizienten* war in Indien und in Persien schon um 1000 bekannt,



in China heißt es *Yanghui-Dreieck* (nach Yang Hui (um 1238-1298)),

[4]Bei $k > n$ setzen wir die Binomialkoeffizienten gleich 0.



in Europa heißt es das *Pascalsche Dreieck* (nach Blaise Pascal (1623-1662)).

Lemma 3.4. *Die Binomialkoeffizienten erfüllen die rekursive Bedingung*[5]

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}.$$

Beweis. Siehe Aufgabe 3.1. □

Die folgende Formel bringt die Addition und die Multiplikation miteinander in Beziehung.

Satz 3.5. *Es seien a, b Elemente in einem Körper. Ferner sei n eine natürliche Zahl. Dann gilt*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Beweis. Wir führen Induktion nach n. Für $n = 0$ steht einerseits $(a+b)^0 = 1$ und andererseits $a^0 b^0 = 1$. Sei die Aussage bereits für n bewiesen. Dann ist

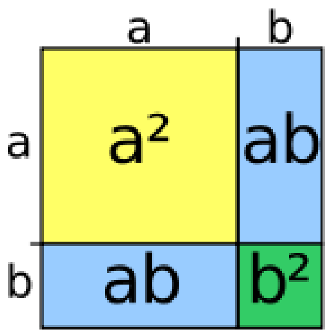
$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\
&= (a+b)\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\
&= a\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}\right) + b\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n-k+1} + \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right) a^k b^{n+1-k} + b^{n+1}
\end{aligned}$$

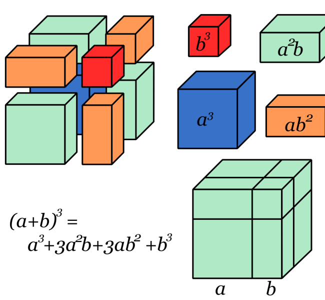
[5] Bei $k = 0$ ist $\binom{n}{k-1}$ als 0 zu interpretieren.

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} + b^{n+1}$$
$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}.$$

□

Bemerkung 3.6. Für den Binomialkoeffizienten
$$\binom{n}{k}$$
gibt es eine wichtige inhaltliche Interpretation. Er gibt die Anzahl der k-elementigen Teilmengen in einer n-elementigen Menge an. Z.B. gibt es in einer 49-elementigen Menge genau
$$\binom{49}{6} = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 13983816$$
6-elementige Teilmengen. Der Kehrwert von dieser Zahl ist die Wahrscheinlichkeit, beim Lotto sechs Richtige zu haben.





3.3. Die komplexen Zahlen.

Wir führen nun ausgehend von den reellen Zahlen die komplexen Zahlen ein. Zwar haben wir noch nicht alle Eigenschaften der reellen Zahlen kennengelernt, insbesondere haben wir noch nicht die Vollständigkeit diskutiert, die $\mathbb{R}$ von $\mathbb{Q}$ unterscheidet, doch ist dies für die Konstruktion von $\mathbb{C}$ unerheblich. Damit haben wir alle für die Anfängervorlesungen relevanten Zahlbereiche zur Verfügung.

Definition 3.7. Die Menge

$$\mathbb{R}^2$$

mit $0 := (0,0)$ und $1 := (1,0)$, mit der komponentenweisen Addition und der durch

$$(a,b) \cdot (c,d) := (ac - bd, ad + bc)$$

definierten Multiplikation nennt man *Körper der komplexen Zahlen*. Er wird mit

$$\mathbb{C}$$

bezeichnet.

Die Addition ist also einfach die vektorielle Addition im $\mathbb{R}^2$, während die Multiplikation eine neuartige Verknüpfung ist, die zwar numerisch einfach durchführbar ist, an die man sich aber dennoch gewöhnen muss. Wir werden später noch eine geometrische Interpretation für die komplexe Multiplikation kennen lernen.

Lemma 3.8. *Die komplexen Zahlen bilden einen Körper.*

Beweis. Siehe Aufgabe 3.6. □

Wir lösen uns von der Paarschreibweise und schreiben

$$a + bi := (a,b)\,.$$

Insbesondere ist $i = (0,1)$, diese Zahl heißt *imaginäre Einheit*. Diese Zahl hat die wichtige Eigenschaft

$$i^2 = -1\,.$$

Aus dieser Eigenschaft ergeben sich sämtliche algebraischen Eigenschaften der komplexen Zahlen durch die Körpergesetze. So kann man sich auch die obige Multiplikationsregel merken, es ist ja

$$(a+bi)(c+di) = ac+adi+bic+bidi = ac+bdi^2+(ad+bc)i = ac-bd+(ad+bc)i.$$

Wir fassen eine reelle Zahl a als die komplexe Zahl $a + 0i = (a,0)$ auf. Es ist gleichgültig, ob man zwei reelle Zahlen als reelle Zahlen oder als komplexe Zahlen addiert oder multipliziert.

Definition 3.9. Zu einer komplexen Zahl

$$z = a + bi$$

heißt

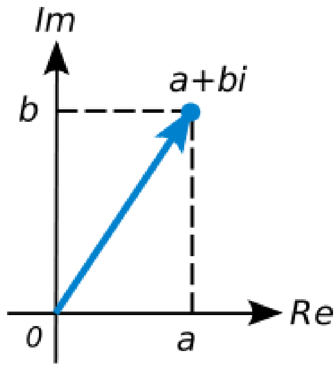
$$\mathrm{Re}\,(z) = a$$

der *Realteil* von z und

$$\mathrm{Im}\,(z) = b$$

heißt der *Imaginärteil* von z.

Man sollte sich allerdings die komplexen Zahlen nicht als etwas vorstellen, was weniger real als andere Zahlensysteme ist. Die Konstruktion der komplexen Zahlen aus den reellen Zahlen ist bei Weitem einfacher als die Konstruktion der reellen Zahlen aus den rationalen Zahlen. Allerdings war es historisch ein langer Prozess, bis die komplexen Zahlen als Zahlen anerkannt wurden; das Irreale daran ist, dass sie einen Körper bilden, der nicht angeordnet werden kann, und dass es sich daher scheinbar um keine Größen handelt, mit denen man sinnvollerweise etwas messen kann.



Man kann sich die komplexen Zahlen als die Punkte in einer Ebene vorstellen; für die additive Struktur gilt ja einfach $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$. In diesem Zusammenhang spricht man von der *Gaussschen Zahlenebene*. Die horizontale Achse nennt man dann die *reelle Achse* und die vertikale Achse die *imaginäre Achse*.

Lemma 3.10. *Real- und Imaginärteil von komplexen Zahlen erfüllen folgende Eigenschaften (für z und w aus $\mathbb{C}$).*

(1) $z = \mathrm{Re}\,(z) + \mathrm{Im}\,(z)i$.
(2) $\mathrm{Re}\,(z + w) = \mathrm{Re}\,(z) + \mathrm{Re}\,(w)$.
(3) $\mathrm{Im}\,(z + w) = \mathrm{Im}\,(z) + \mathrm{Im}\,(w)$.
(4) *Für $r \in \mathbb{R}$ ist*

$$\mathrm{Re}\,(rz) = r\,\mathrm{Re}\,(z) \text{ und } \mathrm{Im}\,(rz) = r\,\mathrm{Im}\,(z)\,.$$

(5) *Es ist $z = \mathrm{Re}\,(z)$ genau dann, wenn $z \in \mathbb{R}$ ist, und dies ist genau dann der Fall, wenn $\mathrm{Im}\,(z) = 0$ ist.*

Beweis. Siehe Aufgabe 3.7. □

Definition 3.11. Die Abbildung

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ z = a + bi \longmapsto \overline{z} := a - bi,$$

heißt *komplexe Konjugation*.

Zu z heißt $\overline{z}$ die *konjugiert-komplexe Zahl* von z. Geometrisch betrachtet ist die komplexe Konjugation zu $z \in \mathbb{C}$ einfach die Achsenspiegelung an der reellen Achse.

Lemma 3.12. *Für die komplexe Konjugation gelten die folgenden Rechenregeln (für beliebige $z, w \in \mathbb{C}$).*

(1) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$.
(2) $\overline{-z} = -\overline{z}$.
(3) $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$.
(4) *Für $z \neq 0$ ist $\overline{1/z} = 1/\overline{z}$.*
(5) $\overline{\overline{z}} = z$.
(6) *$\overline{z} = z$ genau dann, wenn $z \in \mathbb{R}$ ist.*

Beweis. Siehe Aufgabe 3.14. □

Das Quadrat d^2 einer reellen Zahl ist stets nichtnegativ, und die Summe von zwei nichtnegativen reellen Zahlen ist wieder nichtnegativ. Zu einer nichtnegativen reellen Zahl c gibt es eine eindeutige nichtnegative *Quadratwurzel* $\sqrt{c}$, siehe Aufgabe 13.8 (das werden wir später beweisen). Daher liefert folgende Definition eine wohldefinierte nichtnegative reelle Zahl.

Definition 3.13. Zu einer komplexen Zahl

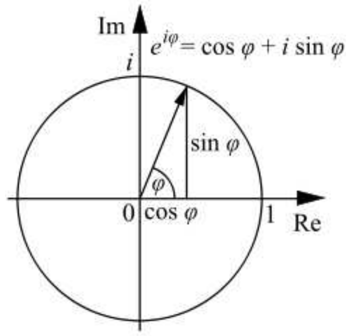
$$z = a + bi$$

ist der *Betrag* definiert durch

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}\,.$$

Der Betrag einer komplexen Zahl z ist aufgrund des *Satzes des Pythagoras* der Abstand von z zum Nullpunkt $0 = (0, 0)$. Insgesamt ist der Betrag eine Abbildung

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0},\ z \longmapsto |z|\,.$$



Die Menge aller komplexen Zahlen mit einem bestimmten Betrag bilden einen Kreis mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt und mit dem Betrag als Radius. Insbesondere bilden alle komplexen Zahlen mit dem Betrag 1 den *komplexen Einheitskreis*.

Lemma 3.14. *Für eine komplexe Zahl z gelten die folgenden Beziehungen.*

(1) $|z| = \sqrt{z\,\overline{z}}$.
(2) $\mathrm{Re}\,(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}$.
(3) $\mathrm{Im}\,(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i}$.
(4) $\overline{z} = \mathrm{Re}\,(z) - i\,\mathrm{Im}\,(z)$.
(5) *Für $z \neq 0$ ist $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$.*

Beweis. Siehe Aufgabe 3.8. □

Lemma 3.15. *Für den Betrag von komplexen Zahlen gelten folgende Eigenschaften.*

(1) *Für reelles z stimmen reeller und komplexer Betrag überein.*
(2) *Es ist $|z| = 0$ genau dann, wenn $z = 0$ ist.*
(3) $|z| = |\overline{z}|$.
(4) $|zw| = |z|\,|w|$.
(5) $|\mathrm{Re}\,(z)|\,, |\mathrm{Im}\,(z)| \leq |z|$.
(6) $|z+w| \leq |z| + |w|$.
(7) *Für $z \neq 0$ ist $|1/z| = 1/\,|z|$.*

Beweis. Wir zeigen die Dreiecksungleichung, für die anderen Aussagen siehe Aufgabe 3.9. Zunächst gilt nach (5) für jede komplexe Zahl u die Abschätzung $\mathrm{Re}\,(u) \leq |u|$. Daher ist

$$\mathrm{Re}\,(z\overline{w}) \leq |z|\,|w|\ ,$$

und somit ist

$$\begin{aligned} |z+w|^2 &= (z+w)(\overline{z}+\overline{w}) \\ &= z\overline{z} + z\overline{w} + w\overline{z} + w\overline{w} \\ &= |z|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,(z\overline{w}) + |w|^2 \\ &\leq |z|^2 + 2\,|z|\,|w| + |w|^2 \end{aligned}$$

$$= \quad (|z| + |w|)^2.$$

Durch Wurzelziehen ergibt sich die gewünschte Abschätzung. □

3.4. **Quadratwurzeln von komplexen Zahlen.**

Die imaginäre Einheit i hat die wichtige Eigenschaft $i^2 = -1$. Das Negative von i besitzt die gleiche Eigenschaft, nämlich $(-i)^2 = (-1)^2 i^2 = -1$. Damit gibt es zu jeder negativen reellen Zahl $-c$ (mit c positiv) in $\mathbb{C}$ die beiden Quadratwurzeln $\sqrt{c}i$ und $-\sqrt{c}i$. Im folgenden Beispiel zeigen wir, dass nicht nur jede reelle Zahl in $\mathbb{C}$ eine Quadratwurzel besitzt, sondern überhaupt jede komplexe Zahl.

Beispiel 3.16. Es sei $z = a + bi$ eine komplexe Zahl. Dann hat die komplexe Zahl

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma\sqrt{|z| + a} + i\sqrt{|z| - a})$$

mit dem Vorzeichen

$$\sigma = \begin{cases} 1, & \text{falls } b \geq 0 \\ -1 & \text{falls } b < 0\,. \end{cases}$$

die Eigenschaft

$$u^2 = z\,.$$

Insbesondere besitzt also z zwei Quadratwurzeln, nämlich u und $-u$, die bei $z = 0$ zusammenfallen.

Wir zeigen dies für den Fall $b \geq 0$. Dann ist

$$\begin{aligned} u^2 &= (\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{|z| + a} + i\sqrt{|z| - a}))^2 \\ &= \frac{1}{2}(|z| + a - (|z| - a) + 2i(\sqrt{(|z| + a)(|z| - a)}) \\ &= \frac{1}{2}(2a + 2i\sqrt{|z|^2 - a^2}) \\ &= \frac{1}{2}(2a + 2i\sqrt{b^2}) \\ &= \frac{1}{2}(2a + 2ib) \\ &= a + bi. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich, dass innerhalb von $\mathbb{C}$ jede *quadratische Gleichung*

$$az^2 + bz + c = 0$$

mit $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, mindestens eine komplexe Lösung besitzt, siehe Aufgabe 3.15.

4. Vorlesung

4.1. **Injektive und surjektive Abbildungen.**

Definition 4.1. Es seien L und M Mengen und es sei

$$F : L \longrightarrow M$$

eine Abbildung. Dann heißt F

• *injektiv*, wenn für je zwei verschiedene Elemente $x, x' \in L$ auch $F(x)$ und $F(x')$ verschieden sind.

• *surjektiv*, wenn es für jedes $y \in M$ mindestens ein Element $x \in L$ gibt mit $F(x) = y$.

• *bijektiv*, wenn F sowohl injektiv als auch surjektiv ist.

Diese Begriffe sind fundamental! Die Frage, ob eine Abbildung F diese Eigenschaften besitzt, kann man anhand der Gleichung

$$F(x) = y$$

(in den beiden Variablen x und y) erläutern. Die Surjektivität bedeutet, dass es zu jedem $y \in M$ mindestens eine Lösung $x \in L$ für diese Gleichung gibt, die Injektivität bedeutet, dass es zu jedem $y \in M$ maximal eine Lösung $x \in L$ für diese Gleichung gibt, und die Bijektivität bedeutet, dass es zu jedem $y \in M$ genau eine Lösung $x \in L$ für diese Gleichung gibt. Die Surjektivität entspricht also der Existenz von Lösungen, die Injektivität der Eindeutigkeit von Lösungen. Beide Fragestellungen durchziehen die Mathematik und können selbst wiederum häufig als die Surjektivität oder die Injektivität einer geeigneten Abbildung interpretiert werden.

Beim Nachweis der Injektivität einer Abbildung geht man häufig so vor, dass man zu zwei gegebenen Elementen x und x' aus der Voraussetzung $F(x) = F(x')$ erschließt, dass $x = x'$ ist. Dies ist oft einfacher zu zeigen, als aus $x \neq x'$ auf $F(x) \neq F(x')$ zu schließen.

Beispiel 4.2. Die Abbildung

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^2,$$

ist weder injektiv noch surjektiv. Sie ist nicht injektiv, da die zwei verschiedenen Zahlen 2 und -2 beide auf 4 abgebildet werden. Sie ist nicht surjektiv, da nur nichtnegative Elemente erreicht werden (eine negative Zahl hat keine reelle Quadratwurzel). Die Abbildung

$$\mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^2,$$

ist injektiv, aber nicht surjektiv. Die Injektivität folgt beispielsweise so: Wenn $x^2 = y^2$ ist mit $x, y \geq 0$, so ist entweder $x = y = 0$ oder $(x/y)^2 = 1$, also $x/y = 1$ und daher $x = y$. Die Abbildung

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0},\ x \longmapsto x^2,$$

ist nicht injektiv, aber surjektiv, da jede nichtnegative reelle Zahl eine Quadratwurzel besitzt. Die Abbildung

$$\mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0},\ x \longmapsto x^2,$$

ist injektiv und surjektiv.

Definition 4.3. Es sei $F : L \to M$ eine bijektive Abbildung. Dann heißt die Abbildung

$$G : M \longrightarrow L,$$

die jedes Element $y \in M$ auf das eindeutig bestimmte Element $x \in L$ mit $F(x) = y$ abbildet, die *Umkehrabbildung* zu F.

Definition 4.4. Es seien L, M und N Mengen und

$$F : L \longrightarrow M,\ x \longmapsto F(x),$$

und

$$G : M \longrightarrow N,\ y \longmapsto G(y),$$

Abbildungen. Dann heißt die Abbildung

$$G \circ F : L \longrightarrow N,\ x \longmapsto G(F(x)),$$

die *Hintereinanderschaltung* der Abbildungen F und G.

Es gilt also

$$(G \circ F)(x) := G(F(x))\,,$$

wobei die linke Seite durch die rechte Seite definiert wird. Wenn die beiden Abbildungen durch funktionale Ausdrücke gegeben sind, so wird die Hintereinanderschaltung dadurch realisiert, dass man den ersten Ausdruck anstelle der Variablen in den zweiten Ausdruck einsetzt (und nach Möglichkeit vereinfacht).

Lemma 4.5. *Es seien L, M, N und P Mengen und es seien*

$$F : L \longrightarrow M,\ x \longmapsto F(x),$$

$$G : M \longrightarrow N,\ y \longmapsto G(y),$$

und

$$H : N \longrightarrow P,\ z \longmapsto H(z),$$

Abbildungen. Dann ist

$$H \circ (G \circ F) = (H \circ G) \circ F\,.$$

Beweis. Siehe Aufgabe 4.6. □

Satz 4.6. *Seien M und N endliche Mengen mit n Elementen. Dann sind für eine Abbildung*

$$F : M \longrightarrow N$$

die Begriffe injektiv, surjektiv und bijektiv äquivalent.

4.2. **Polynome.**

Definition 4.7. Es sei K ein Körper. Ein Ausdruck der Form

$$P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \ldots + a_nX^n$$

mit $a_i \in K$ und $n \in \mathbb{N}$ heißt *Polynom in einer Variablen* über K.

Dabei heißen die Zahlen $a_0, a_1, \ldots, a_n$ die *Koeffizienten* des Polynoms. Zwei Polynome sind genau dann gleich, wenn sie in allen ihren Koeffizienten übereinstimmen. Die Polynome mit $a_i = 0$ für alle $i \geq 1$ heißen *konstante Polynome*, man schreibt sie einfach als a_0. Beim *Nullpolynom* sind überhaupt alle Koeffizienten null.

Definition 4.8. Der *Grad* eines von null verschiedenen Polynoms

$$P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \ldots + a_nX^n$$

mit $a_n \neq 0$ ist n.

Das Nullpolynom bekommt keinen Grad. Der Koeffizient a_n, der zum Grad n des Polynoms gehört, heißt *Leitkoeffizient* des Polynoms.

Die Gesamtheit aller Polynome über einem Körper K heißt *Polynomring* über K, er wird mit $K[X]$ bezeichnet. Dabei nennt man X die *Variable* des Polynomrings.

Zwei Polynome

$$P = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \text{ und } Q = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i$$

werden komponentenweise miteinander addiert, d.h. die Koeffizienten der Summe $P+Q$ sind einfach die Summe der Koeffizienten der beiden Polynome. Bei $n > m$ sind die „fehlenden“ Koeffizienten von Q als 0 zu interpretieren. Diese Addition ist offenbar assoziativ und multiplikativ, das Nullpolynom ist das neutrale Element und das negative Polynom $-P$ erhält man, indem man jeden Koeffizienten von P negiert.

Zwei Polynome lassen sich auch miteinander multiplizieren, wobei man

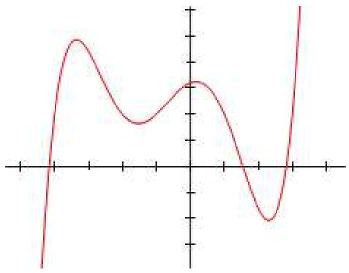
$$X^n \cdot X^m := X^{n+m}$$

setzt und diese Multiplikationsregel „distributiv fortsetzt“, d.h. man multipliziert „alles mit allem“ und muss dann aufaddieren. Die Multiplikation ist also explizit durch folgende Regel gegeben:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i X^i \cdot \sum_{j=0}^{m} b_j X^j = \sum_{k=0}^{n+m} c_k X^k \text{ mit } c_k = \sum_{r=0}^{k} a_r b_{k-r}\,.$$

Für den Grad gelten die beiden folgenden Regeln

- $\operatorname{grad}(P+Q) \leq \max\{\operatorname{grad}(P), \operatorname{grad}(Q)\}$.
- $\operatorname{grad}(P \cdot Q) = \operatorname{grad}(P) + \operatorname{grad}(Q)$.



Der Graph einer Polynomfunktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ vom Grad 5.

In ein Polynom $P \in K[X]$ kann man ein Element $a \in K$ *einsetzen*, indem man die Variable X an jeder Stelle durch a ersetzt. Dies führt zu einer Abbildung

$$K \longrightarrow K,\ a \longmapsto P(a),$$

die die durch das Polynom definierte *Polynomfunktion* heißt.

Wenn P und Q Polynome sind, so kann man die Hintereinanderschaltung $P \circ Q$ einfach beschreiben: man muss in P überall die Variable X durch Q ersetzen (und alles ausmultiplizieren und aufaddieren). Das Ergebnis ist wieder ein Polynom. Man beachte, dass es dabei auf die Reihenfolge ankommt.

4.3. **Division mit Rest.**

Satz 4.9. *Sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K. Es seien $P, T \in K[X]$ zwei Polynome mit $T \neq 0$. Dann gibt es eindeutig bestimmte Polynome $Q, R \in K[X]$ mit*

$$P = TQ + R \text{ und mit } \operatorname{grad}(R) < \operatorname{grad}(T) \text{ oder } R = 0\,.$$

Beweis. Dieser Beweis wurde in der Vorlesung nicht vorgeführt. □

Die Berechnung der Polynome Q und R heißt *Polynomdivision*. Wir geben dazu ein Beispiel über den komplexen Zahlen.

Beispiel 4.10. Wir führen die Polynomdivision

$$P = (4+3i)X^3 + X^2 + 5i \text{ durch } T = (1+i)X^2 + X - 3 + 2i$$

aus. Das Inverse zu $1+i$ ist $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ und daher ist

$$\begin{aligned}(4+3i)(1+i)^{-1} &= (4+3i)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right)\\ &= 2 + \frac{3}{2} - 2i + \frac{3}{2}i\\ &= \frac{7}{2} - \frac{1}{2}i.\end{aligned}$$

Daher beginnt Q mit $\left(\frac{7}{2} - \frac{1}{2}i\right) X$ und es ist

$$((1+i)X^2 + X - 3 + 2i)\left(\frac{7}{2} - \frac{1}{2}i\right) X = (4+3i)X^3 + \left(\frac{7}{2} - \frac{1}{2}i\right) X^2 + \left(-\frac{19}{2} + \frac{17}{2}i\right) X.$$

Dies muss man nun von P abziehen und erhält

$$P - \left((4+3i)X^3 + \left(\frac{7}{2} - \frac{1}{2}i\right) X^2 + \left(-\frac{19}{2} + \frac{17}{2}i\right) X\right) = \left(-\frac{5}{2} + \frac{1}{2}i\right) X^2 + \left(\frac{19}{2} - \frac{17}{2}i\right) X + 5i.$$

Auf dieses Polynom (nennen wir es P') wird das gleiche Verfahren angewendet. Man berechnet

$$\left(-\frac{5}{2} + \frac{1}{2}i\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right) = -1 + \frac{3}{2}i.$$

Daher ist der konstante Term von Q gleich $-1 + \frac{3}{2}i$ und es ergibt sich

$$\left((1+i)X^2 + X - 3 + 2i)(-1 + \frac{3}{2}i\right) = \left(-\frac{5}{2} + \frac{1}{2}i\right) X^2 + \left(-1 + \frac{3}{2}i\right) X - \frac{13}{2}i.$$

Dies ziehen wir von P' ab und erhalten

$$P' - \left(\left(-\frac{5}{2} + \frac{1}{2}i\right) X^2 + \left(-1 + \frac{3}{2}i\right) X - \frac{13}{2}i\right) = \left(\frac{21}{2} - 10i\right) X + \frac{23}{2}i.$$

Dies ist der Rest R, die vollständige Division mit Rest ist also

$$(4+3i)X^3 + X^2 + 5i = ((1+i)X^2 + X - 3 + 2i)\left(\left(\frac{7}{2} - \frac{1}{2}i\right) X - 1 + \frac{3}{2}i\right) + \left(\frac{21}{2} - 10i\right) X + \frac{23}{2}i.$$

Lemma 4.11. *Sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K. Sei $P \in K[X]$ ein Polynom und $a \in K$. Dann ist a genau dann eine Nullstelle von P, wenn P ein Vielfaches des linearen Polynoms*[6] *$X - a$ ist.*

Beweis. Wenn P ein Vielfaches von $X - a$ ist, so kann man

$$P = (X - a)Q$$

mit einem weiteren Polynom Q schreiben. Einsetzen ergibt

$$P(a) = (a - a)Q(a) = 0\,.$$

Im Allgemeinen gibt es aufgrund der Division mit Rest eine Darstellung

$$P = (X - a)Q + R\,,$$

[6] $X - a$ heißt dann ein *Linearfaktor* des Polynoms P.

wobei $R = 0$ oder aber den Grad null besitzt, also eine Konstante ist. Einsetzen ergibt

$$P(a) = R\,.$$

Wenn also $P(a) = 0$ ist, so muss der Rest $R = 0$ sein, und das bedeutet, dass $P = (X - a)Q$ ist. □

Korollar 4.12. *Sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K. Sei $P \in K[X]$ ein Polynom (ungleich null) vom Grad d. Dann besitzt P maximal d Nullstellen.*

Beweis. Wir beweisen die Aussage durch Induktion über d. Für $d = 0, 1$ ist die Aussage offensichtlich richtig. Sei also $d \geq 2$ und die Aussage sei für kleinere Grade bereits bewiesen. Sei a eine Nullstelle von P. Dann ist $P = Q(X - a)$ nach Lemma 4.9 und Q hat den Grad $d - 1$, so dass wir auf Q die Induktionsvoraussetzung anwenden können. Das Polynom Q hat also maximal $d - 1$ Nullstellen. Für $b \in K$ gilt $P(b) = Q(b)(b - a)$. Dies kann nur dann null sein, wenn einer der Faktoren null ist, so dass eine Nullstelle von P gleich a ist oder aber eine Nullstelle von Q ist. Es gibt also maximal d Nullstellen von P. □

Korollar 4.13. *Sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K. Dann besitzt jedes $P \in K[X]$, $P \neq 0$, eine Produktzerlegung*

$$P = (X - \lambda_1)^{\mu_1} \cdots (X - \lambda_k)^{\mu_k} \cdot Q$$

mit $\mu_j \geq 1$ und einem nullstellenfreien Polynom Q. Dabei sind die auftretenden verschiedenen Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ und die zugehörigen Exponenten $\mu_1, \ldots, \mu_k$ (bis auf die Reihenfolge) eindeutig bestimmt.

Beweis. Siehe Aufgabe 4.15. □

Es gilt allgemeiner, dass die Zerlegung eines Polynoms in irreduzible Faktoren im Wesentlichen eindeutig ist.

4.4. **Der Fundamentalsatz der Algebra.**

In der letzten Vorlesung haben wir gesehen, dass jede komplexe Zahl eine Quadratwurzel besitzt. Daraus folgt direkt, dass jedes Polynom vom Grad 2 über den komplexen Zahlen eine Nullstelle besitzt. Allgemeiner gilt der folgende *Fundamentalsatz der Algebra*, den wir hier ohne Beweis erwähnen.

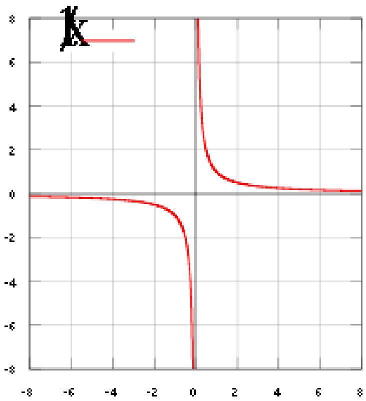
Satz 4.14. *Jedes nichtkonstante Polynom $P \in \mathbb{C}[X]$ über den komplexen Zahlen besitzt eine Nullstelle.*

Aus dem Fundamentalsatz der Algebra folgt, dass jedes von 0 verschiedene Polynom $P \in \mathbb{C}[X]$ in Linearfaktoren zerfällt, d.h. man kann schreiben

$$P = c(X - z_1)(X - z_2) \cdot (X - z_n)$$

mit eindeutig bestimmten komplexen Zahlen $z_1, \ldots, z_n$ (wobei Wiederholungen erlaubt sind).

4.5. **Rationale Funktionen.**



Man kann auch Brüche P/Q von Polynomen als Funktionen auffassen, die außerhalb der Nullstellen des Nenners definiert sind. Das Beispiel zeigt den Graph der rationalen Funktion $1/X$.

Definition 4.15. Zu zwei Polynomen $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, $Q \neq 0$, heißt die Funktion

$$D \longrightarrow \mathbb{R},\ z \longmapsto \frac{P(z)}{Q(z)},$$

wobei D das Komplement der Nullstellen von Q ist, eine *rationale Funktion.*

5. Vorlesung

Die Vorlesungen der nächsten Wochen beschäftigen sich mit *linearer Algebra.* Dabei wird stets ein Körper K zugrunde gelegt, wobei man dabei grundsätzlich an die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ denken kann. Da es aber zunächst bei Fragen der linearen Algebra nur auf die algebraischen Eigenschaften von $\mathbb{R}$ ankommt und wir deren analytische Eigenschaften noch nicht besprochen haben, kann man genauso gut an die rationalen Zahlen denken. Ab der Eigenwerttheorie (im nächsten Semester) werden dann auch analytische Eigenschaften bedeutsam.

5.1. **Lineare Gleichungssysteme.**

Wir beginnen mit drei einführenden Beispielen, einem alltäglichen, einem geometrischen und einem physikalischen, die alle zu einem linearen Gleichungssystem führen.

Beispiel 5.1. An einem Weihnachtsstand auf dem Weihnachtsmarkt gibt es drei verschiedene Glühweintöpfe. Alle drei beinhalten die Zutaten Zimt, Gewürznelken, Rotwein und Zucker, allerdings mit unterschiedlichen Anteilen. Die Zusammensetzung der einzelnen Glühweine ist

$$G_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 11 \\ 2 \end{pmatrix}, G_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 12 \\ 3 \end{pmatrix}, G_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 20 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Jeder Glühwein wird also repräsentiert durch ein Vierertupel, deren einzelne Einträge für die Anteile an den Zutaten stehen. Die Menge aller (möglichen) Glühweine bilden einen Vektorraum (diesen Begriff werden wir in der nächsten Vorlesung einführen), und die drei konkreten Glühweine sind drei Vektoren in diesem Raum.

Nehmen wir an, dass keiner dieser drei Glühweine genau den gewünschten Geschmack trifft und dass der Wunschglühwein die Zusammensetzung

$$W = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 20 \\ 5 \end{pmatrix}$$

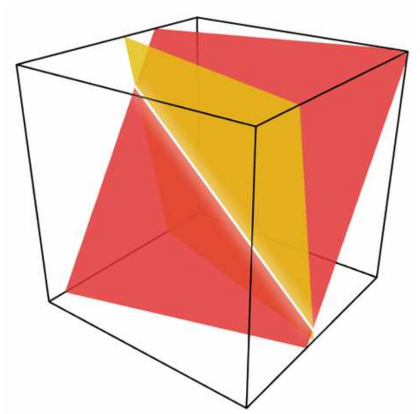
hat. Gibt es eine Möglichkeit, den Wunschglühwein durch Zusammenschütten der vorgegebenen Glühweine zu erhalten? Gibt es also Zahlen[7] $a, b, c \in \mathbb{R}$ derart, dass

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 11 \\ 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 12 \\ 3 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 20 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 20 \\ 5 \end{pmatrix}$$

gilt. Hinter dieser einen vektoriellen Gleichung liegen vier einzelne Gleichungen in den „Variablen“ a, b, c, wobei die Gleichungen sich aus den Zeilen

[7] Sinnvoll interpretierbar sind in diesem Beispiel nur positive Zahlen, da man schwerlich aus einem Glühweingemisch die einzelnen verwendeten Glühweinsorten wieder herausziehen kann. In der linearen Algebra spielt sich aber alles über einem Körper ab, so dass wir auch negative Zahlen zulassen.

ergeben. Wann gibt es eine solche Lösung, wann keine, wann mehrere? Das sind typische Fragen der linearen Algebra.



Zwei Ebenen im Raum, die sich in einer Geraden schneiden.

Beispiel 5.2. Im $\mathbb{R}^3$ seien zwei Ebenen

$$E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\, 4x - 2y - 3z = 5\right\}$$

und

$$F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\, 3x - 5y + 2z = 1\right\}$$

gegeben.[8] Wie kann man die Schnittgerade $G = E \cap F$ beschreiben? Ein Punkt $P = (x, y, z)$ liegt genau dann auf der Schnittgerade, wenn er die beiden *Ebenengleichungen* erfüllt; es muss also sowohl

$$4x - 2y - 3z = 5 \text{ als auch } 3x - 5y + 2z = 1$$

gelten. Wir multiplizieren die erste Gleichung mit 3 und ziehen davon das 4-fache der zweiten Gleichung ab und erhalten

$$14y - 17z = 11\,.$$

Wenn man $y = 0$ setzt, so muss $z = -\frac{11}{17}$ sein und $x = \frac{13}{17}$. D.h. der Punkt $P = \left(\frac{13}{17}, 0, -\frac{11}{17}\right)$ gehört zu G. Ebenso findet man, indem man $z = 0$ setzt, den Punkt $Q = \left(\frac{23}{14}, \frac{11}{14}, 0\right)$. Damit ist die Schnittgerade die Verbindungsgerade dieser Punkte, also

$$G = \left\{ \left(\frac{13}{17}, 0, -\frac{11}{17}\right) + t\left(\frac{209}{238}, \frac{11}{14}, \frac{11}{17}\right) |\, t \in \mathbb{R} \right\}\,.$$

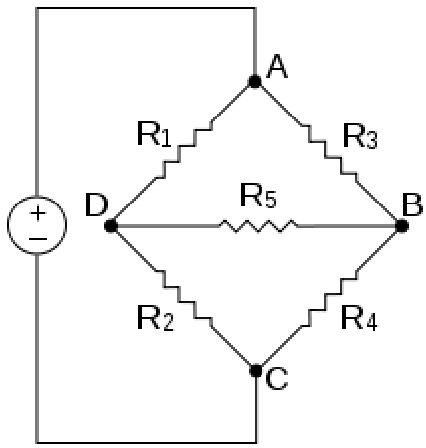
Beispiel 5.3. Ein elektrisches Netzwerk (ein Gleichstrom-Netzwerk) besteht aus mehreren miteinander verbundenen Drähten, die in diesem Zusammenhang die Kanten des Netzwerks genannt werden. In jeder Kante K_j liegt ein bestimmter Widerstand R_j vor. Die Verbindungspunkte P_n, in denen die

[8] An dieser Stelle diskutieren wir nicht, dass solche Gleichungen Ebenen beschreiben. Die Lösungsmengen sind „verschobene Untervektorräume der Dimension zwei“.

Kanten zusammenlaufen, nennt man die Knoten des Netzwerks. Wenn an das Netzwerk (bzw. gewisse Kanten davon) eine Spannung angelegt wird, so fließt in jeder Kante ein bestimmter Strom I_j. Es ist sinnvoll, für jede Kante eine Richtung zu fixieren, um die Fließrichtung des Stromes in dieser Kante unterscheiden zu können (wenn der Strom in die entgegengesetze Richtung fließt, so bekommt er ein negatives Vorzeichen). Man spricht von gerichteten Kanten. In einem Knotenpunkt des Netzwerks fließen die Ströme der verschiedenen anliegenden Kanten zusammen, ihre Summe muss 0 ergeben. Entlang einer Kante K_j kommt es zu einem Spannungsabfall U_j, der durch das Ohmsche Gesetz

$$U_j = R_j \cdot I_j$$

beschrieben wird.



Unter einer Masche (oder einem Zykel) des Netzwerks versteht man eine geschlossene gerichtete Verbindung von Kanten. Für eine solche Masche ist die Gesamtspannung 0, es sei denn, es wird „von außen“ eine Spannung angelegt.

Wir listen diese *Kirchhoffschen Regeln* nochmal auf.

(1) In jedem Knoten ist die Summe der (ein- und abfließenden) Ströme gleich 0.
(2) In jeder Masche ist die Summe der Spannungen gleich 0.
(3) Wenn in einer Masche eine Spannung V angelegt wird, so ist die Summe der Spannungen gleich V.

Aus „physikalischen Gründen“ ist zu erwarten, dass bei einer angelegten Spannung in jeder Kante ein wohlbestimmter Strom fließt. In der Tat lässt sich dieser aus den genannten Gesetzmäßigkeiten berechnen, indem man diese in ein lineares Gleichungssystem übersetzt und dieses löst.

In dem durch das Bild angegebenen Beispiel seien die Kanten $K_1, \ldots, K_5$ (mit den Widerständen $R_1, \ldots, R_5$) von links nach rechts gerichtet, und die Verbindungskante K_0 von A nach C (an die die Spannung V angelegt sei), sei von oben nach unten gerichtet. Die vier Knotenpunkte und die drei Maschen (A, D, B), (D, B, C) und (A, D, C) führen auf das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{cccccccc}
-I_0 & +I_1 & & -I_3 & & & = & 0 \\
 & & & I_3 & +I_4 & +I_5 & = & 0 \\
I_0 & & +I_2 & & -I_4 & & = & 0 \\
 & -I_1 & -I_2 & & & -I_5 & = & 0 \\
 & R_1 I_1 & & +R_3 I_3 & & -R_5 I_5 & = & 0 \\
 & & R_2 I_2 & & +R_4 I_4 & -R_5 I_5 & = & 0 \\
 & -R_1 I_1 & +R_2 I_2 & & & & = & V\,.
\end{array}$$

Dabei sind die R_j und V vorgegebene Zahlen und die I_j sind gesucht.

Definition 5.4. Es sei K ein Körper und $a_{ij} \in K$ für $1 \leq i \leq m$ und $1 \leq j \leq n$. Dann nennt man

$$\begin{array}{rcl}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & 0 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & 0
\end{array}$$

ein (homogenes) *lineares Gleichungssystem* in den Variablen $x_1, \ldots, x_n$. Ein Tupel $(\xi_1, \ldots, \xi_n) \in K^n$ heißt *Lösung des linearen Gleichungssystems*, wenn $\sum_{j=1}^n a_{ij}\xi_j = 0$ ist für alle $i = 1, \ldots, m$.

Wenn $(c_1, \ldots, c_m) \in K^n$ beliebig[9] ist, so heißt

$$\begin{array}{rcl}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & c_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & c_2 \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & c_m
\end{array}$$

ein *inhomogenes lineares Gleichungssystem* und ein Tupel $(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \in K^n$ heißt *Lösung des inhomogenen linearen Gleichungssystems*, wenn $\sum_{j=1}^n a_{ij}\zeta_j = c_i$ ist für alle i.

Die Menge aller Lösungen eines linearen Gleichungssystems heißt die *Lösungsmenge*. Im homogenen Fall spricht man auch vom *Lösungsraum*, da es sich in der Tat, wie wir in der nächsten Vorlesung sehen werden, um einen Vektorraum handelt.

Ein homogenes lineares Gleichungssystem besitzt immer die sogenannte *triviale Lösung* $0 = (0, \ldots, 0)$. Ein inhomogenes Gleichungssystem braucht

[9] Ein solcher Vektor heißt manchmal ein *Störvektor* des Systems.

nicht unbedingt eine Lösung haben. Zu einem inhomogenen linearen Gleichungssystem heißt das homogene System, das entsteht, wenn man den Störvektor gleich 0 setzt, das *zugehörige homogene System*.

Beispiel 5.5. Es sei K ein Körper und $m \in \mathbb{N}$. Im K^m seien n Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \, v_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \ldots, v_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

gegeben und sei

$$w = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$$

ein weiterer Vektor. Wir wollen wissen, wann w sich als „Linearkombination" der v_j darstellen lässt. Es geht also um die Frage, ob es n Elemente $s_1, \ldots, s_n \in K$ gibt mit der Eigenschaft

$$s_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + s_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \ldots + s_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}.$$

Die Gleichheit von Vektoren bedeutet, dass Übereinstimmung in jeder Komponenten vorliegen muss, so dass dies zum linearen Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccc} a_{11}s_1 + a_{12}s_2 + \ldots + a_{1n}s_n & = & c_1 \\ a_{21}s_1 + a_{22}s_2 + \ldots + a_{2n}s_n & = & c_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}s_1 + a_{m2}s_2 + \ldots + a_{mn}s_n & = & c_m \end{array}$$

führt.

5.2. **Das Lösen von linearen Gleichungssystemen.**

Lineare Gleichungssysteme werden mit dem *Eliminationsverfahren* gelöst, bei dem nach und nach Variablen eliminiert werden und schließlich ein besonders einfaches äquivalentes Gleichungssystem entsteht, das direkte gelöst werden kann (bzw. von dem gezeigt werden kann, dass es keine Lösung besitzt).

Definition 5.6. Es sei K ein Körper und seien zwei (inhomogene) lineare Gleichungssysteme zur gleichen Variablenmenge gegeben. Die Systeme heißen *äquivalent*, wenn ihre Lösungsmengen übereinstimmen.

Lemma 5.7. *Es sei K ein Körper und*

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & c_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & c_m \end{array}$$

ein inhomogenes lineares Gleichungssystem. Dann führen die folgenden Manipulationen an diesem Gleichungssystem zu einem äquivalenten Gleichungssystem.

(1) *Das Vertauschen von zwei Gleichungen.*
(2) *Die Multiplikation einer Gleichung mit einen Skalar $s \neq 0$.*
(3) *Das einfache Weglassen einer Gleichung, die doppelt vorkommt.*
(4) *Das Verdoppeln einer Gleichung (im Sinne von eine Gleichung zweimal hinschreiben).*
(5) *Das Weglassen oder Hinzufügen von einer Nullzeile.*
(6) *Das Ersetzen einer Gleichung H durch diejenige Gleichung, die entsteht, wenn man zu H eine andere Gleichung G des Systems addiert.*

Beweis. Die meisten Aussagen sind direkt klar. (2) ergibt sich einfach daraus, dass wenn

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = c$$

gilt, dass dann auch

$$\sum_{i=1}^{n} (s a_i) x_i = sc$$

für jedes $s \in K$ gilt. Bei $s \neq 0$ kann man diesen Übergang durch Multiplikation mit s^{-1} rückgängig machen.

(6). Es sei G die Gleichung

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = c$$

und H die Gleichung

$$\sum_{i=1}^{n} b_i x_i = d\,.$$

Wenn ein Tupel $(\xi, \ldots, \xi_n)$ die beiden Gleichungen erfüllt, so erfüllt es auch die Gleichung $H' = G + H$. Und wenn das Tupel die beiden Gleichungen G und H' erfüllt, so auch die Gleichung G und $H = H' - G$. □

Für die praktische Lösung eines linearen Gleichungssystems sind die beiden Manipulationen (2) und (6) am wichtigsten, wobei man in aller Regel diese beiden Schritte kombiniert und eine Gleichung H durch eine Gleichung der Form $H + \lambda G$ (mit $G \neq H$) ersetzt. Dabei wird $\lambda \in K$ so gewählt, dass die neue Gleichung eine Variable weniger besitzt als die alte. Man spricht von

Elimination einer Variablen. Diese Elimination wird nicht nur für eine Zeile durchgeführt, sondern für alle Zeilen mit der Ausnahme von einer (geeignet gewählten) „Arbeitszeile“ G und mit einer fixierten „Arbeitsvariablen“. Das folgende *Eliminationslemma* beschreibt diesen Rechenschritt.

Lemma 5.8. *Es sei K ein Körper und S ein (inhomogenes) lineares Gleichungssystem über K in den Variablen $x_1, \ldots, x_n$. Es sei x eine Variable, die in mindestens einer Gleichung G mit einem von null verschiedenen Koeffizienten a vorkommt. Dann lässt sich jede von G verschiedene*[10] *Gleichung H durch eine Gleichung H' ersetzen, in der x nicht mehr vorkommt, und zwar so, dass das neue Gleichungssystem S', das aus G und den Gleichungen H' besteht, äquivalent zum Ausgangssystem S ist.*

Beweis. Durch Umnummerieren kann man $x = x_1$ erreichen. Es sei G die Gleichung

$$ax_1 + \sum_{i=2}^{n} a_i x_i = b$$

(mit $a \neq 0$) und H die Gleichung

$$cx_1 + \sum_{i=2}^{n} c_i x_i = d\,.$$

Dann hat die Gleichung $H' = H - \frac{c}{a}G$ die Gestalt

$$\sum_{i=2}^{n} \left(c_i - \frac{c}{a}a_i\right) x_i = d - \frac{c}{a}b\,,$$

in der x_1 nicht mehr vorkommt. Wegen $H = H' + \frac{c}{a}G$ gilt, dass die Gleichungssysteme äquivalent sind. $\square$

Satz 5.9. *Jedes (inhomogene) lineare Gleichungssystem über einem Körper K lässt sich durch die in Lemma 5.7 beschriebenen elementaren Umformungen, durch Variablenumnummerierung und durch das Weglassen von überflüssigen Gleichungen in ein äquivalentes lineares Gleichungssystem der Dreiecksform*

$$\begin{array}{cccccccc}
b_{11}y_1 & +b_{12}y_2 & \ldots & +b_{1m}y_m & +b_{1m+1}y_{m+1} & \ldots & +b_{1n}y_n & = & d_1 \\
0 & b_{22}y_2 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & +b_{2n}y_n & = & d_2 \\
\vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & = & \vdots \\
0 & \ldots & 0 & b_{mm}y_m & +b_{mm+1}y_{m+1} & \ldots & +b_{mn}y_n & = & d_m \\
0 & \ldots & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & = & d_{m+1}
\end{array}$$

überführen, bei dem alle Diagonalelemente von 0 verschieden sind. Dabei ist bei $d_{m+1} = 0$ die letzte Zeile überflüssig und bei $d_{m+1} \neq 0$ besitzt das System keine Lösung.

[10] Mit verschieden ist hier gemeint, dass die beiden Gleichungen einen unterschiedlichen Index im System haben. Es ist also sogar der Fall erlaubt, dass G und H dieselbe, aber doppelt aufgeführte Gleichung ist.

Beweis. Dies folgt direkt aus dem Eliminationslemma, das man solange anwenden kann, solange es noch nicht verarbeitete Zeilen mit von 0 verschiedenen Koeffizienten gibt. Wenn dabei mehrere Gleichungen in der Form der letzten Gleichung übrig bleiben, und diese nicht alle die Nullgleichung sind, so besitzt das System keine Lösung. □

Lemma 5.10. *Es sei ein inhomogenes lineares Gleichungssystem über einem Körper K in Dreiecksgestalt*

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & \ldots & +a_{1m}x_m & \ldots & +a_{1n}x_n & = & c_1 \\ 0 & a_{22}x_2 & \ldots & \ldots & \ldots & +a_{2n}x_n & = & c_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & = & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & a_{mm}x_m & \ldots & +a_{mn}x_n & = & c_m \end{array}$$

gegeben, wobei vorne die Diagonalelemente alle ungleich 0 seien. Dann stehen die Lösungen $(x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n)$ in Bijektion zu den Tupeln $(x_{m+1}, \ldots, x_n) \in K^{n-m}$. D.h. die hinteren $n-m$ Variablen sind frei wählbar und legen eine eindeutige Lösung fest, und jede Lösung wird dabei erfasst.

Beweis. Dies ist klar, da bei gegebenem $(x_{m+1}, \ldots, x_n)$ die Zeilen von unten nach oben sukzessive die anderen Variablen eindeutig festlegen. □

Bei $m = n$ gibt es keine freien Variablen und es ist $K^0 = 0$ und das Gleichungssystem besitzt genau eine Lösung.

Beispiel 5.11. Wir wollen das inhomogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{cccccccc} 2x & +5y & +2z & & -v & = & 3 \\ 3x & -4y & & +u & +2v & = & 1 \\ 4x & & -2z & +2u & & = & 7\,. \end{array}$$

über $\mathbb{R}$ lösen. Wir eliminieren zuerst x, indem wir die erste Zeile I beibehalten, die zweite Zeile II durch $II - \frac{3}{2}I$ und die dritte Zeile III durch $III - 2I$ ersetzen. Das ergibt

$$\begin{array}{cccccccc} 2x & +5y & +2z & & -v & = & 3 \\ & -\frac{23}{2}y & -3z & +u & +\frac{7}{2}v & = & \frac{-7}{2} \\ & -10y & -6z & +2u & +2v & = & 1\,. \end{array}$$

Wir könnten jetzt aus der (neuen) dritten Zeile mit Hilfe der zweiten Zeile y eliminieren. Wegen der Brüche eliminieren wir aber lieber z (dies eliminiert gleichzeitig u). Wir belassen also die erste und zweite Zeile und ersetzen die dritte Zeile III durch $III - 2II$. Dies ergibt, wobei wir das System in einer neuen Reihenfolge[11] aufschreiben, das System

$$\begin{array}{cccccccc} 2x & +2z & & +5y & -v & = & 3 \\ & -3z & +u & -\frac{23}{2}y & +\frac{7}{2}v & = & \frac{-7}{2} \\ & & & 13y & -5v & = & 8\,. \end{array}$$

[11] Eine solche Umstellung ist ungefährlich, wenn man den Namen der Variablen mitschleppt. Wenn man dagegen das System in Matrizenschreibweise aufführt, also die Variablennamen einfach weglässt, so muss man sich diese Spaltenvertauschungen merken.

Wir können uns nun v beliebig (oder „frei") vorgeben. Die dritte Zeile legt dann y eindeutig fest, es muss nämlich

$$y = \frac{8}{13} + \frac{5}{13}v$$

gelten. In der zweiten Gleichung können wir wieder u beliebig vorgeben, was dann z eindeutig festlegt, nämlich

$$\begin{aligned} z &= -\frac{1}{3}\left(-\frac{7}{2} - u - \frac{7}{2}v + \frac{23}{2}\left(\frac{8}{13} + \frac{5}{13}v\right)\right) \\ &= -\frac{1}{3}\left(-\frac{7}{2} - u - \frac{7}{2}v + \frac{92}{13} + \frac{115}{26}v\right) \\ &= -\frac{1}{3}\left(\frac{93}{26} - u + \frac{12}{13}v\right) \\ &= -\frac{93}{78} + \frac{1}{3}u - \frac{12}{39}v. \end{aligned}$$

Die erste Zeile legt dann x fest, nämlich

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}(3 - 2z - 5y + v) \\ &= \frac{1}{2}\left(3 - 2\left(-\frac{93}{78} + \frac{1}{3}u - \frac{12}{39}v\right) - 5\left(\frac{8}{13} + \frac{5}{13}v\right) + v\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{30}{13} - \frac{2}{3}u - \frac{4}{13}v\right) \\ &= \frac{15}{13} - \frac{1}{3}u - \frac{2}{13}v. \end{aligned}$$

Daher kann man die Gesamtlösungsmenge als

$$\left\{\left(\frac{15}{13} - \frac{1}{3}u - \frac{2}{13}v, \frac{8}{13} + \frac{5}{13}v, -\frac{93}{78} + \frac{1}{3}u - \frac{12}{39}v, u, v\right) \mid u, v \in \mathbb{R}\right\}$$

schreiben. Eine besonders einfache Lösung ergibt sich, wenn man die freien Variablen u und v gleich 0 setzt. Dies führt auf die spezielle Lösung

$$(x, y, z, u, v) = \left(\frac{15}{13}, \frac{8}{13}, -\frac{93}{78}, 0, 0\right).$$

In der allgemeinen Lösung kann man u und v als Koeffizienten rausziehen und dann die Lösungsmenge auch als

$$\left\{\left(\frac{15}{13}, \frac{8}{13}, -\frac{93}{78}, 0, 0\right) + u\left(-\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, 1, 0\right) + v\left(-\frac{2}{13}, \frac{5}{13}, -\frac{12}{39}, 0, 1\right) \mid u, v \in \mathbb{R}\right\}$$

schreiben. Dabei ist

$$\left\{u\left(-\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, 1, 0\right) + v\left(-\frac{2}{13}, \frac{5}{13}, -\frac{12}{39}, 0, 1\right) \mid u, v \in \mathbb{R}\right\}$$

eine Beschreibung der allgemeinen Lösung des zugehörigen homogenen linearen Gleichungssystems.

6. Vorlesung

6.1. **Der Matrizenkalkül.**

Ein lineares Gleichungssystem lässt sich am einfachsten mit Matrizen schreiben. Dies ermöglicht es, die Umformungen, die zur Lösung eines solchen Systems führen, durchzuführen, ohne immer die Variablen mitschleppen zu müssen. Matrizen (und der zugehörige Kalkül) sind recht einfache Objekte; sie können aber ganz unterschiedliche mathematische Objekte beschreiben (eine Familie von Spaltenvektoren, eine Familie von Zeilenvektoren, eine lineare Abbildung, eine Tabelle von Wechselwirkungen, ein Vektorfeld etc.), die man stets im Hinterkopf haben sollte, um vor Fehlinterpretationen geschützt zu sein.

Definition 6.1. Es sei K ein Körper und I und J zwei Indexmengen. Eine $I \times J$-*Matrix* ist eine Abbildung

$$I \times J \longrightarrow K,\ (i,j) \longmapsto a_{ij}.$$

Bei $I = \{1, \ldots, m\}$ und $J = \{1, \ldots, n\}$ spricht man von einer $m \times n$-*Matrix.* In diesem Fall schreibt man eine Matrix zumeist tabellarisch als

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Wir beschränken uns weitgehend auf den durchnummerierten Fall. Zu jedem $i \in I$ heißt a_{ij} , $j \in J$, die i-te *Zeile* der Matrix, was man zumeist als einen *Zeilenvektor*

$$(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$$

schreibt. Zu jedem $j \in J$ heißt a_{ij} , $i \in I$, die j-te *Spalte* der Matrix, was man zumeist als ein Spaltentupel

$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

schreibt. Die Elemente a_{ij} heißen die *Einträge* der Matrix. Zu a_{ij} heißt i der *Zeilenindex* und j der *Spaltenindex* des Eintrags. Man findet den Eintrag a_{ij}, indem man die i-te Zeile mit der j-ten Spalte kreuzt. Eine Matrix mit $m = n$ nennt man eine *quadratische Matrix.* Eine $m \times 1$-Matrix ist einfach ein Spaltentupel (oder Spaltenvektor) der Länge m, und eine $1 \times n$-Matrix ist einfach ein Zeilentupel (oder Zeilenvektor) der Länge n. Die Menge aller Matrizen mit m Zeilen und n Spalten (und mit Einträgen in K) wird mit $\operatorname{Mat}_{m \times n}(K)$ bezeichnet, bei $m = n$ schreibt man $\operatorname{Mat}_n(K)$.

Zwei Matrizen $A, B \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$ werden addiert, indem man sie komponentenweise addiert. Ebenso ist die Multiplikation einer Matrix A mit einem Element $r \in K$ (einem *Skalar*) komponentenweise definiert, also

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

und

$$r \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ra_{11} & ra_{12} & \dots & ra_{1n} \\ ra_{21} & ra_{22} & \dots & ra_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ra_{m1} & ra_{m2} & \dots & ra_{mn} \end{pmatrix}.$$

Die Matrizenmultiplikation wird folgendermaßen definiert.

Definition 6.2. Es sei K ein Körper und es sei A eine $m \times n$-Matrix und B eine $n \times p$-Matrix. Dann ist das *Matrixprodukt*

$$AB$$

diejenige $m \times p$-Matrix, deren Einträge durch

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$$

gegeben sind.

Eine solche Matrizenmultiplikation ist also nur möglich, wenn die Spaltenanzahl der linken Matrix mit der Zeilenanzahl der rechten Matrix übereinstimmt. Als Merkregel kann man das Schema

$$(ZEILE) \begin{pmatrix} S \\ P \\ A \\ L \\ T \end{pmatrix} = (ZS + EP + IA + L^2 + ET)$$

verwenden, das Ergebnis ist eine 1×1-Matrix. Insbesondere kann man eine $m \times n$-Matrix A mit einem Spaltenvektor der Länge n (von rechts) multiplizieren, und erhält dabei einen Spaltenvektor der Länge m. Die beiden soeben angeführten Matrizen kann man auch in der anderen Reihenfolge multiplizieren (was nicht immer möglich ist) und erhält

$$\begin{pmatrix} S \\ P \\ A \\ L \\ T \end{pmatrix} (ZEILE) = \begin{pmatrix} SZ & SE & SI & SL & SE \\ PZ & PE & PI & PL & PE \\ AZ & AE & AI & AL & AE \\ LZ & LE & LI & L^2 & LE \\ TZ & TE & TI & TL & TE \end{pmatrix}.$$

Definition 6.3. Die $n \times n$-Matrix

$$E_n := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

nennt man die *Einheitsmatrix*.

Die Einheitsmatrix E_n besitzt die Eigenschaft $E_n M = M = M E_n$ für eine beliebige $n \times n$-Matrix M.

Bemerkung 6.4. Wenn man eine Matrix $A = (a_{ij})_{ij}$ mit einem Spaltenvektor $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ multipliziert, so erhält man

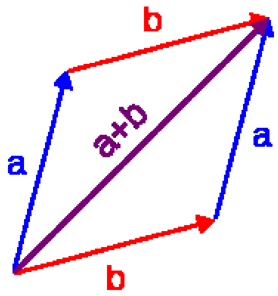
$$Ax = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}.$$

Damit lässt sich ein inhomogenes lineares Gleichungssystem mit dem *Störvektor* $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$ kurz schreiben als

$$Ax = c\,.$$

Die erlaubten Gleichungsumformungen durch Manipulationen an den Zeilen, die den Lösungsraum nicht ändern, können dann durch die entsprechenden Zeilenumformungen in der Matrix ersetzt werden. Man muss dann die Variablen nicht mitschleppen.

6.2. **Vektorräume.**



Die Addition von zwei Pfeilen a und b, ein typisches Beispiel für Vektoren.

Der zentrale Begriff der linearen Algebra ist der Vektorraum.

Definition 6.5. Es sei K ein Körper und V eine Menge mit einem ausgezeichneten Element $0 \in V$ und mit zwei Abbildungen

$$+ : V \times V \longrightarrow V,\ (u, v) \longmapsto u + v,$$

und

$$K \times V \longrightarrow V,\ (s, v) \longmapsto sv = s \cdot v.$$

Dann nennt man V einen K-*Vektorraum* (oder einen Vektorraum über K), wenn die folgenden Axiome erfüllt sind[12] (dabei seien $r, s \in K$ und $u, v, w \in V$ beliebig) [13]

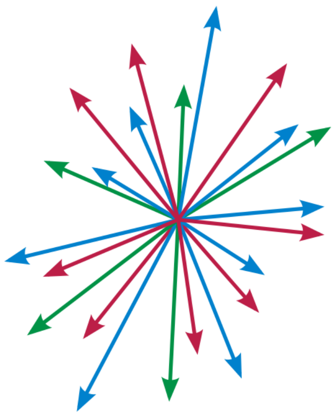
(1) $u + v = v + u$,
(2) $(u + v) + w = u + (v + w)$,
(3) $v + 0 = v$,
(4) Zu jedem v gibt es ein z mit $v + z = 0$,
(5) $r(su) = (rs)u$,
(6) $r(u + v) = ru + rv$,
(7) $(r + s)u = ru + su$,
(8) $1 \cdot u = u$.

Die Verknüpfung in V nennt man (Vektor)-Addition und die Operation $K \times V \to V$ nennt man *Skalarmultiplikation*. Die Elemente in einem Vektorraum nennt man *Vektoren*, und die Elemente $r \in K$ heißen *Skalare*. Das Nullelement $0 \in V$ wird auch als *Nullvektor* bezeichnet, und zu $v \in V$ heißt das inverse Element das *Negative* zu v und wird mit $-v$ bezeichnet. Den Körper, der im Vektorraumbegriff vorausgesetzt ist, nennt man auch den *Grundkörper*. Alle Begriffe der linearen Algebra beziehen sich auf einen

[12] Die ersten vier Axiome, die unabhängig von K sind, bedeuten, dass $(V, 0, +)$ eine kommutative Gruppe ist.

[13] Auch für Vektorräume gilt die *Klammerkonvention*, dass Punktrechnung stärker bindet als Strichrechnung.

solchen Grundkörper, er darf also nie vergessen werden, auch wenn er manchmal nicht explizit aufgeführt wird. Bei $K = \mathbb{R}$ spricht man von *reellen Vektorräumen* und bei $K = \mathbb{C}$ von *komplexen Vektorräumen*. Bei reellen und komplexen Vektorräumen gibt es zusätzliche Strukturen wie Längen, Winkel, Skalarprodukt. Zunächst entwickeln wir aber die algebraische Theorie der Vektorräume über einem beliebigen Körper.



Beispiel 6.6. Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}_+$. Dann ist die Produktmenge

$$K^n = \underbrace{K \times \cdots \times K}_{n-\text{mal}} = \{(x_1, \ldots, x_n) | \, x_i \in K\}$$

mit der komponentenweisen Addition und der durch

$$s(x_1, \ldots, x_n) = (sx_1, \ldots, sx_n)$$

definierten Skalarmultiplikation ein Vektorraum. Man nennt ihn den n-dimensionalen *Standardraum*. Insbesondere ist $K^1 = K$ selbst ein Vektorraum.

Der Nullraum 0, der aus dem einzigen Element 0 besteht, ist ebenfalls ein Vektorraum. Man kann ihn auch als $K^0 = 0$ auffassen.

Die Vektoren im Standardraum K^n kann man als Zeilenvektoren

$$(a_1, \, a_2, \, \ldots, \, a_n)$$

oder als Spaltenvektor

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

schreiben. Der Vektor

$$e_i := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

wobei die 1 an der i-ten Stelle steht, heißt i-ter *Standardvektor*.

Beispiel 6.7. Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ bilden einen Körper und daher bilden sie einen Vektorraum über sich selbst. Andererseits sind die komplexen Zahlen als additive Struktur gleich $\mathbb{R}^2$. Die Multiplikation einer komplexen Zahl $a + bi$ mit einer reellen Zahl $s = (s, 0)$ geschieht komponentenweise, d.h. diese Multiplikation stimmt mit der skalaren Multiplikation auf $\mathbb{R}^2$ überein. Daher sind die komplexen Zahlen auch ein reeller Vektorraum. Unter Verwendung einer späteren Terminologie kann man sagen, dass $\mathbb{C}$ ein eindimensionaler komplexer Vektorraum ist und dass $\mathbb{C}$ ein zweidimensionaler reeller Vektorraum ist mit der reellen Basis 1 und i.

Beispiel 6.8. Zu einem Körper K und gegebenen natürlichen Zahlen m, n bildet die Menge

$$\mathrm{Mat}_{m \times n}(K)$$

der $m \times n$-Matrizen mit komponentenweiser Addition und komponentenweiser Skalarmultiplikation einen K-Vektorraum. Das Nullelement in diesem Vektorraum ist die *Nullmatrix*

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Beispiel 6.9. Sei $R = K[X]$ der Polynomring in einer Variablen über dem Körper K. Mit der (komponentenweisen) Addition und der ebenfalls komponentenweisen Multiplikation mit einem Skalar $s \in K$ (was man auch als die Multiplikation mit dem konstanten Polynom s auffassen kann) ist der Polynomring ein K-Vektorraum.

Lemma 6.10. *Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Dann gelten die folgenden Eigenschaften (dabei sei $v \in V$ und $s \in K$).*

(1) *Es ist $0v = 0$.* [14]
(2) *Es ist $s0 = 0$.*
(3) *Es ist $(-1)v = -v$.*
(4) *Aus $s \neq 0$ und $v \neq 0$ folgt $sv \neq 0$.*

[14] Man mache sich hier und im Folgenden klar, wann die 0 in K und wann sie in V zu verstehen ist.

Beweis. Siehe Aufgabe 6.15. □

6.3. **Untervektorräume.**

Definition 6.11. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Eine Teilmenge $U \subseteq V$ heißt *Untervektorraum*, wenn die folgenden Eigenschaften gelten.

(1) $0 \in U$.
(2) Mit $u, v \in U$ ist auch $u + v \in U$.
(3) Mit $u \in U$ und $s \in K$ ist auch $su \in U$.

Auf einem solchen Untervektorraum kann man die Addition und die skalare Multiplikation einschränken. Daher ist ein Untervektorraum selbst ein Vektorraum, siehe Aufgabe 6.11. Die einfachsten Untervektorräume in einem Vektorraum V sind der Nullraum 0 und der gesamte Vektorraum V.

Lemma 6.12. *Es sei K ein Körper und*

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & 0 \end{array}$$

ein homogenes lineares Gleichungssystem über K. Dann ist die Menge aller Lösungen des Gleichungssystems ein Untervektorraum des K^n (mit komponentenweiser Addition und Skalarmultiplikation).

Beweis. Siehe Aufgabe 6.10. □

Man spricht daher auch vom *Lösungsraum* des Gleichungssystems. Insbesondere ist die Summe von zwei Lösungen eines linearen Gleichungssystems wieder eine Lösung. Die Lösungsmenge eines inhomogenen Gleichungssystems ist kein Vektorraum. Man kann aber zu einer Lösung eines inhomogenen Gleichungssystems eine Lösung des zugehörigen homogenen Gleichungssystems hinzuaddieren und erhält wieder eine Lösung des inhomogenen Gleichungssystems.

Beispiel 6.13. Wir knüpfen an die homogene Version von Beispiel 5.11 an, d.h. wir betrachten das homogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{cccccccc} 2x & +5y & +2z & & -v & = & 0 \\ 3x & -4y & & +u & +2v & = & 0 \\ 4x & & -2z & +2u & & = & 0\,. \end{array}$$

über $\mathbb{R}$. Aufgrund von Lemma 6.11 ist die Lösungsmenge L ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^5$. Wir haben ihn in Beispiel 5.11 explizit als

$$\left\{ u \left(-\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, 1, 0 \right) + v \left(-\frac{2}{13}, \frac{5}{13}, -\frac{12}{39}, 0, 1 \right) \mid u, v \in \mathbb{R} \right\}$$

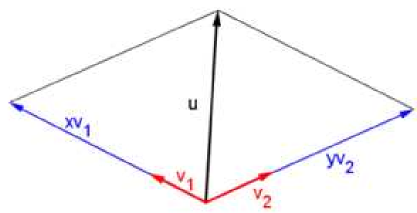
beschrieben, woraus ebenfalls erkennbar ist, dass dieser Lösungsraum ein Vektorraum ist. In dieser Schreibweise wird klar, dass L in Bijektion zu $\mathbb{R}^2$ steht, und zwar respektiert diese Bijektion sowohl die Addition als auch die Skalarmultiplikation (der Lösungsraum L' des inhomogenen Systems steht ebenfalls in Bijektion zu $\mathbb{R}^2$, allerdings gibt es keine sinnvolle Addition und Skalarmultiplikation auf L'). Allerdings hängt diese Bijektion wesentlich von den gewählten „Basislösungen" $\left(-\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, 1, 0\right)$ und $\left(-\frac{2}{13}, \frac{5}{13}, -\frac{12}{39}, 0, 1\right)$ ab, die von der gewählten Eliminationsreihenfolge abhängen. Es gibt für L andere gleichberechtigte Basislösungen.

An diesem Beispiel kann man sich Folgendes klar machen: Der Lösungsraum eines linearen Gleichungssystems über K ist „in natürlicher Weise", d.h. unabhängig von jeder Auswahl, ein Untervektorraum des K^n (wenn n die Anzahl der Variablen ist). Der Lösungsraum kann auch stets in eine „lineare Bijektion" (eine „Isomorphie") mit einem K^d ($d \leq n$) gebracht werden, doch gibt es dafür keine natürliche Wahl. Dies ist einer der Hauptgründe dafür, mit dem abstrakten Vektorraumbegriff zu arbeiten anstatt lediglich mit dem K^n.

7. Vorlesung

Die Lösungsmenge eines homogenen linearen Gleichungssystems in n Variablen über einem Körper K ist ein Untervektorraum des K^n. Häufig wird dieser Lösungsraum durch die Menge aller „Linearkombinationen" von endlich vielen (besonders einfachen) Lösungen beschrieben. In dieser und der nächsten Vorlesung entwickeln wir die dazu notwendigen Begriffe.

7.1. **Erzeugendensysteme.**



Die von zwei Vektoren v_1 und v_2 erzeugte Ebene besteht aus allen Linearkombination $u = xv_1 + yv_2$.

Definition 7.1. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Es sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Familie von Vektoren in V. Dann heißt der Vektor

$$s_1 v_1 + s_2 v_2 + \ldots + s_n v_n \text{ mit } s_i \in K$$

eine *Linearkombination* dieser Vektoren (zum *Koeffiziententupel* $(s_1, \ldots, s_n)$).

Zwei unterschiedliche Koeffiziententupel können denselben Vektor definieren.

Definition 7.2. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Dann heißt eine Familie $v_i \in V$, $i \in I$, ein *Erzeugendensystem* von V, wenn man jeden Vektor $v \in V$ darstellen kann als[15]

$$v = \sum_{j \in J} s_j v_j$$

mit einer endlichen Teilfamilie $J \subseteq I$ und mit $s_j \in K$.

Im K^n bilden die Standardvektoren e_i, $1 \leq i \leq n$, ein Erzeugendensystem. Im Polynomring $K[X]$ bilden die Potenzen X^n, $n \in \mathbb{N}$, ein (unendliches) Erzeugendensystem.

Definition 7.3. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Zu einer Familie v_i, $i \in I$, setzt man

$$\langle v_i,\, i \in I \rangle = \left\{ \sum_{i \in J} s_i v_i |\, s_i \in K,\, J \subseteq I \text{ endliche Teilmenge} \right\}$$

und nennt dies den von der Familie *erzeugten* oder *aufgespannten Untervektorraum.*

Der von der leeren Menge erzeugte Unterraum ist der Nullraum.[16] Dieser wird ebenso von der 0 erzeugt. Zu einem einzigen Vektor v besteht der aufgespannte Raum aus $Kv = \{sv |\, s \in K\}$. Bei $v \neq 0$ ist dies eine *Gerade*, was wir im Rahmen der Dimensionstheorie noch präzisieren werden. Bei zwei Vektoren v und w hängt die „Gestalt" des aufgespannten Raumes davon ab, wie die beiden Vektoren sich zueinander verhalten. Wenn sie beide auf einer Geraden liegen, d.h. wenn gilt $w = sv$, so ist w überflüssig und der von den beiden Vektoren erzeugte Unterraum stimmt mit dem von v erzeugten Unterraum überein. Wenn dies nicht der Fall ist (und v und w nicht 0 sind), so erzeugen die beiden Vektoren eine „Ebene".

Wir fassen einige einfache Eigenschaften für Erzeugendensysteme und Unterräume zusammen.

Lemma 7.4. *Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Dann gelten folgende Aussagen.*

---

[15] Es bedeutet keinen Verständnisverlust, wenn man hier nur endliche Familien betrachtet. Das Summenzeichen über eine endliche Indexmenge bedeutet einfach, dass alle Elemente der Familie aufzusummieren sind.

[16] Dies kann man als Definition nehmen oder aber aus der Definition ableiten, wenn man die Konvention berücksichtigt, dass die leere Summe gleich 0 ist.

(1) *Sei U_j, $j \in J$, eine Familie von Unterverktorräumen. Dann ist auch der Durchschnitt*[17]

$$U = \bigcap_{j \in J} U_j$$

ein Unterveктorraum.

(2) *Zu einer Familie v_i, $i \in I$, von Elementen in V ist der erzeugte Unterraum ein Unterraum*[18] *von V.*

(3) *Die Familie v_i, $i \in I$, ist genau dann ein Erzeugendensystem von V, wenn*

$$\langle v_i,\, i \in I \rangle = V$$

ist.

Beweis. Siehe Aufgabe 7.4. □

7.2. **Lineare Unabhängigkeit.**

Definition 7.5. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Dann heißt eine Familie von Vektoren v_i, $i \in I$, (mit einer beliebigen endlichen Indexmenge I) *linear unabhängig*, wenn eine Gleichung

$$\sum_{i \in I} s_i v_i = 0 \text{ mit } s_i \in K$$

nur bei $s_i = 0$ für alle i möglich ist.

Wenn eine Familie nicht linear unabhängig ist, so nennt man sie *linear abhängig*. Man nennt übrigens eine Linearkombination $\sum_{i \in I} a_i v_i = 0$ eine *Darstellung des Nullvektors*. Sie heißt die *triviale Darstellung*, wenn alle Koeffizienten a_i null sind, andernfalls, wenn also mindestens ein Koeffizient nicht null ist, spricht man von einer *nichttrivialen Darstellung der Null*. Eine Familie von Vektoren ist genau dann linear unabhängig, wenn man mit ihnen nur auf die triviale Art den Nullvektor darstellen kann. Dies ist auch äquivalent dazu, dass man keinen Vektor aus der Familie als Linearkombination der anderen ausdrücken kann.

Lemma 7.6. *Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und v_i, $i \in I$, eine Familie von Vektoren in V. Dann gelten folgende Aussagen.*

(1) *Wenn die Familie linear unabhängig ist, so ist auch zu jeder Teilmenge $J \subseteq I$ die Familie v_i , $i \in J$, linear unabhängig.*

(2) *Die leere Familie ist linear unabhängig.*

(3) *Wenn die Familie den Nullvektor enthält, so ist sie nicht linear unabhängig.*

[17]Der Durchschnitt $\bigcap_{j \in J} T_j$ zu einer beliebigen Indexmenge J und einer durch J indizierten Familie T_j, $j \in J$, von Teilmengen einer festen Obermenge M besteht aus allen Elementen aus M, die in allen Mengen T_j enthalten sind.

[18]In der Bezeichnung „erzeugter Unterraum“ wurde diese Eigenschaft schon vorweg genommen.

(4) *Wenn in der Familie ein Vektor mehrfach vorkommt, so ist sie nicht linear unabhängig.*
(5) *Ein Vektor v ist genau dann linear unabhängig, wenn $v \neq 0$ ist.*
(6) *Zwei Vektoren v und u sind genau dann linear unabhängig, wenn weder u ein skalares Vielfaches von v ist noch umgekehrt.*

Beweis. Siehe Aufgabe 7.7. □

Beispiel 7.7. Die Standardvektoren im K^n sind linear unabhängig. Eine Darstellung

$$\sum_{i=1}^{n} s_i e_i = 0$$

bedeutet ja einfach

$$s_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + s_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + s_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

woraus sich aus der i-ten Zeile direkt $s_i = 0$ ergibt.

Beispiel 7.8. Die drei Vektoren

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$$

sind linear abhängig. Es ist nämlich

$$4 \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

eine nichttriviale Darstellung des Nullvektors.

Bemerkung 7.9. Die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \ldots, v_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \in K^m$ sind genau dann linear abhängig, wenn das homogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & 0 \end{array}$$

eine nichttriviale (d.h. von 0 verschiedene) Lösung besitzt.

7.3. **Basen.**

Definition 7.10. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Dann heißt ein linear unabhängiges Erzeugendensystem $v_i \in V$, $i \in I$, von V eine *Basis* von V.

Beispiel 7.11. Die Standardvektoren im K^n bilden eine Basis. Die lineare Unabhängigkeit wurde in Beispiel 7.7 gezeigt. Um zu zeigen, dass auch ein Erzeugendensystem vorliegt, sei $v = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in K^n$ ein beliebiger Vektor. Dann ist aber direkt

$$v = \sum_{i=1}^{n} b_i e_i .$$

Also liegt eine Basis vor, die man die *Standardbasis* des K^n nennt.

Satz 7.12. *Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Es sei $v_1, \ldots, v_n \in V$ eine Familie von Vektoren. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

(1) *Die Familie ist eine Basis von V.*
(2) *Die Familie ist ein minimales Erzeugendensystem, d.h. sobald man einen Vektor v_i weglässt, liegt kein Erzeugendensystem mehr vor.*
(3) *Für jeden Vektor $u \in V$ gibt es genau eine Darstellung*

$$u = s_1 v_1 + \ldots + s_n v_n .$$

(4) *Die Familie ist maximal linear unabhängig, d.h. sobald man irgendeinen Vektor dazunimmt, ist die Familie nicht mehr linear unabhängig.*

Beweis. Wir führen einen Ringschluss durch. (1) $\Rightarrow$ (2). Die Familie ist ein Erzeugendensystem. Nehmen wir einen Vektor, sagen wir v_1, aus der Familie heraus. Wir müssen zeigen, dass dann die verbleibende Familie, also $v_2, \ldots, v_n$ kein Erzeugendensystem mehr ist. Wenn sie ein Erzeugendensystem wäre, so wäre insbesondere v_1 als Linearkombination der Vektoren darstellbar, d.h. man hätte

$$v_1 = \sum_{i=2}^{n} s_i v_i .$$

Dann ist aber

$$v_1 - \sum_{i=2}^{n} s_i v_i = 0$$

eine nichttriviale Darstellung der 0, im Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit der Familie. (2) $\Rightarrow$ (3). Nach Voraussetzung ist die Familie ein Erzeugendensystem, so dass sich jeder Vektor als Linearkombination darstellen lässt. Angenommen, es gibt für ein $u \in V$ eine mehrfache Darstellung, d.h.

$$u = \sum_{i=1}^{n} s_i v_i = \sum_{i=1}^{n} t_i v_i,$$

wobei mindestens ein Koeffizient verschieden sei. Ohne Einschränkung sei $s_1 \neq t_1$. Dann erhält man die Beziehung

$$(s_1 - t_1)v_1 = \sum_{i=2}^{n} (t_i - s_i)v_i \,.$$

Wegen $s_1 - t_1 \neq 0$ kann man durch diese Zahl dividieren und erhält eine Darstellung von v_1 durch die anderen Vektoren. Nach Aufgabe 7.3 ist auch die Familie ohne v_1 ein Erzeugendensystem von V, im Widerspruch zur Minimalität. (3) $\Rightarrow$ (4). Wegen der eindeutigen Darstellbarkeit besitzt insbesondere der Nullvektor nur die triviale Darstellung, d.h. die Vektoren sind linear unabhängig. Nimmt man einen Vektor u hinzu, so besitzt dieser eine Darstellung

$$u = \sum_{i=1}^{n} s_i v_i$$

und daher ist

$$0 = u - \sum_{i=1}^{n} s_i v_i$$

eine nichttriviale Darstellung der 0, so dass die verlängerte Familie $u, v_1, \ldots, v_n$ nicht linear unabhängig ist. (4) $\Rightarrow$ (1). Die Familie ist linear unabhängig, wir müssen zeigen, dass sie auch ein Erzeugendensystem bildet. Sei dazu $u \in V$. Nach Voraussetzung ist die Familie $u, v_1, \ldots, v_n$ nicht linear unabhängig, d.h. es gibt eine nichttriviale Darstellung

$$0 = su + \sum_{i=1}^{n} s_i v_i \,.$$

Dabei ist $s \neq 0$, da andernfalls dies eine nichttriviale Darstellung der 0 allein mit den linear unabhängigen Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ wäre. Daher können wir

$$u = -\sum_{i=1}^{n} \frac{s_i}{s} v_i$$

schreiben, so dass eine Darstellung von u möglich ist. $\square$

Bemerkung 7.13. Es sei eine Basis $v_1, \ldots, v_n$ eines K-Vektorraums V gegeben. Aufgrund von Satz 7.12 bedeutet dies, dass es für jeden Vektor $u \in V$ eine eindeutig bestimmte Darstellung (eine Linearkombination)

$$u = s_1 v_1 + s_2 v_2 + \ldots + s_n v_n$$

gibt. Die dabei eindeutig bestimmten Elemente $s_i \in K$ (Skalare) heißen die *Koordinaten* von u bezüglich der gegebenen Basis. Bei einer gegebenen Basis entsprechen sich also die Vektoren und die Koordinatentupel

$(s_1, s_2, \ldots, s_n) \in K^n$. Man sagt, dass eine Basis ein *lineares Koordinatensystem* festlegt.[19]

Satz 7.14. *Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum mit einem endlichen Erzeugendensystem. Dann besitzt V eine endliche Basis.*

Beweis. Es sei v_i, $i \in I$, ein Erzeugendensystem von V mit einer endlichen Indexmenge I. Wir wollen mit der Charakterisierung aus Satz 7.12 argumentieren. Falls die Familie schon minimal ist, so liegt eine Basis vor. Andernfalls gibt es ein $k \in I$ derart, dass die um v_k reduzierte Familie, also v_i, $i \in I \setminus \{k\}$, ebenfalls ein Erzeugendensystem ist. In diesem Fall kann man mit der kleineren Indexmenge weiterargumentieren. Mit diesem Verfahren gelangt man letztlich zu einer Teilmenge $J \subseteq I$ derart, dass v_i, $i \in J$, ein minimales Erzeugendensystem, also eine Basis ist. □

8. Vorlesung

8.1. Dimensionstheorie.

Ein endlich erzeugter Vektorraum hat im Allgemeinen ganz unterschiedliche Basen. Allerdings ist die Anzahl der Elemente in einer Basis stets konstant und hängt nur vom Vektorraum ab. Diese wichtige Eigenschaft werden wir jetzt beweisen und als Ausgangspunkt für die Definition der Dimension eines Vektorraums nehmen.

Lemma 8.1. *Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum mit einer Basis $v_1, \ldots, v_n$. Es sei $w \in V$ ein Vektor mit einer Darstellung*

$$w = \sum_{i=1}^{n} s_i v_i \, ,$$

wobei $s_k \neq 0$ sei für ein bestimmtes k. Dann ist auch die Familie

$$v_1, \ldots, v_{k-1}, w, v_{k+1}, \ldots, v_n$$

eine Basis von V.

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass die neue Familie ein Erzeugendensystem ist. Zunächst kann man wegen

$$w = \sum_{i=1}^{n} s_i v_i$$

[19] Lineare Koordinaten vermitteln also eine bijektive Beziehung zwischen Punkten und Zahlentupeln. Aufgrund der Linearität ist eine solche Bijektion mit der Addition und der Skalarmultiplikation verträglich. In vielen anderen Kontexten spielen auch nichtlineare (oder krummlinige) Koordinaten eine wichtige Rolle. Auch diese setzen Raumpunkte mit Zahlentupel in eine bijektive Verbindung. Wichtige nichtlineare Koordinaten sind u.A. Polarkoordinaten, Zylinderkoordinaten und Kugelkoordinaten. Mathematische Probleme können häufig durch eine geeignete Wahl von Koordinaten vereinfacht werden, beispielsweise bei Volumenberechnungen.

und $s_k \neq 0$ den Vektor v_k als

$$v_k = \frac{1}{s_k}w - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{s_i}{s_k} v_i - \sum_{i=k+1}^{n} \frac{s_i}{s_k} v_i$$

schreiben. Sei nun $u \in V$ beliebig vorgegeben. Dann kann man schreiben

$$\begin{aligned}
u &= \sum_{i=1}^{n} t_i v_i \\
&= \sum_{i=1}^{k-1} t_i v_i + t_k v_k + \sum_{i=k+1}^{n} t_i v_i \\
&= \sum_{i=1}^{k-1} t_i v_i + t_k \left(\frac{1}{s_k} w - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{s_i}{s_k} v_i - \sum_{i=k+1}^{n} \frac{s_i}{s_k} v_i \right) + \sum_{i=k+1}^{n} t_i v_i \\
&= \sum_{i=1}^{k-1} \left(t_i - t_k \frac{s_i}{s_k} \right) v_i + \frac{t_k}{s_k} w + \sum_{i=k+1}^{n} \left(t_i - t_k \frac{s_i}{s_k} \right) v_i .
\end{aligned}$$

Zum Nachweis der linearen Unabhängigkeit nehmen wir zwecks Notationsvereinfachung $k = 1$ an. Es sei

$$t_1 w + \sum_{i=2}^{n} t_i v_i = 0$$

eine Darstellung der Null. Dann ist

$$0 = t_1 w + \sum_{i=2}^{n} t_i v_i = t_1 \left(\sum_{i=1}^{n} s_i v_i \right) + \sum_{i=2}^{n} t_i v_i = t_1 s_1 v_1 + \sum_{i=2}^{n} (t_1 s_i + t_i) v_i .$$

Aus der linearen Unabhängigkeit der Ausgangsfamilie folgt insbesondere $t_1 s_1 = 0$, und wegen $s_1 \neq 0$ ergibt sich $t_1 = 0$. Deshalb ist $\sum_{i=2}^{n} t_i v_i = 0$ und daher gilt $t_i = 0$ für alle i. $\square$

Die vorstehende Aussage heißt *Austauschlemma*, die nachfolgende *Austauschsatz.*

Satz 8.2. *Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum mit einer Basis*

$$b_1, \ldots, b_n .$$

Ferner sei

$$u_1, \ldots, u_k$$

eine Familie von linear unabhängigen Vektoren in V. Dann gibt es eine Teilmenge $J = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \subseteq \{1, \ldots, n\} = I$ derart, dass die Familie

$$u_1, \ldots, u_k, b_i, i \in I \setminus J ,$$

eine Basis von V ist. Insbesondere ist $k \leq n$.

Beweis. Wir führen Induktion über k, also über die Anzahl der Vektoren in der Familie. Bei $k = 0$ ist nichts zu zeigen. Sei die Aussage für k schon bewiesen und seien $k + 1$ linear unabhängige Vektoren

$$u_1, \dots, u_k, u_{k+1}$$

gegeben. Nach Induktionsvoraussetzung, angewandt auf die (ebenfalls linear unabhängigen) Vektoren

$$u_1, \dots, u_k$$

gibt es eine Teilmenge $J = \{i_1, i_2, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, n\}$ derart, dass die Familie

$$u_1, \dots, u_k, b_i, i \in I \setminus J\,,$$

eine Basis von V ist. Wir wollen auf diese Basis Lemma 8.1 anwenden. Da eine Basis vorliegt, kann man

$$u_{k+1} = \sum_{j=1}^{k} c_j u_j + \sum_{i \in I \setminus J} d_i b_i$$

schreiben. Wären hierbei alle Koeffizienten $d_i = 0$, so ergäbe sich sofort ein Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit der u_j, $j = 1, \dots, k + 1$. Es gibt also ein $i \in I \setminus J$ mit $d_i \neq 0$. Wir setzen $i_{k+1} := i$. Damit ist $J' = \{i_1, i_2, \dots, i_k, i_{k+1}\}$ eine $(k + 1)$-elementige Teilmenge von $\{1, \dots, n\}$. Nach dem Austauschlemma kann man den Basisvektor $b_{i_{k+1}}$ durch u_{k+1} ersetzen und erhält die neue Basis

$$u_1, \dots, u_k, u_{k+1}, b_i, i \in I \setminus J'\,.$$

Der Zusatz folgt sofort, da eine k-elementige Teilmenge einer n-elementigen Menge vorliegt. □

Satz 8.3. *Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum mit einem endlichen Erzeugendensystem. Dann besitzen je zwei Basen von V die gleiche Anzahl von Basisvektoren.*

Beweis. Es seien $\mathfrak{b} = b_1, \dots, b_n$ und $\mathfrak{u} = u_1, \dots, u_k$ zwei Basen von V. Aufgrund des Basisaustauschsatzes, angewandt auf die Basis $\mathfrak{b}$ und die linear unabhängige Familie $\mathfrak{u}$ ergibt sich $k \leq n$. Wendet man den Austauschsatz umgekehrt an, so folgt $n \leq k$, also insgesamt $n = k$. □

Dieser Satz erlaubt die folgende Definition.

Definition 8.4. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum mit einem endlichen Erzeugendensystem. Dann nennt man die Anzahl der Vektoren in einer Basis von V die *Dimension* von V, geschrieben

$$\dim(V)\,.$$

Wenn ein Vektorraum nicht endlich erzeugt ist, so setzt man $\dim(V) = \infty$. Der Nullraum 0 hat die Dimension 0. Einen eindimensionalen Vektorraum nennt man auch eine *Gerade*, einen zweidimensionalen Vektorraum eine *Ebene*, einen dreidimensionalen Vektorraum einen *Raum* (im engeren Sinn), wobei man andererseits auch jeden Vektorraum einen Raum nennt.

Korollar 8.5. *Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Dann besitzt der Standardraum K^n die Dimension n.*

Beweis. Die Standardbasis e_i, $i = 1, \ldots, n$, besteht aus n Vektoren, also ist die Dimension n. □

Beispiel 8.6. Die komplexen Zahlen bilden einen zweidimensionalen reellen Vektorraum, eine Basis ist z.B. 1 und i.

Beispiel 8.7. Der Polynomring $R = K[X]$ über einem Körper K ist kein endlichdimensionaler Vektorraum. Seien n Polynome $P_1, \ldots, P_n$ fixiert. Es sei d das Maximum der Grade dieser Polynome. Dann hat auch jede K-Linearkombination $\sum_{i=1}^n a_i P_i$ maximal den Grad d. Insbesondere können Polynome von einem größeren Grad nicht durch $P_1, \ldots, P_n$ dargestellt werden. Es gibt also kein endliches Erzeugendensystem.

Korollar 8.8. *Es sei K ein Körper und V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei $U \subseteq V$ ein Unterraum. Dann ist U ebenfalls endlichdimensional und es gilt*

$$\dim(U) \leq \dim(V) .$$

Beweis. Jede linear unabhängige Familie in U ist auch linear unabhängig in V. Daher kann es aufgrund des Basisaustauschsatzes in U nur linear unabhängige Familien der Länge $\leq n$ geben. Es sei $k \leq n$ derart, dass es in U eine linear unabhängige Familie mit k Vektoren gibt, aber nicht mit $k+1$ Vektoren. Sei $\mathfrak{u} = u_1, \ldots, u_k$ eine solche Familie. Diese ist dann insbesondere eine maximal linear unabhängige Familie in U und daher wegen Satz 7.12 eine Basis von U. □

Korollar 8.9. *Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum mit endlicher Dimension $n = \dim(V)$. Es seien n Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ in V gegeben. Dann sind folgende Eigenschaften äquivalent.*

(1) *$v_1, \ldots, v_n$ bilden eine Basis von V.*
(2) *$v_1, \ldots, v_n$ bilden ein Erzeugendensystem von V.*
(3) *$v_1, \ldots, v_n$ sind linear unabhängig.*

Beweis. Siehe Aufgabe 8.1. □

Beispiel 8.10. Es sei K ein Körper. Man kann sich einfach einen Überblick über die Unterräume des K^n verschaffen, als Dimension von Unterräumen kommt nur k mit $0 \leq k \leq n$ in Frage. Bei $n = 0$ gibt es nur den Nullraum selbst, bei $n = 1$ gibt es den Nullraum und K selbst. Bei $n = 2$ gibt es den

Nullraum, die gesamte Ebene K^2, und die eindimensionalen Geraden durch den Nullpunkt. Jede solche Gerade G hat die Gestalt

$$G = Kv = \{sv|\, s \in K\}$$

mit einem von 0 verschiedenen Vektor v. Zwei von null verschiedene Vektoren definieren genau dann die gleiche Gerade, wenn sie linear abhängig sind.

Bei $n = 3$ gibt es den Nullraum, den Gesamtraum K^3, die eindimensionalen Geraden durch den Nullpunkt und die zweidimensionalen Ebenen durch den Nullpunkt.

Der folgende Satz heißt *Basisergänzungssatz.*

Satz 8.11. *Es sei K ein Körper und V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum der Dimension $n = \dim(V)$. Es seien*

$$u_1, \ldots, u_k$$

linear unabhängige Vektoren in V Dann gibt es Vektoren

$$u_{k+1}, \ldots, u_n$$

derart, dass

$$u_1, \ldots, u_k, u_{k+1}, \ldots, u_n$$

eine Basis von V bilden.

Beweis. Es sei $b_1, \ldots, b_n$ eine Basis von V. Aufgrund des Austauschsatzes findet man $n-k$ Vektoren aus der Basis $\mathfrak{b}$, die zusammen mit den vorgegebenen $u_1, \ldots, u_k$ eine Basis von V bilden. $\square$

8.2. **Basiswechsel.**

Wir wissen bereits, dass in einem endlichdimensionalen Vektorraum je zwei Basen die gleiche Länge haben, also die gleiche Anzahl von Basisvektoren besitzen. Jeder Vektor besitzt bezüglich einer jeden Basis eindeutig bestimmte Koordinaten (oder Koeffizienten). Wir verhalten sich diese Koordinaten zu zwei Basen untereinander? Dies beantwortet die folgende Aussage.

Lemma 8.12. *Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum der Dimension n. Es seien $\mathfrak{v} = v_1, \ldots, v_n$ und $\mathfrak{u} = u_1, \ldots, u_n$ zwei Basen von V. Es sei*

$$v_j = \sum_{i=1}^{n} c_{ij} u_i$$

mit den Koeffizienten $c_{ij} \in K$, die wir zur $n \times n$-Matrix

$$M_{\mathfrak{u}}^{\mathfrak{v}} = (c_{ij})_{ij}$$

zusammenfassen. Dann hat ein Vektor w, der bezüglich der Basis $\mathfrak{v}$ die Koordinaten $\begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}$ besitzt, bezüglich der Basis $\mathfrak{u}$ die Koordinaten

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix} = M_{\mathfrak{u}}^{\mathfrak{v}} \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}.$$

Beweis. Dies folgt direkt aus

$$w = \sum_{j=1}^{n} s_j v_j = \sum_{j=1}^{n} s_j \left(\sum_{i=1}^{n} c_{ij} u_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} s_j c_{ij} \right) u_i$$

und der Definition der Matrizenmultiplikation. □

Die Matrix $M_{\mathfrak{u}}^{\mathfrak{v}}$, die den Basiswechsel von $\mathfrak{v}$ nach $\mathfrak{u}$ beschreibt, nennt man auch die *Transformationsmatrix* (oder *Übergangsmatrix*). In der j-ten Spalte der Transformationsmatrix stehen also die Koordinaten von v_j bezüglich der Basis $\mathfrak{u}$.

Beispiel 8.13. Wir betrachen im $\mathbb{R}^2$ die Standardbasis

$$\mathfrak{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und die Basis

$$\mathfrak{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Die Basisvektoren von $\mathfrak{v}$ lassen sich direkt mit der Standardbasis ausdrücken, nämlich

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Daher erhält man sofort

$$M_{\mathfrak{u}}^{\mathfrak{v}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Zum Beispiel hat der Vektor, der bezüglich $\mathfrak{v}$ die Koordinaten $(4, -3)$ besitzt, bezüglich der Standardbasis $\mathfrak{u}$ die Koordinaten

$$M_{\mathfrak{u}}^{\mathfrak{v}} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Die Übergangsmatrix $M_{\mathfrak{v}}^{\mathfrak{u}}$ ist schwieriger zu bestimmen: Dazu müssen wir die Standardvektoren als Linearkombinationen von v_1 und v_2 ausdrücken. Eine direkte Rechnung (dahinter steckt das Lösen von zwei linearen Gleichungssystemen) ergibt

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{3}{7}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{2}{7}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{2}{7}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Somit ist

$$M_{\mathfrak{v}}^{\mathfrak{u}} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}.$$

9. Vorlesung

9.1. **Lineare Abbildungen.**

Definition 9.1. Es sei K ein Körper und es seien V und W Vektorräume über K. Eine Abbildung

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

heißt *lineare Abbildung*, wenn die beiden folgenden Eigenschaften erfüllt sind.

(1) $\varphi(u+v) = \varphi(u) + \varphi(v)$ für alle $u, v \in V$.
(2) $\varphi(sv) = s\varphi(v)$ für alle $s \in K$ und $v \in V$.

Die erste Eigenschaft nennt man dabei die *Additivität* und die zweite Eigenschaft die *Verträglichkeit mit Skalierung*. Wenn man den Grundkörper betonen möchte spricht man von K-Linearität. Die Identität $\mathrm{Id}_V : V \to V$, die Nullabbildung $V \to 0$ und die Inklusionen $U \subseteq V$ von Untervektorräumen sind die einfachsten Beispiele für lineare Abbildungen.

Beispiel 9.2. Es sei K ein Körper und sei K^n der n-dimensionale Standardraum. Dann ist die i-te *Projektion*, also die Abbildung

$$K^n \longrightarrow K,\ (a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_n) \longmapsto a_i,$$

eine K-lineare Abbildung. Dies folgt unmittelbar aus der komponentenweisen Addition und Skalarmultiplikation auf dem Standardraum. Die i-te Projektion heißt auch die i-te *Koordinatenfunktion*.

Lemma 9.3. *Es sei K ein Körper und seien U, V, W Vektorräume über K. Es seien*

$$\varphi : U \to V \text{ und } \psi : V \to W$$

lineare Abbildungen. Dann ist auch die Verknüpfung

$$\psi \circ \varphi : U \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung.

Beweis. Siehe Aufgabe 9.7. □

Lemma 9.4. *Es sei K ein Körper und es seien V und W zwei K-Vektorräume. Es sei*

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

eine bijektive lineare Abbildung. Dann ist auch die Umkehrabbildung

$$\varphi^{-1} : W \longrightarrow V$$

linear.

Beweis. Siehe Aufgabe 10.3. □

9.2. **Festlegung auf einer Basis.**

Hinter der folgenden Aussage (dem *Festlegungssatz*) steckt das wichtige Prinzip, dass in der linearen Algebra (von endlichdimensionalen Vektorräumen) die Objekte durch endlich viele Daten bestimmt sind.

Satz 9.5. *Es sei K ein Körper und es seien V und W Vektorräume über K. Es sei v_i, $i \in I$, eine endliche Basis von V und es seien w_i, $i \in I$, Elemente in W. Dann gibt es genau eine lineare Abbildung*

$$f : V \longrightarrow W$$

mit

$$f(v_i) = w_i \text{ für alle } i \in I .$$

Beweis. Da $f(v_i) = w_i$ sein soll und eine lineare Abbildung für jede Linearkombination die Eigenschaft

$$f\left(\sum_{i \in I} s_i v_i\right) = \sum_{i \in I} s_i f(v_i)$$

erfüllt, und jeder Vektor $v \in V$ sich als eine solche Linearkombination schreiben lässt, kann es maximal nur eine solche lineare Abbildung geben. Wir definieren nun umgekehrt eine Abbildung

$$f : V \longrightarrow W,$$

indem wir jeden Vektor $v \in V$ mit der gegebenen Basis als

$$v = \sum_{i \in I} s_i v_i$$

schreiben und

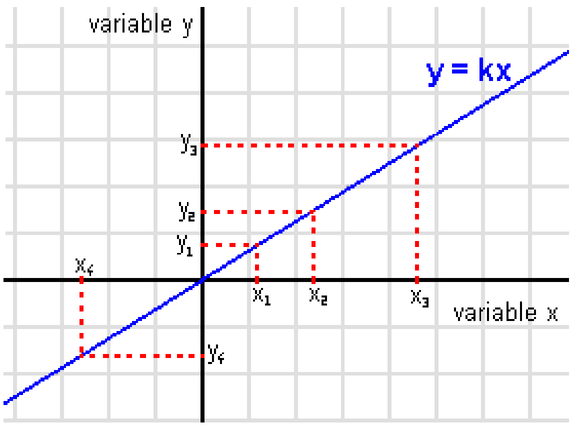
$$f(v) := \sum_{i \in I} s_i w_i$$

ansetzen. Da die Darstellung von v als eine solche Linearkombination eindeutig ist, ist diese Abbildung wohldefiniert. Zur Linearität. Für zwei Vektoren $u = \sum_{i \in I} s_i v_i$ und $v = \sum_{i \in I} t_i v_i$ gilt

$$f(u + v) = f\left(\sum_{i \in I} s_i v_i + \sum_{i \in I} t_i v_i\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= f\left(\sum_{i\in I}(s_i+t_i)v_i\right)\\
&= \sum_{i\in I}(s_i+t_i)f(v_i)\\
&= \sum_{i\in I}s_if(v_i)+\sum_{i\in I}t_if(v_i)\\
&= f\left(\sum_{i\in I}s_iv_i\right)+f\left(\sum_{i\in I}t_iv_i\right)\\
&= f(u)+f(v).
\end{aligned}
$$

Die Verträglichkeit mit der skalaren Multiplikation ergibt sich ähnlich. $\square$



Der Funktionsgraph einer linearen Abbildung von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$, die Abbildung ist allein durch den Proportionalitätsfaktor k festgelegt.

Beispiel 9.6. Die einfachsten linearen Abbildungen sind (neben der Nullabbildung) diejenigen von K nach K. Eine solche lineare Abbildung

$$\varphi : K \longrightarrow K,\ x \longmapsto \varphi(x),$$

ist aufgrund von Satz 9.5 bzw. direkt aufgrund der Definition durch $\varphi(1)$ bzw. durch den Wert $\varphi(s)$ für ein einziges $s \in K$, $s \neq 0$, festgelegt. Es ist also $\varphi(x) = ax$ mit einem eindeutig bestimmten $a \in K$. Insbesondere im physikalischen Kontext, wenn $K = \mathbb{R}$ ist und wenn zwischen zwei messbaren Größen ein linearer Zusammenhang besteht, spricht man von *Proportionalität*, und a heißt der *Proportionalitätsfaktor*. In der Schule tritt die lineare Beziehung zwischen zwei skalaren Größen als „Dreisatz“ auf.

9.3. **Lineare Abbildungen und Matrizen.**

Eine lineare Abbildung

$$\varphi : K^n \longrightarrow K^m$$

ist durch die Bilder $\varphi(e_j)$, $j = 1, \ldots, n$, der Standardvektoren eindeutig festgelegt, und jedes $\varphi(e_j)$ ist eine Linearkombination

$$\varphi(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} e_i$$

und damit durch die Elemente a_{ij} eindeutig festgelegt. Insgesamt ist also eine solche lineare Abbildung durch mn Elemente a_{ij}, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, festgelegt. Eine solche Datenmenge kann man wieder als Matrix schreiben. Nach dem Festlegungssatz gilt dies, sobald sowohl im Definitionsraum als auch im Zielraum der linearen Abbildung eine Basis fixiert ist.

Definition 9.7. Es sei K ein Körper und sei V ein n-dimensionaler Vektorraum mit einer Basis $\mathfrak{v} = v_1, \ldots, v_n$ und sei W ein m-dimensionaler Vektorraum mit einer Basis $\mathfrak{w} = w_1, \ldots, w_m$.

Zu einer linearen Abbildung

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

heißt die $m \times n$-Matrix

$$M = M_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{v}}(\varphi) = (a_{ij})_{ij}$$

wobei a_{ij} die i-te Koordinate von $\varphi(v_j)$ bzgl. der Basis $\mathfrak{w}$ ist, die *beschreibende Matrix zu* φ bzgl. der Basen.

Zu einer Matrix $M = (a_{ij})_{ij} \in \operatorname{Mat}_{m \times n}(K)$ heißt die durch

$$v_j \longmapsto \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i$$

gemäß Satz 9.5 definierte lineare Abbildung $\varphi_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{v}}(M)$ die *durch M festgelegte lineare Abbildung.*

Die Identität auf einem Vektorraum der Dimension n wird bezüglich einer beliebigen Basis durch die Einheitsmatrix beschrieben.

Satz 9.8. *Es sei K ein Körper und sei V ein n-dimensionaler Vektorraum mit einer Basis $\mathfrak{v} = v_1, \ldots, v_n$ und sei W ein m-dimensionaler Vektorraum mit einer Basis $\mathfrak{w} = w_1, \ldots, w_m$. Dann sind die in der Definition festgelegten Abbildungen*

$$\varphi \longmapsto M_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{v}}(\varphi) \text{ und } M \longmapsto \varphi_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{v}}(M)$$

invers zueinander.

Beweis. Dieser Beweis wurde in der Vorlesung nicht vorgeführt. □

Beispiel 9.9. Eine lineare Abbildung

$$\varphi : K^n \longrightarrow K^m$$

wird zumeist durch die Matrix M bzgl. den Standardbasen links und rechts beschrieben. Das Ergebnis der Matrixmultiplikation

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

ist dann direkt als Punkt in K^m interpretierbar. Die j-te Spalte von M ist das Bild des j-ten Standardvektors e_j.

9.4. **Untervektorräume unter linearen Abbildungen.**

Lemma 9.10. *Es sei K ein Körper und es seien V und W zwei K-Vektorräume. Es sei*

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

eine K-lineare Abbildung. Dann gelten folgende Aussagen.

(1) *Für einen Untervektorraum $S \subseteq V$ ist auch das Bild $\varphi(S) = \{\varphi(v) \mid v \in S\}$ ein Unterraum von W.*
(2) *Insbesondere ist das Bild* bild $\varphi = \varphi(V)$ *der Abbildung ein Unterraum von W.*
(3) *Für einen Unterraum $T \subseteq W$ ist das Urbild $\varphi^{-1}(T) = \{v \in V \mid \varphi(v) \in W\}$ ein Unterraum von V.*
(4) *Insbesondere ist $\varphi^{-1}(0)$ ein Unterraum von V.*

Beweis. Siehe Aufgabe 9.12. □

Definition 9.11. Es sei K ein Körper und es seien V und W zwei K-Vektorräume. Es sei

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

eine K-lineare Abbildung. Dann nennt man

$$\operatorname{kern} \varphi := \varphi^{-1}(0) = \{v \in V \mid \varphi(v) = 0\}$$

den *Kern* von φ.

Der Kern ist also nach der obigen Aussage ein Untervektorraum von V.

Wichtig ist das folgende *Injektivitätskriterium*.

Lemma 9.12. *Es sei K ein Körper und es seien V und W zwei K-Vektorräume. Es sei*

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

eine K-lineare Abbildung. Dann ist φ injektiv genau dann, wenn kern $\varphi = 0$ *ist.*

Beweis. Wenn die Abbildung injektiv ist, so kann es neben $0 \in V$ keinen anderen Vektor $v \in V$ mit $\varphi(v) = 0$ geben. Also ist $\varphi^{-1}(0) = 0$. Sei umgekehrt kern $\varphi = 0$ und seien $v_1, v_2 \in V$ gegeben mit $\varphi(v_1) = \varphi(v_2)$. Dann ist wegen der Linearität

$$\varphi(v_1 - v_2) \;=\; \varphi(v_1) - \varphi(v_2) \;=\; 0.$$

Daher ist $v_1 - v_2 \in \text{kern } \varphi$ und damit $v_1 = v_2$. □

9.5. **Die Dimensionsformel.**

Die folgende Aussage heißt *Dimensionsformel.*

Satz 9.13. *Es sei K ein Körper und es seien V und W zwei K-Vektorräume. Es sei*

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

eine K-lineare Abbildung und V sei endlichdimensional. Dann gilt

$$\dim(V) = \dim(\text{kern } \varphi) + \dim(\text{bild } \varphi)\,.$$

Beweis. Sei $n = \dim(V)$. Es sei $U = \text{kern } \varphi \subseteq V$ der Kern der Abbildung und $k = \dim(U)$ seine Dimension ($k \leq n$). Es sei

$$u_1, \ldots, u_k$$

eine Basis von U. Aufgrund des Basisergänzungssatzes gibt es Vektoren

$$v_1, \ldots, v_{n-k}$$

derart, dass

$$u_1, \ldots, u_k,\, v_1, \ldots, v_{n-k}$$

eine Basis von V ist.Wir behaupten, dass

$$w_j = \varphi(v_j),\; j = 1, \ldots, n-k\,,$$

eine Basis des Bildes ist. Es sei $w \in W$ ein Element des Bildes $\varphi(V)$. Dann gibt es ein $v \in V$ mit $\varphi(v) = w$. Dieses v lässt sich mit der Basis als

$$v = \sum_{i=1}^{k} s_i u_i + \sum_{j=1}^{n-k} t_j v_j$$

schreiben. Dann ist

$$\begin{aligned} w &= \varphi(v) \\ &= \varphi\left(\sum_{i=1}^{k} s_i u_i + \sum_{j=1}^{n-k} t_j v_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^{k} s_i \varphi(u_i) + \sum_{j=1}^{n-k} t_j \varphi(v_j) \\ &= \sum_{j=1}^{n-k} t_j w_j, \end{aligned}$$

so dass sich w als Linearkombination der w_j schreiben lässt. Zum Beweis der linearen Unabhängigkeit der w_j, $j = 1, \ldots, n-k$, sei eine Darstellung der Null gegeben,

$$0 = \sum_{j=1}^{n-k} t_j w_j \, .$$

Dann ist

$$\varphi \left(\sum_{j=1}^{n-k} t_j v_j \right) \; = \; \sum_{j=1}^{n-k} t_j \varphi(v_j) \; = \; 0.$$

Also gehört $\sum_{j=1}^{n-k} t_j v_j$ zum Kern der Abbildung und daher kann man

$$\sum_{j=1}^{n-k} t_j v_j = \sum_{i=1}^{k} s_i u_i$$

schreiben. Da insgesamt eine Basis von V vorliegt, folgt, dass alle Koeffizienten null sein müssen, also sind insbesondere $t_j = 0$. □

Definition 9.14. Es sei K ein Körper und es seien V und W zwei K-Vektorräume. Es sei

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

eine K-lineare Abbildung und V sei endlichdimensional. Dann nennt man

$$\operatorname{rang} \varphi := \dim(\operatorname{bild} \varphi)$$

den *Rang* von φ.

Die Dimensionsformel kann man auch als

$$\dim(V) = \dim(\operatorname{kern} \varphi) + \operatorname{rang} \varphi$$

ausdrücken.

Beispiel 9.15. Wir betrachten die durch die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

gegebene lineare Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y+z \\ 2y+2z \\ x+3y+4z \\ 2x+4y+6z \end{pmatrix}.$$

Zur Bestimmung des Kerns müssen wir das homogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} y+z \\ 2y+2z \\ x+3y+4z \\ 2x+4y+6z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

lösen. Der Lösungsraum ist

$$L = \{s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R}\}$$

und dies ist der Kern von φ. Der Kern ist also eindimensional und daher ist die Dimension des Bildes nach der Dimensionsformel gleich 2.

Korollar 9.16. *Es sei K ein Körper und es seien V und W Vektorräume über K der gleichen Dimension n. Es sei*

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung. Dann ist φ genau dann injektiv, wenn φ surjektiv ist.

Beweis. Dies folgt aus Satz 9.13 und Lemma 9.12. $\square$

10. Vorlesung

10.1. Verknüpfung von linearen Abbildungen und Matrizen.

Lemma 10.1. *Bei der Korrespondenz zwischen linearen Abbildungen und Matrizen entsprechen sich die Hintereinanderschaltung von linearen Abbildungen und die Matrizenmultiplikation. Damit ist folgendes gemeint: es seien U, V, W Vektorräume über einem Körper K mit Basen*

$$\mathfrak{u} = u_1, \ldots, u_p,\ \mathfrak{v} = v_1, \ldots, v_n \text{ und } \mathfrak{w} = w_1, \ldots, w_m .$$

Es seien

$$\psi : U \longrightarrow V \text{ und } \varphi : V \longrightarrow W$$

lineare Abbildungen. Dann gilt für die beschreibenden Matrizen von ψ, φ und der Hintereinanderschaltung $\varphi \circ \psi$ die Beziehung

$$M^{\mathfrak{u}}_{\mathfrak{w}}(\varphi \circ \psi) = (M^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{w}}(\varphi)) \circ (M^{\mathfrak{u}}_{\mathfrak{v}}(\psi)) .$$

Beweis. Wir betrachten die Abbildungskette

$$U \xrightarrow{\psi} V \xrightarrow{\varphi} W .$$

Bzgl. den Basen werde ψ durch die $n \times p$-Matrix $B = (b_{jk})_{jk}$ und φ durch die $m \times n$-Matrix $A = (a_{ij})_{ij}$ beschrieben. Die Hintereinanderschaltung $\varphi \circ \psi$ wirkt auf einen Basisvektor u_k folgendermaßen.

$$(\varphi \circ \psi)(u_k) \quad = \quad \varphi(\psi(u_k))$$

$$\begin{aligned}
&= \varphi\left(\sum_{j=1}^{n} b_{jk} v_j\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} b_{jk}\varphi(v_j) \\
&= \sum_{j=1}^{n} b_{jk}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}\right) w_i \\
&= \sum_{i=1}^{m} c_{ik} w_i .
\end{aligned}$$

Dabei sind diese Koeffizienten $c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$ gerade die Einträge in der Produktmatrix $A \circ B$. □

Daraus folgt beispielsweise, dass das Produkt von Matrizen assoziativ ist.

10.2. **Invertierbare Matrizen.**

Definition 10.2. Es sei K ein Körper und sei M eine $n \times n$-Matrix über K. Dann heißt M *invertierbar*, wenn es eine weitere Matrix $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ gibt mit

$$A \circ M = E_n = M \circ A .$$

Definition 10.3. Es sei K ein Körper. Zu einer invertierbaren Matrix $M \in \mathrm{Mat}_n(K)$ heißt die Matrix $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ mit

$$A \circ M = E_n = M \circ A$$

die *inverse Matrix* von M. Man schreibt dafür

$$M^{-1} .$$

10.3. **Lineare Abbildungen und Basiswechsel.**

Lemma 10.4. *Es sei K ein Körper und es seien V und W endlichdimensionale K-Vektorräume. Es seien $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{u}$ Basen von V und $\mathfrak{w}$ und $\mathfrak{z}$ Basen von W. Es sei*

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung, die bzgl. der Basen $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{w}$ durch die Matrix $M^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{w}}(\varphi)$ beschrieben werde. Dann wird φ bzgl. den Basen $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{z}$ durch die Matrix

$$M^{\mathfrak{w}}_{\mathfrak{z}} \circ (M^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{w}}(\varphi)) \circ (M^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{u}})^{-1}$$

beschrieben, wobei $M^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{u}}$ und $M^{\mathfrak{w}}_{\mathfrak{z}}$ die Übergangsmatrizen sind, die die Basiswechsel von $\mathfrak{v}$ nach $\mathfrak{u}$ und von $\mathfrak{w}$ nach $\mathfrak{z}$ beschreiben.

Beweis. Dieser Beweis wurde in der Vorlesung nicht vorgeführt. □

Korollar 10.5. *Es sei K ein Körper und es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei*

$$\varphi : V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Es seien $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ Basen von V. Dann besteht zwischen den Matrizen, die die lineare Abbildung bezüglich $\mathfrak{u}$ bzw. $\mathfrak{v}$ (beidseitig) beschreiben, die Beziehung

$$M_{\mathfrak{u}}^{\mathfrak{u}}(\varphi) = M_{\mathfrak{u}}^{\mathfrak{v}} \circ M_{\mathfrak{v}}^{\mathfrak{v}}(\varphi) \circ (M_{\mathfrak{u}}^{\mathfrak{v}})^{-1} .$$

Beweis. Dies folgt direkt aus Lemma 10.4. □

10.4. **Eigenschaften von linearen Abbildungen.**

Lemma 10.6. *Es sei K ein Körper und es seien V und W Vektorräume über K der Dimension n bzw. m. Es sei*

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung, die bezüglich zweier Basen durch die Matrix $M \in \operatorname{Mat}_{m \times n}(K)$ beschrieben werde. Dann gelten folgende Eigenschaften.

(1) *φ ist genau dann injektiv, wenn die Spalten der Matrix linear unabhängig sind.*
(2) *φ ist genau dann surjektiv, wenn die Spalten der Matrix ein Erzeugendensystem von K^m bilden.*
(3) *Bei $m = n$ ist φ genau dann bijektiv, wenn die Spalten der Matrix eine Basis von K^m bilden, und dies ist genau dann der Fall, wenn M invertierbar ist.*

Beweis. Es seien $\mathfrak{v} = v_1, \ldots, v_n$ und $\mathfrak{w} = w_1, \ldots, w_m$ Basen von V bzw. W und es seien $s_1, \ldots, s_n$ die Spalten von M. (1). Die Abbildung φ hat die Eigenschaft

$$\varphi(v_j) = \sum_{i=1}^{m} s_{ij} w_i ,$$

wobei s_{ij} der i-te Eintrag des j-ten Spaltenvektors ist. Daher ist

$$\varphi\left(\sum_{j=1}^{n} a_j v_j\right) = \sum_{j=1}^{n} a_j \left(\sum_{i=1}^{m} s_{ij} w_i\right) = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_j s_{ij}\right) w_i.$$

Dies ist genau dann null, wenn $\sum_{j=1}^{n} a_j s_{ij} = 0$ ist für alle i, und dies ist äquivalent zu $\sum_{j=1}^{n} a_j s_j = 0$. Dafür gibt es ein nichttrivales (Lösungs)Tupel $(a_1, \ldots, a_n)$ genau dann, wenn die Spalten linear abhängig sind und genau dann, wenn φ nicht injektiv ist. (2). Siehe Aufgabe 10.12. (3). Sei $n = m$. Die erste Äquivalenz folgt aus (1) und (2). Wenn φ bijektiv ist, so gibt es die (lineare) Umkehrabbildung φ^{-1} mit

$$\varphi \circ \varphi^{-1} = \operatorname{Id}_W \text{ und } \varphi^{-1} \circ \varphi = \operatorname{Id}_V .$$

Es sei M die Matrix zu φ und N die Matrix zu φ^{-1}. Die Matrix zur Identität ist die Einheitsmatrix. Nach Lemma 10.1 ist daher

$$M \circ N = E_n = N \circ M\,.$$

Die Umkehrung wird ähnlich bewiesen. □

10.5. **Elementarmatrizen.**

Definition 10.7. Es sei K ein Körper und sei M eine $m \times n$-Matrix über K. Dann nennt man die folgenden Manipulationen an M *elementare Zeilenumformungen*.

(1) Vertauschung von zwei Zeilen.
(2) Multiplikation einer Zeile mit $s \neq 0$.
(3) Addition des a-fachen einer Zeile zu einer anderen Zeile.

Elementare Zeilenumformungen ändern nicht den Lösungsraum von homogenen linearen Gleichungssystemen, wie in Lemma 5.7 gezeigt wurde.

Satz 10.8. *Es sei K ein Körper und sei M eine $m \times n$-Matrix über K. Dann gibt es elementare Zeilenumformungen und eine (Neu-)Nummerierung der Spalten*

$$j_1,\, j_2, \ldots , j_n$$

und ein $r \leq n$ derart, dass in der entstandenen Matrix die Spalten die Gestalt

$$s_{j_k} = \begin{pmatrix} b_{1,j_k} \\ \vdots \\ b_{k,j_k} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit } b_{k,j_k} \neq 0 \text{ für } k \leq r$$

und

$$s_{j_k} = \begin{pmatrix} b_{1,j_k} \\ \vdots \\ b_{r,j_k} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{für } k > r$$

besitzen. Durch elementare Zeilenumformungen und zusätzliche Spaltenvertauschungen kann man also eine Matrix auf die Gestalt

$$\begin{pmatrix} d_{11} & * & \cdots & * & * & \cdots & * \\ 0 & d_{22} & \cdots & * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{rr} & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

mit $d_{ii} \neq 0$ *bringen.*

Beweis. Dies beruht auf den entsprechenden Manipulationen wie beim Eliminationsverfahren, siehe Vorlesung 5. □

Definition 10.9. Es sei K ein Körper. Mit B_{ij} bezeichnen wir diejenige $n \times n$-Matrix, die an der Stelle (i, j) den Wert 1 und sonst überall den Wert null hat. Dann nennt man die folgenden Matrizen *Elementarmatrizen*.

(1) $V_{ij} := E_n - B_{ii} - B_{jj} + B_{ij} + B_{ji}$.
(2) $S_k := E_n + (s-1)B_{kk}$ für $s \neq 0$.
(3) $A_{ij}(a) := E_n + aB_{ij}$ für $i \neq j$ und $a \in K$.

Ausgeschrieben sehen diese Elementarmatrizen folgendermaßen aus.

$$V_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & 1 & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$S_k(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & s & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A_{ij}(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lemma 10.10. *Es sei K ein Körper und M eine $n \times n$-Matrix mit Einträgen in K. Dann hat die Multiplikation mit den Elementarmatrizen von links mit M folgende Wirkung.*

(1) $V_{ij} \circ M =$ *Vertauschen der i-ten und der j-ten Zeile von M.*
(2) $(S_k(s)) \circ M =$ *Multiplikation der k-ten Zeile von M mit s.*
(3) $(A_{ij}(a)) \circ M =$ *Addition des a-fachen der j-ten Zeile von M zur i-ten Zeile ($i \neq j$).*

Beweis. Siehe Aufgabe 10.11. □

10.6. **Auffinden der inversen Matrix.**

Verfahren 10.11. Es sei M eine quadratische Matrix. Wie kann man entscheiden, ob die Matrix invertierbar ist, und wie kann man die inverse Matrix M^{-1} finden?

Dazu legt man eine Tabelle an, wo in der linken Hälfte zunächst die Matrix M steht und in der rechten Hälfte die Einheitsmatrix. Jetzt wendet man auf beide Matrizen schrittweise die gleichen elementaren Zeilenumformungen an. Dabei soll in der linken Hälfte die Ausgangsmatrix in die Einheitsmatrix umgewandelt werden. Dies ist genau dann möglich, wenn diese Matrix invertierbar ist. Wir behaupten, dass bei dieser Vorgehensweise in der rechten Hälfte die Matrix M^{-1} als Endmatrix entsteht. Dies beruht auf folgendem *Invarianzprinzip*. Jede elementare Zeilenumformung kann als eine Matrizenmultiplikation mit einer Elementarmatrix E von links realisiert werden. Wenn in der Tabelle

$$(M_1, M_2)$$

steht, so steht im nächsten Schritt

$$(EM_1, EM_2)\,.$$

Wenn man das Inverse (das man noch nicht kennt, das es aber gibt unter der Voraussetzung, dass die Matrix invertierbar ist) der linken Hälfte mit der rechten Hälfte multipliziert, so ergibt sich

$$(EM_1)^{-1}EM_2 \;=\; M_1^{-1}E^{-1}EM_2 \;=\; M_1^{-1}M_2.$$

D.h., dass sich dieser Ausdruck bei den Einzelschritten nicht ändert. Zu Beginn ist dieser Ausdruck gleich $M^{-1}E_n$, daher muss zum Schluss für (E_n, N) gelten

$$N = E_n^{-1}N = M^{-1}E_n = M^{-1}.$$

Beispiel 10.12. Wir wollen zur Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ gemäß dem in Verfahren 10.11 beschriebenen Verfahren die inverse Matrix M^{-1} bestimmen.

$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -11 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -11 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & 11 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{-4}{9} & \frac{1}{9} & \frac{11}{9} \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{-4}{9} & \frac{1}{9} & \frac{11}{9} \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{-5}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{-1}{9} & \frac{-2}{9} \\ \frac{-4}{9} & \frac{1}{9} & \frac{11}{9} \end{pmatrix}$

11. Vorlesung

11.1. **Rang von Matrizen.**

Definition 11.1. Es sei K ein Körper und sei M eine $m \times n$-Matrix über K. Dann nennt man die Dimension des von den Spalten erzeugten Unterraums von K^m den *(Spalten-)Rang* der Matrix, geschrieben

$$\operatorname{rang} M \, .$$

Lemma 11.2. *Es sei K ein Körper und es seien V und W Vektorräume über K der Dimension n bzw. m. Es sei*

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung, die bezüglich zweier Basen durch die Matrix $M \in \text{Mat}_{m\times n}(K)$ *beschrieben werde. Dann gilt*

$$\text{rang } \varphi = \text{rang } M \, .$$

Beweis. Siehe Aufgabe 11.17. □

Zur Formulierung der nächsten Aussage führen wir den *Zeilenrang* einer $m \times n$-Matrix als die Dimension des von den Zeilen erzeugten Unterraumes von K^n ein.

Lemma 11.3. *Es sei* K *ein Körper und sei* M *eine* $m \times n$*-Matrix über* K*. Dann stimmt der Spaltenrang mit dem Zeilenrang überein. Der Rang ist gleich der in Satz 10.8 verwendeten Zahl* r*.*

Beweis. Bei elementaren Zeilenumformungen ändert sich der von den Zeilen erzeugte Raum nicht, und damit ändert sich auch nicht der Zeilenrang. Der Zeilenrang stimmt also mit dem Zeilenrang der in Satz 10.8 angegebenen Matrix in Stufenform überein. Diese hat den Zeilenrang r, da die ersten r Zeilen linear unabhängig sind und ansonsten nur Nullzeilen auftauchen. Sie hat aber auch den Spaltenrang r, da wiederum die ersten r Spalten (wenn man auch noch die Spalten vertauscht hat) linear unabhängig sind und die weiteren Spalten Linearkombinationen dieser r Spalten sind. Die Aufgabe 11.2 zeigt, dass sich bei elementaren Zeilenumformungen auch der Spaltenrang nicht ändert. □

Beide Ränge stimmen also überein, so dass wir im Folgenden nur noch vom *Rang einer Matrix* sprechen werden.

Korollar 11.4. *Es sei* K *ein Körper und sei* M *eine* $n \times n$*-Matrix über* K*. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

(1) M *ist invertierbar.*
(2) *Der Rang von* M *ist* n*.*
(3) *Die Zeilen von* M *sind linear unabhängig.*
(4) *Die Spalten von* M *sind linear unabhängig.*

Beweis. Dies folgt aus Lemma 10.6 und aus Lemma 11.3. □

11.2. **Determinanten.**

Definition 11.5. Es sei K ein Körper und sei $M = (a_{ij})_{ij}$ eine $n \times n$-Matrix über K. Zu $i \in \{1, \ldots, n\}$ sei M_i diejenige $(n-1) \times (n-1)$-Matrix, die entsteht, wenn man in M die erste Spalte und die i-te Zeile weglässt. Dann definiert man rekursiv die *Determinante* von M durch

$$\det M = \begin{cases} a_{11} & \text{falls } n = 1 \, , \\ \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} \det M_i & \text{für } n \geq 2 \, . \end{cases}$$

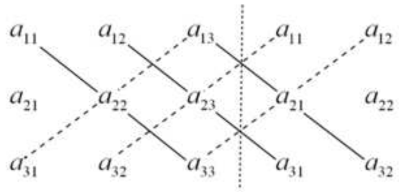
Die Determinante ist nur für quadratische Matrizen definiert. Für kleine n kann man die Determinante einfach ausrechnen.

Beispiel 11.6. Für eine 2×2-Matrix

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

ist

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - cb\,.$$



Als Merkregel für eine 3×3-Matrix verwendet man die *Regel von Sarrus*. Man wiederholt die erste Spalte als vierte Spalte und die zweite Spalte als fünfte Spalte. Die Produkte der durchgezogenen Diagonalen werden positiv genommen, die Produkte der gestrichelten Diagonalen negativ.

Beispiel 11.7. Für eine 3×3-Matrix

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

ist

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \\ - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Lemma 11.8. *Für eine obere Dreiecksmatrix*

$$M = \begin{pmatrix} b_1 & * & \cdots & \cdots & * \\ 0 & b_2 & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{n-1} & * \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & b_n \end{pmatrix}$$

ist

$$\det M = b_1 b_2 \cdots b_{n-1} b_n\,.$$

Insbesondere ist für die Einheitsmatrix

$$\det E_n = 1\,.$$

Beweis. Dies folgt mit einer einfachen Induktion direkt aus der Definition der Determinante. □

11.3. **Determinantenfunktionen.**

Wir wollen zeigen, dass die oben rekursiv definierte Determinante eine „multilineare“ „alternierende“ Abbildung ist, wenn man die Identifizierung

$$\mathrm{Mat}_n(K) \cong (K^n)^n$$

vornimmt, bei der einer Matrix das n-Tupel der Zeilen der Matrix zugeordnet wird. Wir fassen also im Folgenden eine Matrix als ein Spaltentupel

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

auf, wobei die einzelnen Einträge v_i Zeilenvektoren der Länge n sind.

Satz 11.9. *Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}_+$. Dann ist die Determinante*

$$\mathrm{Mat}_n(K) = (K^n)^n \longrightarrow K,\ M \longmapsto \det M,$$

multilinear. D.h., dass für jedes $k \in \{1, \ldots, n\}$, für $n-1$ Vektoren $v_1, \ldots, v_{k-1}, v_{k+1}, \ldots, v_n \in K^n$ und für $u, w \in K^n$ die Gleichheit

$$\det \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{k-1} \\ u+w \\ v_{k+1} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{k-1} \\ u \\ v_{k+1} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{k-1} \\ w \\ v_{k+1} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

und für $s \in K$ die Gleichheit

$$\det \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{k-1} \\ su \\ v_{k+1} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = s \det \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{k-1} \\ u \\ v_{k+1} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

gilt.

Beweis. Dieser Beweis wurde in der Vorlesung nicht vorgeführt. □

Satz 11.10. *Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}_+$. Dann besitzt die Determinante*

$$\mathrm{Mat}_n(K) = (K^n)^n \longrightarrow K,\ M \longmapsto \det M,$$

folgende Eigenschaften.

(1) *Wenn in M zwei Zeilen übereinstimmen, so ist* $\det M = 0$. *D.h., dass die Determinante alternierend ist.*
(2) *Wenn man in M zwei Zeilen vertauscht, so ändert sich die Determinante mit dem Faktor -1.*

Beweis. Dieser Beweis wurde in der Vorlesung nicht vorgeführt. □

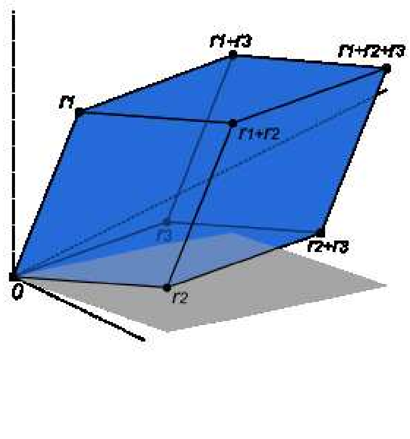
Satz 11.11. *Es sei K ein Körper und sei M eine $n \times n$-Matrix über K. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

(1) $\det M \neq 0$.
(2) *Die Zeilen von M sind linear unabhängig.*
(3) *M ist invertierbar.*
(4) $\operatorname{rang} M = n$.

Beweis. Die Beziehung zwischen Rang, Invertierbarkeit und linearer Unabhängigkeit wurde schon in Korollar 11.4 gezeigt. Seien die Zeilen linear abhängig. Wir können nach Zeilenvertauschen annehmen, dass $v_n = \sum_{i=1}^{n-1} s_i v_i$ ist. Dann ist nach Satz 11.10

$$\det M = \det \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{n-1} \\ \sum_{i=1}^{n-1} s_i v_i \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n-1} s_i \det \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{n-1} \\ v_i \end{pmatrix} = 0.$$

Seien nun die Zeilen linear unabhängig. Dann kann man durch Zeilenvertauschungen, Skalierung und Zeilenaddition die Matrix sukzessive zur Einheitsmatrix transformieren. Dabei ändert sich die Determinante stets durch einen von null verschiedenen Faktor. Da die Determinante der Einheitsmatrix 1 ist, muss auch die Determinate der Ausgangsmatrix $\neq 0$ sein. □



Bemerkung 11.12. Bei $K = \mathbb{R}$ steht die Determinante in einer engen Beziehung zu Volumina von geometrischen Objekten. Wenn man im $\mathbb{R}^n$ Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ betrachtet, so spannen diese ein *Parallelotop* auf. Dieses ist definiert als

$$P := \{s_1 v_1 + \ldots + s_n v_n | \, s_i \in [0,1]\} .$$

Es besteht also aus allen Linearkombinationen der Vektoren, wobei aber die Skalare auf das Einheitsintervall beschränkt sind. Wenn die Vektoren linear unabhängig sind, so handelt es sich wirklich um einen „voluminösen“ Körper, andernfalls liegt ein Objekt von niedrigerer Dimension vor. Es gilt nun die Beziehung

$$\text{vol } P = |\det (v_1, \ldots, v_n)| \ ,$$

d.h. das Volumen des Parallelotops ist der Betrag der Determinante derjenigen Matrix, die entsteht, wenn man die aufspannenden Vektoren hintereinander schreibt.

11.4. **Der Determinantenmultiplikationssatz und Folgerungen.**

Wir besprechen weitere wichtige Sätze über Determinanten, die wir aber nicht beweisen werden. Die Beweise beruhen auf einer systematischeren Untersuchung der für die Determinante charakteristischen Eigenschaften, multilinear und alternierend zu sein. Durch diese beiden Eigenschaften zusammen mit der Bedingung, dass die Determinante der Einheitsmatrix gleich 1 ist, ist die Determiante nämlich schon eindeutig festgelegt.

Satz 11.13. *Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}_+$. Dann gilt für Matrizen $A, B \in \operatorname{Mat}_n(K)$ die Beziehung*

$$\det (A \circ B) = \det A \cdot \det B .$$

Definition 11.14. Es sei K ein Körper und sei $M = (a_{ij})_{ij}$ eine $m \times n$-Matrix über K. Dann nennt man die $n \times m$-Matrix

$$M^{tr} = (b_{ij})_{ij} \text{ mit } b_{ij} := a_{ji}$$

die *transponierte Matrix* zu M.

Die transponierte Matrix entsteht also, indem man die Rollen von Zeilen und Spalten vertauscht. Beispielsweise ist

$$\begin{pmatrix} t & n & o & e \\ r & s & n & r \\ a & p & i & t \end{pmatrix}^{tr} = \begin{pmatrix} t & r & a \\ n & s & p \\ o & n & i \\ e & r & t \end{pmatrix} .$$

Satz 11.15. *Es sei K ein Körper und sei M eine $n \times n$-Matrix über K. Dann ist*

$$\det M = \det M^{tr} .$$

Daraus folgt, dass man die Determinante auch berechnen kann, indem man „nach einer Zeile entwickelt“, wie die folgende Aussage zeigt.

Korollar 11.16. *Es sei K ein Körper und sei $M = (a_{ij})_{ij}$ eine $n \times n$-Matrix über K. Zu $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ sei M_{ij} diejenige Matrix, die entsteht, wenn man in M die i-te Zeile und die j-te Spalte weglässt. Dann ist (bei $n \geq 2$ für jedes feste i bzw. j)*

$$\det\, M \;=\; \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det\, M_{ij} \;=\; \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det\, M_{ij}.$$

Beweis. Für $j = 1$ ist dies die rekursive Definition der Determinante. Daraus folgt die Aussage für $i = 1$ aufgrund von Satz 11.15. Durch Spalten- und Zeilenvertauschung folgt die Aussage daraus allgemein, siehe Aufgabe 11.10. □

11.5. **Die Determinante einer linearen Abbildung.**

Es sei

$$\varphi : V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung eines Vektorraumes der Dimension n in sich. Diese wird bezüglich einer Basis durch eine Matrix $M \in \operatorname{Mat}_n(K)$ beschrieben. Es liegt nahe, die Determinante dieser Matrix als Determinante der linearen Abbildung zu definieren, doch hat man hier das *Problem der Wohldefiniertheit*: die lineare Abbildung wird bezüglich einer anderen Basis durch eine „völlig“ andere Matrix beschrieben. Allerdings besteht zwischen den zwei beschreibenden Matrizen M und N und der Basiswechselmatrix B aufgrund von Korollar 10.5 die Beziehung

$$N = BMB^{-1}\,.$$

Aufgrund des Determinantenmultiplikationssatzes ist daher

$$\det\, N \;=\; \det\,(BMB^{-1}) \;=\; (\det\, B)(\det\, M)(\det\, B)^{-1} \;=\; \det\, M,$$

sodass die folgende Definition in der Tat unabhängig von der Wahl einer Basis ist.

Definition 11.17. Es sei K ein Körper und es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei

$$\varphi : V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung, die bezüglich einer Basis durch die Matrix M beschrieben werde. Dann nennt man

$$\det\, \varphi := \det\, M$$

die *Determinante* der linearen Abbildung φ.

12. Vorlesung

Heron von Alexandria (1. Jahrhundert n.C.)

12.1. **Reelle Zahlenfolgen.**

Wir beginnen mit einem motivierenden Beispiel.

Beispiel 12.1. Wir wollen die Quadratwurzel einer natürlichen Zahl „berechnen“, sagen wir von 5. Eine solche Zahl x mit der Eigenschaft $x^2 = 5$ gibt es nicht innerhalb der rationalen Zahlen, wie aus der eindeutigen Primfaktorzerlegung folgt. Wenn $x \in \mathbb{R}$ ein solches Element ist, so hat auch $-x$ diese Eigenschaft. Mehr als zwei Lösungen kann es aber nach Korollar 4.11 nicht geben, so dass wir nur nach der positiven Lösung suchen müssen.

Obwohl es innerhalb der rationalen Zahlen keine Lösung für die Gleichung $x^2 = 5$ gibt, so gibt es doch beliebig gute Approximationen innerhalb der rationalen Zahlen dafür. Beliebig gut heißt dabei, dass der Fehler (oder die Abweichung) unterhalb jede positive Schranke gedrückt werden kann. Das klassische Verfahren, um eine Quadratwurzel beliebig anzunähern, ist das *Heron-Verfahren*, das man auch *babylonisches Wurzelziehen* nennt. Dies ist ein *iteratives Verfahren*, d.h., die nächste Approximation wird aus den vorausgehenden Approximationen berechnet. Beginnen wir mit $a := x_0 := 2$ als erster Näherung. Wegen

$$x_0^2 = 2^2 = 4 < 5$$

ist x_0 zu klein, d.h. es ist $x_0 < x$. Aus $a^2 < 5$ (mit a positiv) folgt zunächst $5/a^2 > 1$ und daraus $(5/a)^2 > 5$, d.h. $5/a > \sqrt{5}$. Man hat also die Abschätzungen

$$a < \sqrt{5} < 5/a\,,$$

wobei rechts eine rationale Zahl steht, wenn links eine rationale Zahl steht. Eine solche Abschätzung vermittelt offenbar eine quantitative Vorstellung darüber, wo $\sqrt{5}$ liegt. Die Differenz $5/a - a$ ist ein Maß für die Güte der Approximation.

Beim Startwert 2 ergibt sich, dass die Quadratwurzel von $\sqrt{5}$ zwischen 2 und $5/2$ liegt. Man nimmt nun das arithmetische Mittel der beiden Intervallgrenzen, also

$$x_1 := \frac{2+\frac{5}{2}}{2} = \frac{9}{4}.$$

Wegen $\left(\frac{9}{4}\right)^2 = \frac{81}{16} > 5$ ist dieser Wert zu groß und daher liegt $\sqrt{5}$ im Intervall $[5 \cdot \frac{4}{9}, \frac{9}{4}]$. Von diesen Intervallgrenzen nimmt man erneut das arithmetische Mittel und setzt

$$x_2 := \frac{5 \cdot \frac{4}{9} + \frac{9}{4}}{2} = \frac{161}{72}$$

als nächste Approximation. So fortfahrend erhält man eine immer besser werdende Approximation von $\sqrt{5}$.

Allgemein ergibt sich das folgende Heron-Verfahren.

Beispiel 12.2. Beim *Heron-Verfahren* zur Berechnung von $\sqrt{c}$ einer positiven Zahl c geht man iterativ wie folgt vor. Man startet mit einem beliebigen positiven Startwert x_0 und berechnet davon das arithmetische Mittel aus x_0 und c/x_0. Dieses Mittel nennt man x_1. Es gilt

$$x_1^2 - c = \left(\frac{x_0 + \frac{c}{x_0}}{2}\right)^2 - c = \frac{x_0^2 + 2c + \frac{c^2}{x_0^2}}{4} - c = \frac{x_0^2 - 2c + \frac{c^2}{x_0^2}}{4} = \left(\frac{x_0 - \frac{c}{x_0}}{2}\right)^2.$$

D.h. dass x_1 mindestens so groß wie $\sqrt{c}$ ist. Auf x_1 wendet man iterativ das gleiche Verfahren an und erhält so x_2 usw. Die Definition von x_{n+1} lautet also

$$x_{n+1} = \frac{x_n + c/x_n}{2}.$$

Nach Konstuktion weiß man, dass $\sqrt{c}$ in jedem Intervall $[c/x_n, x_n]$ (für $n \geq 1$) liegt, da aus $x_n^2 \geq c$ und $x_n \cdot c/x_n = c$ folgt, dass $\left(\frac{c}{x_n}\right)^2 \leq c$ ist. Bei jedem Schritt gilt

$$\left[\frac{c}{x_{n+1}}, x_{n+1}\right] \subseteq \left[\frac{c}{x_n}, x_n\right],$$

d.h. das Nachfolgerintervall liegt innerhalb des Vorgängerintervalls. Dabei wird bei jedem Schritt die Intervalllänge mindestens halbiert.

Das eben beschriebene Verfahren liefert also zu jeder natürlichen Zahl n eine reelle Zahl, die eine durch eine gewisse algebraische Eigenschaft charakterisierte Zahl beliebig gut approximiert. Bei vielen technischen Anwendungen genügt es, gewisse Zahlen nur hinreichend genau zu kennen, wobei allerdings die benötigte Güte der Approximation von der technischen Zielsetzung abhängt. Es gibt im Allgemeinen keine Güte, die für jede vorstellbare Anwendung ausreicht, so dass es wichtig ist zu wissen, wie man eine gute Approximation durch eine bessere Approximation ersetzen kann und wie viele Schritte man machen muss, um eine gewünschte Approximation zu erreichen. Dies führt zu den Begriffen Folge und Konvergenz.

Definition 12.3. Eine *reelle Folge* ist eine Abbildung

$$\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R},\ n \longmapsto x_n.$$

Eine Folge wird zumeist als $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, oder einfach nur kurz als $(x_n)_n$ geschrieben. Manchmal sind Folgen nicht für alle natürlichen Zahlen definiert, sondern nur für alle natürlichen Zahlen $\geq N$. Alle Begriffe und Aussagen lassen sich dann sinngemäß auch auf diese Situation übertragen. Grundsätzlich gibt es Folgen in jeder Menge, für die meisten Eigenschaften, für die man sich im Kontext von Folgen interessiert, braucht man aber eine zusätzliche „topologische Struktur", wie sie in $\mathbb{R}$ existiert. Dies gilt insbesondere für den folgenden Begriff.

Definition 12.4. Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine reelle Folge und es sei $x \in \mathbb{R}$. Man sagt, dass die Folge gegen x *konvergiert*, wenn folgende Eigenschaft erfüllt ist.

Zu jedem positiven $\epsilon > 0$, $\epsilon \in \mathbb{R}$, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $n \geq n_0$ die Abschätzung

$$|x_n - x| \leq \epsilon$$

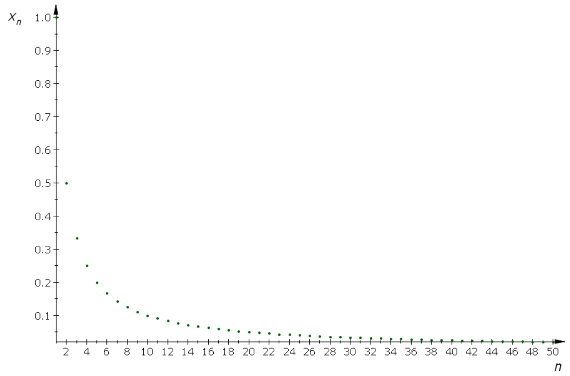
gilt. In diesem Fall heißt x der *Grenzwert* oder der *Limes* der Folge. Dafür schreibt man auch

$$\lim_{n \to \infty} x_n := x\,.$$

Wenn die Folge einen Grenzwert besitzt, so sagt man auch, dass sie *konvergiert* (ohne Bezug auf einen Grenzwert), andernfalls, dass sie *divergiert*.

Man sollte sich dabei das vorgegebene ϵ als eine kleine, aber positive Zahl vorstellen, die eine gewünschte *Zielgenauigkeit* (oder erlaubten Fehler) ausdrückt. Die natürliche Zahl n_0 ist dann die *Aufwandszahl*, die beschreibt, wie weit man gehen muss, um die gewünschte Zielgenauigkeit zu erreichen, und zwar so zu erreichen, dass alle ab n_0 folgenden Glieder innerhalb dieser Zielgenauigkeit bleiben. Konvergenz bedeutet demnach, dass man jede gewünschte Genauigkeit bei hinreichend großem Aufwand auch erreichen kann. Je kleiner der Fehler, also je besser die Approximation sein sollen, desto höher ist im Allgemeinen der Aufwand. Statt mit beliebigen positiven reellen Zahlen ϵ kann man auch mit den *Stammbrüchen*, also den rationalen Zahlen $\frac{1}{k}$, $k \in \mathbb{N}_+$, arbeiten, siehe Aufgabe 12.3.

Zu einem $\epsilon > 0$ und einer reellen Zahl x nennt man das Intervall $]x - \epsilon, x + \epsilon[$ auch die *ϵ-Umgebung* von x. Eine Folge, die gegen 0 konvergiert, heißt *Nullfolge*.



Beispiel 12.5. Eine *konstante Folge* $x_n := c$ ist stets konvergent mit dem Grenzwert c. Dies folgt direkt daraus, dass man für jedes $\epsilon > 0$ als Aufwandszahl $n_0 = 0$ nehmen kann. Es ist ja

$$|x_n - c| \; = \; |c - c| \; = \; |0| \; = \; 0 \; < \; \epsilon$$

für alle n.

Die Folge

$$x_n = \frac{1}{n}$$

ist konvergent mit dem Grenzwert 0. Sei dazu ein beliebiges positives ϵ vorgegeben. Aufgrund des Archimedes Axioms gibt es ein n_0 mit $\frac{1}{n_0} \leq \epsilon$. Insgesamt gilt damit für alle $n \geq n_0$ die Abschätzung

$$x_n \; = \; \frac{1}{n} \; \leq \; \frac{1}{n_0} \; \leq \; \epsilon.$$

Lemma 12.6. *Eine reelle Folge besitzt maximal einen Grenzwert.*

Beweis. Nehmen wir an, dass es zwei verschiedene Grenzwerte x, y, $x \neq y$, gibt. Dann ist $d := |x - y| > 0$. Wir betrachten $\epsilon := d/3 > 0$. Wegen der Konvergenz gegen x gibt es ein n_0 mit

$$|x_n - x| \leq \epsilon \text{ für alle } n \geq n_0$$

und wegen der Konvergenz gegen y gibt es ein n_0' mit

$$|x_n - y| \leq \epsilon \text{ für alle } n \geq n_0' \, .$$

Beide Bedingungen gelten dann gleichermaßen für $n \geq \max\{n_0, n_0'\}$. Sei n mindestens so groß wie dieses Maximum. Dann ergibt sich aufgrund der Dreiecksungleichung der Widerspruch

$$d = |x - y| \leq |x - x_n| + |x_n - y| \leq \epsilon + \epsilon = 2d/3.$$

□

12.2. **Beschränktheit.**

Definition 12.7. Es sei $M \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge der reellen Zahlen.

(1) Ein Element $S \in \mathbb{R}$ heißt eine *obere Schranke* für M, wenn $x \leq S$ gilt für alle $x \in M$.
(2) Ein Element $s \in \mathbb{R}$ heißt eine *untere Schranke* für M, wenn $x \geq s$ gilt für alle $x \in M$.
(3) M heißt *nach oben beschränkt*, wenn eine obere Schranke für M existiert.
(4) M heißt *nach unten beschränkt*, wenn eine untere Schranke für M existiert.
(5) M heißt *beschränkt*, wenn M sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt ist.
(6) Eine obere Schranke T von M heißt das *Supremum* von M, wenn $T \leq S$ für alle oberen Schranken S von M gilt.
(7) Eine untere Schranke t von M heißt das *Infimum* von M, wenn $t \geq s$ für alle unteren Schranken s von M gilt.
(8) Das Supremum T von M heißt *Maximum*, wenn $T \in M$ ist.
(9) Das Infimum t von M heißt *Minimum*, wenn $t \in M$ ist.

Obere und untere Schranken muss es nicht geben. Wenn S eine obere Schranke ist, so ist auch jede größere Zahl eine obere Schranke. Für das offene Intervall $]0,1[$ ist 1 das Supremum, aber nicht das Maximum, da 1 nicht dazu gehört. Entsprechend ist 0 das Infimum, aber nicht das Minimum. Beim abgeschlossenen Intervall $[0,1]$ sind die beiden Grenzen Maximum und Minimum.

All diese Begriffe werden auch für Folgen angewendet, und zwar für die Bildmenge $\{x_n | n \in \mathbb{N}\}$. Für die Folge $1/n$, $n \in \mathbb{N}_+$, ist 1 das Maximum und das Supremum, 0 ist das Infimum, aber nicht das Minimum.

Lemma 12.8. *Eine konvergente reelle Folge ist beschränkt.*

Beweis. Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die konvergente Folge mit dem Limes $x \in \mathbb{R}$ und es sei $\epsilon > 0$. Aufgrund der Konvergenz gibt es ein n_0 derart, dass

$$|x_n - x| \leq \epsilon \text{ für alle } n \geq n_0 .$$

Dann ist insbesondere

$$|x_n| \leq |x| + |x - x_n| \leq |x| + \epsilon \text{ für alle } n \geq n_0 .$$

Unterhalb von n_0 gibt es nur endlich viele Zahlen, so dass das Maximum

$$B := \max_{n<n_0}\{|x_n|\,,\,|x|+\epsilon\}$$

wohldefiniert ist. Dies ist eine Schranke für alle $|x_n|$. $\square$

Es ist einfach, beschränkte, aber nicht konvergente Folgen anzugeben.

Beispiel 12.9. Es sei $c > 0$ eine positive reelle Zahl. Dann ist die *alternierende Folge*

$$x_n := (-1)^n c$$

beschränkt, aber nicht konvergent. Die Beschränktheit folgt direkt aus

$$|x_n| \;=\; |(-1)^n|\,|c| \;=\; c.$$

Konvergenz liegt aber nicht vor. Wäre nämlich $x \geq 0$ der Grenzwert, so gilt für positives $\epsilon < c$ und jedes ungerade n die Beziehung

$$|x_n - x| \;=\; |-c-x| \;=\; c+x \;\geq\; c \;>\; \epsilon,$$

so dass es Folgenwerte außerhalb dieser ϵ-Umgebung gibt. Analog kann man einen negativ angenommen Grenzwert zum Widerspruch führen.

12.3. **Das Quetschkriterium.**

Lemma 12.10. *Es seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei konvergente Folgen mit $x_n \geq y_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $\lim_{n\to\infty} x_n \;\geq\; \lim_{n\to\infty} y_n$.*

Beweis. Siehe Aufgabe 12.5. $\square$

Die folgende Aussage heißt *Quetschkriterium*.

Lemma 12.11. *Es seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ drei reelle Folgen. Es gelte*

$$x_n \leq y_n \leq z_n \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren beide gegen den gleichen Grenzwert a. Dann konvergiert auch $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen diesen Grenzwert a.

Beweis. Siehe Aufgabe 12.6. $\square$

Definition 12.12. Die reelle Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *wachsend*, wenn $x_{n+1} \geq x_n$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$, und *streng wachsend*, wenn $x_{n+1} > x_n$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$.

Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *fallend*, wenn $x_{n+1} \leq x_n$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$, und *streng fallend*, wenn $x_{n+1} < x_n$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$.

Als gemeinsamen Begriff für (streng) waschsende oder (streng) fallende Folgen verwendet man die Bezeichnung (streng) *monotone Folgen*.

Man stelle sich nun eine wachsende Folge vor, die aber dennoch beschränkt ist. Muss eine solche Folge konvergieren? Wird dadurch eine reelle Zahl definiert? In der Tat ist dies eine Version des Vollständigkeitsaxioms von $\mathbb{R}$, dem wir uns in der nächsten Vorlesung zuwenden.

13. Vorlesung

13.1. **Rechenregeln für Folgen.**

Lemma 13.1. *Es seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen. Dann gelten folgende Aussagen.*

(1) *Die Folge $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent und es gilt*
$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = (\lim_{n\to\infty} x_n) + (\lim_{n\to\infty} y_n)\,.$$
(2) *Die Folge $(x_n \cdot y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent und es gilt*
$$\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = (\lim_{n\to\infty} x_n) \cdot (\lim_{n\to\infty} y_n)\,.$$
(3) *Für $c \in \mathbb{R}$ gilt*
$$\lim_{n\to\infty} c x_n = c(\lim_{n\to\infty} x_n)\,.$$
(4) *Es sei $\lim_{n\to\infty} x_n = x \neq 0$ und $x_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $\left(\frac{1}{x_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ebenfalls konvergent mit*
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{x}\,.$$
(5) *Es sei $\lim_{n\to\infty} x_n = x \neq 0$ und $x_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $\left(\frac{y_n}{x_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ebenfalls konvergent mit*
$$\lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} y_n}{x}\,.$$

Beweis. Wir beweisen nur (2) und (4), die anderen Teile sind als Übungen zu beweisen. (2). Sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist insbesondere beschränkt und daher existiert ein D mit $|x_n| \leq D$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei $x := \lim_{n\to\infty} x_n$ und $y := \lim_{n\to\infty} y_n$. Wir setzen $C = \max\{D, |y|, 1\}$. Daher gibt es natürliche Zahlen N_1 und N_2 mit
$$|x_n - x| \leq \frac{\epsilon}{2C} \text{ für } n \geq N_1 \text{ und } |y_n - y| \leq \frac{\epsilon}{2C} \text{ für } n \geq N_2\,.$$
Diese Abschätzungen gelten dann auch für $n \geq N := \max\{N_1, N_2\}$. Für diese Zahlen gilt daher
$$\begin{aligned} |x_n y_n - xy| &= |x_n y_n - x_n y + x_n y - xy| \\ &\leq |x_n y_n - x_n y| + |x_n y - xy| \\ &= |x_n|\,|y_n - y| + |y|\,|x_n - x| \\ &\leq C\frac{\epsilon}{2C} + C\frac{\epsilon}{2C} \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

(4). Da der Limes der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht null ist, gilt für $n \geq N_1$ die Bedingung $|x_n| \geq \frac{|x|}{2}$ und damit $\frac{1}{|x_n|} \leq \frac{2}{|x|}$. Sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Wegen der

Konvergenz von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gibt es ein N_2 mit

$$|x_n - x| \leq \frac{\epsilon\,|x|^2}{2} \text{ für alle } n \geq N_2\,.$$

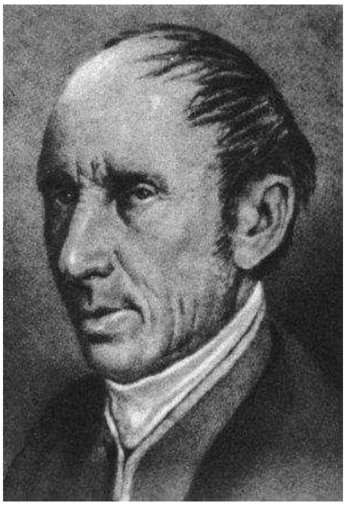
Dann gilt für alle $n \geq N := \max\{N_1, N_2\}$ die Abschätzung

$$\left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x}\right| = \left|\frac{x_n - x}{x x_n}\right| = \frac{1}{|x|\,|x_n|}\,|x_n - x| \leq \frac{2}{|x|^2}\cdot\frac{\epsilon\,|x|^2}{2} = \epsilon.$$

□

13.2. **Cauchy-Folgen.**

Ein Problem des Konvergenzbegriffes ist, dass zur Formulierung der Grenzwert verwendet wird, den man unter Umständen noch gar nicht kennt. Wenn man beispielsweise die durch das babylonische Wurzelziehen konstruierte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (sagen wir zur Berechnung von $\sqrt{5}$) mit einem rationalen Startwert betrachtet, so ist dies eine Folge aus rationalen Zahlen. Wenn wir diese Folge in R betrachten, wo $\sqrt{5}$ existiert, so ist die Folge konvergent. Innerhalb der rationalen Zahlen ist sie aber definitiv nicht konvergent. Es ist wünschenswert, allein innerhalb der rationalen Zahlen den Sachverhalt formulieren zu können, dass die Folgenglieder beliebig nahe zusammenrücken, auch wenn man nicht sagen kann, dass die Folgenglieder einem Grenzwert beliebig nahe zustreben. Dazu dient der Begriff der Cauchy-Folge.



Augustin Louis Cauchy (1789-1857)

Definition 13.2. Eine reelle Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *Cauchy-Folge*, wenn folgende Bedingung erfüllt ist.

Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $n, m \geq n_0$ die Beziehung

$$|x_n - x_m| \leq \epsilon$$

gilt.

Satz 13.3. *Jede konvergente Folge ist eine Cauchy-Folge.*

Beweis. Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die konvergente Folge mit Grenzwert x. Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Wir wenden die Konvergenzeigenschaft auf $\epsilon/2$ an. Daher gibt es ein n_0 mit

$$|x_n - x| \leq \epsilon/2 \text{ für alle } n \geq n_0 \,.$$

Für beliebige $n, m \geq n_0$ gilt dann aufgrund der Dreiecksungleichung

$$|x_n - x_m| \;\leq\; |x_n - x| + |x - x_m| \;\leq\; \epsilon/2 + \epsilon/2 \;=\; \epsilon.$$

Also liegt eine Cauchy-Folge vor. □

Definition 13.4. Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine reelle Folge. Zu jeder streng wachsenden Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $i \mapsto n_i$, heißt die Folge

$$i \mapsto x_{n_i}$$

eine *Teilfolge* der Folge.

Lemma 13.5. *Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine wachsende, nach oben beschränkte reelle Folge. Dann ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge.*

Beweis. Es sei $b \in \mathbb{R}$ eine obere Schranke, also $x_n \leq b$ für alle Folgenglieder x_n. Wir nehmen an, dass $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ keine Cauchy-Folge ist. Dann gibt es ein $\epsilon > 0$ derart, dass es für jedes n_0 Indizes $n > m \geq n_0$ gibt mit $x_n - x_m \geq \epsilon$ (wir können die Betragstriche weglassen). Wegen der Monotonie gibt es dann auch zu jedem n_0 ein $n > n_0$ mit $x_n - x_{n_0} \geq \epsilon$. Wir können daher induktiv eine wachsende Folge von natürlichen Zahlen definieren durch

$$n_1 > n_0 \text{ so, dass } x_{n_1} - x_{n_0} \geq \epsilon \,,$$

$$n_2 > n_1 \text{ so, dass } x_{n_2} - x_{n_1} \geq \epsilon \,,$$

etc. Andererseits gibt es aufgrund des Archimedesaxioms ein $k \in \mathbb{N}$ mit

$$k\epsilon > b - x_{n_0} \,.$$

Die Summe der ersten k Differenzen der Teilfolge x_{n_j}, $j \in \mathbb{N}$, ergibt

$$\begin{aligned} x_{n_k} - x_{n_0} &= (x_{n_k} - x_{n_{k-1}}) + (x_{n_{k-1}} - x_{n_{k-2}}) + \ldots + (x_{n_2} - x_{n_1}) + (x_{n_1} - x_{n_0}) \\ &\geq k\epsilon \\ &> b - x_{n_0}. \end{aligned}$$

Dies impliziert $x_{n_k} > b$ im Widerspruch zur Voraussetzung, dass b eine obere Schranke der Folge ist. □

13.3. **Die Vollständigkeit der reellen Zahlen.**

Axiom 13.6. Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ sind vollständig, d.h. jede reelle Cauchy-Folge besitzt einen Grenzwert.

Damit haben wir alle Axiome der reellen Zahlen zusammengetragen: die Körperaxiome, die Anordnungsaxiome und das Vollständigkeitsaxiom. Diese Eigenschaften legen die reellen Zahlen eindeutig fest, d.h. wenn es zwei Modelle $\mathbb{R}_1$ und $\mathbb{R}_2$ gibt, die beide für sich genommen diese Axiome erfüllen, so kann man eine bijektive Abbildung von $\mathbb{R}_1$ nach $\mathbb{R}_2$ angeben, der alle mathematischen Strukturen erhält (sowas nennt man einen „Isomorphismus").

Die Existenz der reellen Zahlen ist nicht trivial. Vom naiven Standpunkt her kann man, und das haben wir bisher getan und werden wir auch weiterhin tun, die Vorstellung einer „kontinuierlichen Zahlengerade" zugrunde legen, und dies als Existenznachweis akzeptieren. In einer strengeren mengentheoretischen Begründung der Existenz geht man von $\mathbb{Q}$ aus und konstruiert die reellen Zahlen als die Menge der Cauchy-Folgen in $\mathbb{Q}$ mit einer geeigneten Identifizierung.

13.4. **Folgerungen aus der Vollständigkeit.**

Korollar 13.7. *Eine beschränkte und monotone Folge in* $\mathbb{R}$ *konvergiert.*

Beweis. Nach Voraussetzung ist die Folge wachsend und nach oben beschränkt oder fallend und nach unten beschränkt. Nach Lemma 13.7 liegt eine Cauchy-Folge vor, und diese konvergiert in $\mathbb{R}$. $\square$

Diese Aussage ist auch die Grundlage dafür, dass die Dezimalentwicklung stets eine (eindeutige) reelle Zahl definiert. Eine (unendliche) Dezimalentwicklung

$$a, a_{-1}a_{-2}a_{-3}\ldots$$

mit $a \in \mathbb{N}$ (wir beschränken uns auf nichtnegative Zahlen) und $a_{-n} \in \{0,\ldots,9\}$ ist nämlich die Folge der rationalen Zahlen

$$x_0 := a,\ x_1 := a + a_{-1} \cdot \frac{1}{10},\ x_2 := a + a_{-1} \cdot \frac{1}{10} + a_{-2} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^2, \text{ etc.}$$

Diese ist offenbar monoton wachsend. Wir werden in der nächsten Vorlesung sehen, dass sie nach oben beschränkt ist (beispielsweise durch $a+1$), so dass dadurch in der Tat eine reelle Zahl definiert wird.

Satz 13.8. *Jede nichtleere nach oben beschränkte Teilmenge der reellen Zahlen besitzt ein Supremum in* $\mathbb{R}$.

Beweis. Es sei $M \subseteq \mathbb{R}$ eine nichtleere, nach oben beschränkte Teilmenge. Es sei $x_0 \in M$ und y_0 eine obere Schranke für M, d.h. es ist $x \leq y_0$ für alle $x \in M$. Wir konstruieren zwei Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei $x_n \in M$

wachsend, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fallend ist und jedes y_n eine obere Schranke von M ist (so dass insbesondere $x_n \leq y_n$ für alle n ist), und so, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist. Dabei gehen wir induktiv vor, d.h. die beiden Folgen seien bis n bereits definiert und erfüllen die gewünschten Eigenschaften. Wir setzen

$$x_{n+1} := \begin{cases} x_n, & \text{falls } [\frac{x_n+y_n}{2}, y_n] \cap M = \emptyset\,, \\ \text{ein beliebiger Punkt aus } [\frac{x_n+y_n}{2}, y_n] \cap M \text{ sonst}\,. \end{cases}$$

und

$$y_{n+1} := \begin{cases} \frac{x_n+y_n}{2}, & \text{falls } [\frac{x_n+y_n}{2}, y_n] \cap M = \emptyset\,, \\ y_n \text{ sonst}\,. \end{cases}$$

Dies erfüllt die gewünschten Eigenschaften, und es ist

$$y_n - x_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (y_0 - x_0)\,,$$

da in beiden Fällen der Abstand zumindest halbiert wird. Da die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wachsend und nach oben beschränkt ist, handelt es sich nach Lemma 13.7 um eine Cauchy-Folge. Wegen der Vollständigkeit besitzt die konstruierte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ einen Grenzwert x. Ebenso ist die fallende Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die nach unten beschränkt ist, eine Cauchy-Folge mit demselben Grenzwert x. Wir behaupten, dass dieses x das Supremum von M ist. Wir zeigen zuerst, dass x eine obere Schranke von M ist. Sei dazu $z > x$ angenommen für ein $z \in M$. Da die Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x konvergiert, gibt es insbesondere ein n mit

$$x \leq y_n < z$$

im Widerspruch dazu, dass jedes y_n eine obere Schranke von M ist. Für die Supremumseigenschaft müssen wir zeigen, dass x kleiner oder gleich jeder oberen Schranke von M ist. Sei dazu u eine obere Schranke von M und nehmen wir an, dass $x > u$ ist. Da $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x konvergiert, gibt es wieder ein n mit

$$u < x_n \leq x$$

im Widerspruch dazu, dass u eine obere Schranke ist. Also liegt wirklich das Supremum vor. □

Beispiel 13.9. Es sei $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $k \in \mathbb{N}$. Es sei

$$M = \{x \in \mathbb{R}_{\geq 0} | \, x^k \leq a\}\,.$$

Diese Menge ist wegen $0 \in M$ nicht leer und nach oben beschränkt (bei $a \leq 1$ ist 1 eine obere Schranke, sonst ist a eine obere Schranke). Es sei $s = \sup(M)$, das es nach Satz 13.10 geben muss. Dann ist $s^k = a$, d.h. s ist eine k-te Wurzel von a, da sowohl die Annahme $s^k < a$ als auch die Annahme $s^k > a$ zu einem Widerspruch führen.

13.5. **Intervallschachtelungen.**

Definition 13.10. Eine Folge von abgeschlossenen Intervallen

$$I_n = [a_n, b_n],\ n \in \mathbb{N},$$

in $\mathbb{R}$ heißt eine *Intervallschachtelung*, wenn $I_{n+1} \subseteq I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist und wenn die Folge der Intervalllängen, also

$$(b_n - a_n)_{n\in\mathbb{N}},$$

gegen null konvergiert.

Satz 13.11. *Es sei I_n, $n \in \mathbb{N}$, eine Intervallschachtelung in $\mathbb{R}$. Dann besteht der Durchschnitt*

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$$

aus genau einem Punkt $x \in \mathbb{R}$. Eine reelle Intervallschachtelung bestimmt also genau eine reelle Zahl.

Beweis. Siehe Aufgabe 13.3. □

Definition 13.12. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ heißt *bestimmt divergent* gegen $+\infty$, wenn es zu jedem $s \in \mathbb{R}$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$x_n \geq s \text{ für alle } n \geq N.$$

Sie heißt *bestimmt divergent* gegen $-\infty$, wenn es zu jedem $s \in \mathbb{R}$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$x_n \leq s \text{ für alle } n \geq N.$$

14. Vorlesung

14.1. **Reihen.**

Wir haben in der letzten Vorlesung gesagt, dass man eine Dezimalentwicklung, also eine (unendliche) Ziffernfolge mit Ziffern zwischen 0 und 9 als eine wachsende Folge von rationalen Zahlen auffassen kann. Dabei hat die n-te Nachkommastelle a_{-n} die Bedeutung, dass $a_{-n} \cdot 10^{-n}$ zur vorhergehenden Approximation hinzu zu addieren ist. Die Ziffernfolge gibt also direkt die Differenz der Folgenglieder an, und die Folgenglieder ergeben sich durch Aufsummieren dieser Differenzen. Diese Sichtweise führt zum Begriff der Reihe.

Definition 14.1. Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von reellen Zahlen. Unter der *Reihe* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ versteht man die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der *Partialsummen*

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k.$$

Falls die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, so sagt man, dass die *Reihe konvergiert.* In diesem Fall schreibt man für den Grenzwert ebenfalls

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

und nennt ihn die *Summe* der Reihe.

Alle Begriffe für Folgen übertragen sich auf Reihen, indem man eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ als Folge der Partialsummen $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ auffasst. Wie schon bei Folgen kann es sein, dass die Summation nicht bei $k = 0$, sondern bei einer anderen Zahl beginnt.

Beispiel 14.2. Wir wollen die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$$

berechnen, wozu wir zuerst eine Formel für die n-te Partialsumme angeben. Es ist

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} (\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}) = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

Diese Folge konvergiert gegen 1, so dass die Reihe konvergiert und ihre Summe gleich 1 ist.

Lemma 14.3. *Es sei*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

eine Reihe von reellen Zahlen. Dann ist die Reihe genau dann konvergent, wenn das folgende Cauchy-Kriterium *erfüllt ist: Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein n_0 derart, dass für alle $n \geq m \geq n_0$ die Abschätzung*

$$\left| \sum_{k=m}^{n} a_k \right| \leq \epsilon$$

gilt.

Beweis. Siehe Aufgabe 14.6. □

Lemma 14.4. *Es seien*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ und } \sum_{k=0}^{\infty} b_k$$

konvergente Reihen von reellen Zahlen mit den Summen s und t. Dann gelten folgende Aussagen.

(1) *Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ mit $c_k := a_k + b_k$ ist ebenfalls konvergent mit der Summe $s + t$.*

(2) *Für $r \in \mathbb{R}$ ist auch die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} d_k$ mit $d_k := ra_k$ konvergent mit der Summe rs.*

Beweis. Siehe Aufgabe 14.8. □

Lemma 14.5. *Es sei*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

eine konvergente Reihe von reellen Zahlen. Dann ist

$$\lim_{k \to \infty} a_k = 0$$

Beweis. Dies folgt direkt aus Lemma 14.3. □

Nikolaus von Oresme (1330-1382) bewies, dass die harmonische Reihe divergiert.

Es ist also eine notwendige Bedingung für die Konvergenz einer Reihe, dass die Reihenglieder eine Nullfolge bilden. Diese Bedingung ist nicht hinreichend, wie die *harmonische Reihe* zeigt.

Beispiel 14.6. Die *harmonische Reihe* ist die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}.$$

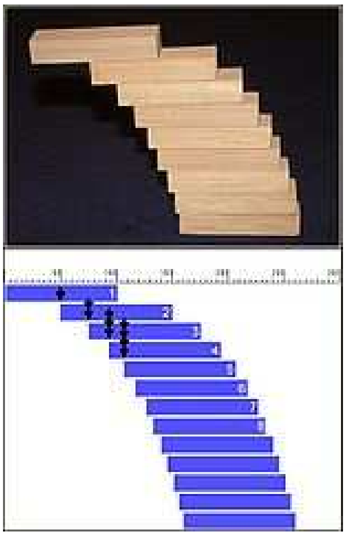
Diese Reihe divergiert: Für die 2^n Zahlen $k = 2^n + 1, \ldots, 2^{n+1}$ ist

$$\sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{2^{n+1}} = 2^n \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}.$$

Daher ist

$$\sum_{k=1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} = 1 + \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{k=2^i+1}^{2^{i+1}} \frac{1}{k} \right) \geq 1 + (n+1)\frac{1}{2}.$$

Damit ist die Folge der Partialsummen unbeschränkt und kann nach Lemma 12.8 nicht konvergent sein.



Aus der Divergenz der harmonischen Reihe folgt, dass man einen beliebig weiten Überhang mit gleichförmigen Bauklötzen bauen kann.

Die folgende Aussage heißt *Leibnizkriterium für alternierende Reihen.*

Satz 14.7. *Sei* $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ *eine fallende Nullfolge von nichtnegativen reellen Zahlen. Dann konvergiert die Reihe* $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x_k$.

Beweis. Dieser Beweis wurde in der Vorlesung nicht vorgeführt. □

14.2. **Absolute Konvergenz.**

Definition 14.8. Eine Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

von reellen Zahlen heißt *absolut konvergent*, wenn die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$$

konvergiert.

Satz 14.9. *Eine absolut konvergente Reihe von reellen Zahlen konvergiert.*

Beweis. Es sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Wir wenden das Cauchy-Kriterium an. Aufgrund der absoluten Konvergenz gibt es ein n_0 derart, dass für alle $n \geq m \geq n_0$ die Abschätzung

$$\left| \sum_{k=m}^{n} |a_k| \right| = \sum_{k=m}^{n} |a_k| \leq \epsilon$$

gilt. Daher ist

$$\left| \sum_{k=m}^{n} a_k \right| \leq \left| \sum_{k=m}^{n} |a_k| \right| \leq \epsilon,$$

was die Konvergenz bedeutet. □

Beispiel 14.10. Eine konvergente Reihe muss nicht absolut konvergieren, d.h. Satz 14.9 lässt sich nicht umkehren. Aufgrund des Leibnizkriteriums konvergiert die *alternierende harmonische Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots,$$

und zwar ist ihr Grenzwert $\ln 2$, was wir hier aber nicht beweisen. Die zugehörige absolute Reihe ist aber die harmonische Reihe, die nach Beispiel 14.6 divergiert.

Die folgende Aussage heißt das *Majorantenkriterium.*

Satz 14.11. *Sei $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ eine konvergente Reihe von reellen Zahlen und $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen mit $|a_k| \leq b_k$ für alle k. Dann ist die Reihe*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

absolut konvergent.

Beweis. Das folgt direkt aus dem Cauchy-Kriterium. □

Beispiel 14.12. Wir wollen bestimmen, ob die Reihe

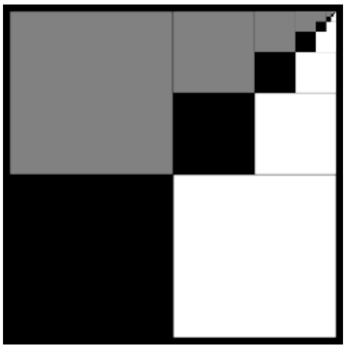
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

konvergiert oder nicht. Dazu ziehen wir das Majorantenkriterium und Beispiel 14.2 heran, wo wir die Konvergenz von $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ gezeigt haben. Für $k \geq 2$ ist

$$\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)}.$$

Daher konvergiert $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ und somit auch $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$. Über den Wert der Summe ist damit noch nichts gesagt. Mit deutlich aufwändigeren Methoden kann man zeigen, dass diese Summe gleich $\frac{\pi^2}{6}$ ist.

14.3. Die geometrische Reihe und das Quotientenkriterium.



Dieses Bild veranschaulicht das Verhalten der geometrischen Reihe zu $x = \frac{1}{4}$. Die Grundseite des Quadrates sei 2, dann passt die geometrische Reihe dreimal in dieses Quadrat rein. Der jeweilige Flächeninhalt der drei Reihen ist $\frac{4}{3}$.

Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ heißt *geometrische Reihe* zu $x \in \mathbb{R}$, es geht also um die Summe

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots .$$

Die Konvergenz hängt wesentlich vom Betrag von x ab.

Satz 14.13. *Für alle reellen Zahlen x mit $|x| < 1$ konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ absolut und es gilt*

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} .$$

Beweis. Für jedes x gilt die Beziehung

$$(x-1)\left(\sum_{k=0}^{n} x^k\right) = x^{n+1} - 1$$

und daher gilt für die Partialsummen die Beziehung (bei $x \neq 1$)

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}.$$

Für $n \to \infty$ und $|x| < 1$ konvergiert dies gegen $\frac{-1}{x-1} = \frac{1}{1-x}$. □

Die folgende Aussage heißt *Quotientenkriterium.*

Satz 14.14. *Es sei*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

eine Reihe von reellen Zahlen. Es gebe eine reelle Zahl q mit $0 \leq q < 1$ und ein k_0 mit

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq q$$

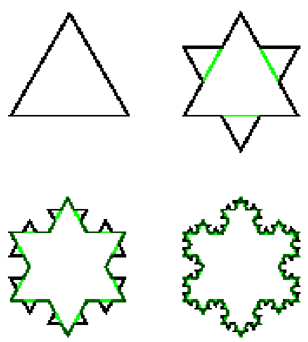
für alle $k \geq k_0$ (Insbesondere sei $a_k \neq 0$ für $k \geq k_0$). Dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut.

Beweis. Die Konvergenz[20] ändert sich nicht, wenn man endlich viele Glieder ändert. Daher können wir $k_0 = 0$ annehmen. Ferner können wir annehmen, dass alle a_k nichtnegative reelle Zahlen sind. Es ist

$$a_k \;=\; \frac{a_k}{a_{k-1}} \cdot \frac{a_{k-1}}{a_{k-2}} \cdots \frac{a_1}{a_0} \cdot a_0 \;\leq\; a_0 q^k .$$

Somit folgt die Konvergenz aus dem Majorantenkriterium und der Konvergenz der geometrischen Reihe. □

Beispiel 14.15. Unter den *Kochschen Schneeflocken* versteht man die Folge K_n der folgendermaßen rekursiv definierten ebenen Figuren: Die Ausgangsfigur K_0 ist ein gleichseitiges Dreieck. Die Figur K_{n+1} entsteht aus K_n, indem man in jeder Begrenzungskante von K_n das mittlere Drittel durch die beiden Schenkel eines darauf aufgesetzten nach außen gerichteten gleichmäßigen Dreiecks ersetzt.



Es sei A_n der Flächeninhalt und L_n die Länge des Randes der n-ten Kochschen Schneeflocke. Wir wollen zeigen, dass die Folge A_n konvergiert und die Folge L_n bestimmt gegen ∞ divergiert.

Die Anzahl der Kanten von K_n ist $3 \cdot 4^n$, da bei jedem Unterteilungsschritt eine Kante durch vier Kanten ersetzt wird, deren Länge $1/3$ der Länge der

[20] Wohl aber die Summe.

Vorgängerkante ist. Es sei r die Seitenlänge des gleichseitigen Ausgangsdreiecks. Dann besteht K_n aus $3 \cdot 4^n$ Kanten der Länge $r\left(\frac{1}{3}\right)^n$ und die Gesamtlänge der Kanten von K_n ist gleich

$$L_n = 3 \cdot 4^n r \left(\frac{1}{3}\right)^n = 3r \left(\frac{4}{3}\right)^n .$$

Wegen $\left(\frac{4}{3}\right) > 1$ divergiert dies gegen ∞.

Beim Übergang von K_n nach K_{n+1} kommt für jede Kante ein neues Dreieck mit gedrittelter Seitenlänge hinzu. Der Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreiecks mit Seitenlänge s ist $\frac{\sqrt{3}}{4}s^2$ (Grundseite mal Höhe durch 2). Im Schritt von K_n nach K_{n+1} kommen somit $3 \cdot 4^n$ Dreiecke mit dem Flächeninhalt $\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{2(n+1)} r^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} r^2 \left(\frac{1}{9}\right)^{n+1}$ hinzu. Daher ist der Gesamtflächeninhalt von K_n gleich

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{3}}{4} r^2 \left(1 + 3\frac{1}{9} + 12\left(\frac{1}{9}\right)^2 + 48\left(\frac{1}{9}\right)^3 + \ldots + 3 \cdot 4^{n-1}\left(\frac{1}{9}\right)^n\right) \\ = \; & \frac{\sqrt{3}}{4} r^2 \left(1 + \frac{3}{4}\left(\frac{4}{9}\right)^1 + \frac{3}{4}\left(\frac{4}{9}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(\frac{4}{9}\right)^3 + \ldots + \frac{3}{4}\left(\frac{4}{9}\right)^n\right). \end{aligned}$$

Wenn wir hinten die erste 1 und den Faktor $\frac{3}{4}$ ignorieren, was die Konvergenzeigenschaft nicht ändert, so steht in der Klammer die Partialsumme einer geometrischen Reihe zu $\frac{4}{9}$, welche konvergiert.

15. Vorlesung

15.1. **Stetige Funktionen.**

Den Abstand zwischen zwei reellen Zahlen x und x' bezeichnen wir mit $d(x, x') := |x - x'|$.

Bei einer Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

kann man sich fragen, inwiefern der Abstand in der Wertemenge durch den Abstand in der Definitionsmenge kontrollierbar ist. Sei $x \in \mathbb{R}$ und $y = f(x)$ der Bildpunkt. Man möchte, dass für Punkte x', die „nahe“ an x sind, auch die Bildpunkte $f(x')$ „nahe“ an $f(x)$ sind. Schon lineare Funktionen mit unterschiedlicher Steigung zeigen, dass die „Nähe“ im Bildbereich nicht mit der „Nähe“ im Definitionsbereich direkt verglichen weden kann. Die Zielsetzung ist vielmehr, dass es zu einer gewünschten Genauigkeit im Bildbereich überhaupt eine Ausgangsgenauigkeit gefunden werden kann, die sichert, dass die Funktionswerte innerhalb der gewünschten Genauigkeit beieinander liegen.

Um diese intuitive Vorstellung zu präzisieren, sei ein $\epsilon > 0$ vorgegeben. Dieses ϵ repräsentiert eine „gewünschte Zielgenauigkeit“. Die Frage ist dann, ob man ein $\delta > 0$ finden kann (eine „Startgenauigkeit“) mit der Eigenschaft, dass für alle x' mit $d(x,x') \leq \delta$ die Beziehung $d(f(x),f(x')) \leq \epsilon$ gilt. Dies führt zum Begriff der stetigen Abbildung.

Definition 15.1. Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge,

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion und $x \in D$. Man sagt, dass f *stetig* im Punkt x ist, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt derart, dass für alle x' mit $d(x,x') \leq \delta$ die Abschätzung $d(f(x),f(x')) \leq \epsilon$ gilt. Man sagt, dass f *stetig* ist, wenn sie in jedem Punkt $x \in D$ stetig ist.

Bei D sollte man an den Definitionsbereich der Funktion denken. Typische Situationen sind, dass D ganz $\mathbb{R}$ ist, oder ein Intervall, oder $\mathbb{R}$ ohne endlich viele Punkte und Ähnliches. Statt mit den reellen Zahlen ϵ und δ kann man genauso gut mit Stammbrüchen $\frac{1}{n}$ und $\frac{1}{m}$ arbeiten.

Beispiel 15.2. Eine konstante Funktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto c,$$

ist stetig. Zu jedem vorgegeben ϵ kann man hier ein beliebiges δ wählen, da ja ohnehin

$$d(f(x),f(x')) = d(c,c) = 0 \leq \epsilon$$

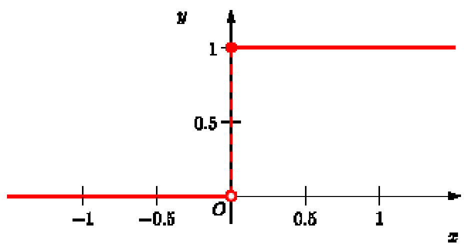
gilt.

Die Identität

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x,$$

ist ebenfalls stetig. Zu jedem vorgegebenen ϵ und kann man hier $\delta = \epsilon$ wählen, was zu der Tautologie führt: wenn $d(x,x') \leq \delta = \epsilon$, so ist

$$d(f(x),f(x')) = d(x,x') \leq \epsilon.$$



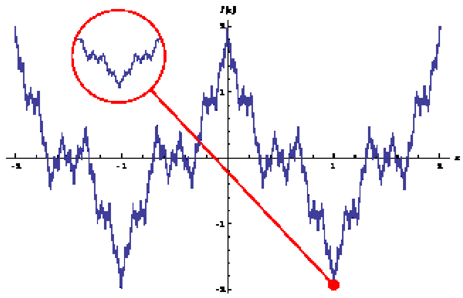
Beispiel 15.3. Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ falls } x < 0\,, \\ 1 \text{ falls } x \geq 0\,. \end{cases}$$

Diese Funktion ist im Nullpunkt 0 nicht stetig. Für $\epsilon = \frac{1}{2}$ und jedes beliebige positive δ gibt es nämlich negative Zahlen x' mit $d(0, x') = |x'| \leq \delta$. Für diese ist aber $d(f(0), f(x')) = d(1, 0) = 1 \not\leq \frac{1}{2}$.



Nicht jede stetige Funktion kann man zeichnen, auch nicht nach beliebiger Vergrößerung. Gezeigt wird eine Approximation einer Weierstraß-Funktion, die stetig ist, aber nirgendwo differenzierbar. Bei einer stetigen Funktion kann man zwar die Größe der Schwankungen im Bildbereich durch Einschränkungen im Definitionsbereich kontrollieren, die Anzahl der Schwankungen (die Anzahl der Richtungswechsel des Graphen) kann man aber nicht kontrollieren.

Die folgende Aussage bringt die Stetigkeit mit konvergenten Folgen in Verbindung.

Lemma 15.4. *Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge,*

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion und $x \in D$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(1) *f ist stetig im Punkt x.*
(2) *Für jede konvergente Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in D mit $\lim_{n \to \infty} x_n = x$ ist auch die Bildfolge $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent mit dem Grenzwert $f(x)$.*

Beweis. Sei (1) erfüllt und sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in D, die gegen x konvergiert. Wir müssen zeigen, dass $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x)$ ist. Dazu sei $\epsilon > 0$ gegeben. Wegen (1) gibt es ein δ mit der angegebenen Eigenschaft und wegen der Konvergenz von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen x gibt es eine natürliche Zahl n_0 derart, dass für alle $n \geq n_0$ gilt

$$d(x_n, x) \leq \delta \,.$$

Nach der Wahl von δ ist dann

$$d(f(x_n), f(x)) \leq \epsilon \text{ für alle } n \geq n_0 \,,$$

so dass die Bildfolge gegen $f(x)$ konvergiert.

Sei (2) erfüllt. Wir nehmen an, dass f nicht stetig ist. Dann gibt es ein $\epsilon > 0$ derart, dass es für alle $\delta > 0$ Elemente $z \in D$ gibt, deren Abstand zu x maximal gleich δ ist, deren Wert $f(z)$ unter der Abbildung aber zu $f(x)$ einen Abstand besitzt, der größer als ϵ ist. Dies gilt dann insbesondere für die Stammbrüche $\delta = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$. D.h. für jede natürliche Zahl gibt es ein $x_n \in D$ mit

$$d(x_n, x) \leq \frac{1}{n} \text{ und mit } d(f(x_n), f(x)) > \epsilon\,.$$

Diese so konstruierte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen x, aber die Bildfolge konvergiert nicht gegen $f(x)$, da der Abstand der Bildfolgenglieder zu $f(x)$ zumindest ϵ ist. Dies ist ein Widerspruch zu (2). □

15.2. **Rechenregeln für stetige Funktionen.**

Lemma 15.5. *Es seien $D \subseteq \mathbb{R}$ und $E \subseteq \mathbb{R}$ Teilmengen und*

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

und

$$g : E \longrightarrow \mathbb{R}$$

Funktionen mit $f(D) \subseteq E$. Dann gelten folgende Aussagen.

(1) *Wenn f in $x \in D$ und g in $f(x)$ stetig sind, so ist auch die Hintereinanderschaltung $g \circ f$ in x stetig.*
(2) *Wenn f und g stetig sind, so ist auch $g \circ f$ stetig.*

Beweis. Die Aussage (1) ergibt sich direkt aus der Folgencharakterisierung der Stetigkeit. Daraus folgt auch (2). □

Lemma 15.6. *Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und seien*

$$f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

stetige Funktionen. Dann sind auch die Funktionen

$$f + g : D \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) + g(x),$$

$$f - g : D \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) - g(x),$$

$$f \cdot g : D \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) \cdot g(x),$$

stetig. Für eine Teilmenge $U \subseteq D$, auf der g keine Nullstelle besitzt, ist auch die Funktion

$$f/g : U \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x)/g(x),$$

stetig.

Beweis. Dies ergibt sich aus der Folgencharakterisierung der Stetigkeit und Lemma 12.10. □

Korollar 15.7. *Polynomfunktionen*

$$P : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto P(x),$$

sind stetig.

Beweis. Aufgrund von Beispiel 15.2 und Lemma 15.6 sind für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Potenzen

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^n,$$

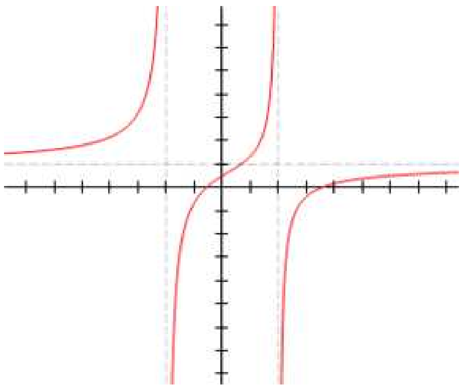
stetig. Daher sind auch für jedes $a \in \mathbb{R}$ die Funktionen

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto ax^n,$$

stetig und wiederum aufgrund von Lemma 15.6 sind auch alle Funktionen

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

stetig. □



Rationale Funktionen sind auf ihrer Definitionsmenge stetig.

Korollar 15.8. *Es seien $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ zwei Polynome und es sei $U := \{x \in \mathbb{R} \mid Q(x) \neq 0\}$. Dann ist die rationale Funktion*

$$U \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \frac{P(x)}{Q(x)},$$

stetig.

Beweis. Dies folgt aus Korallar 15.7 und Lemma 15.6. □

15.3. **Grenzwerte von Funktionen.**

Definition 15.9. Es sei $T \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge und sei $a \in \mathbb{R}$ ein Punkt. Es sei

$$f : T \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Dann heißt $b \in \mathbb{R}$ *Grenzwert* (oder *Limes*) von f in a, wenn für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in T, die gegen a konvergiert, auch die Bildfolge $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen b konvergiert. In diesem Fall schreibt man

$$\lim_{x\to a} f(x) = b\,.$$

Dieser Begriff ist eigentlich nur dann sinnvoll, wenn es überhaupt Folgen in T gibt, die gegen a konvergieren. Eine typische Situation ist die folgende: Es sei I ein Intervall, $a \in I$ sei ein Punkt darin und es sei $T = I \setminus \{a\}$. Die Funktion sei auf T, aber nicht im Punkt a definiert, und es geht um die Frage, inwiefern man f zu einer sinnvollen Funktion $\tilde{f}$ auf ganz I fortsetzen kann. Dabei soll $\tilde{f}(a)$ durch f bestimmt sein.

Lemma 15.10. *Es sei $T \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge und sei $a \in \mathbb{R}$ ein Punkt. Es seien $f : T \to \mathbb{R}$ und $g : T \to \mathbb{R}$ Funktionen derart, dass die Grenzwerte $\lim_{x \to a} f(x)$ und $\lim_{x \to a} g(x)$ existieren. Dann gelten folgende Beziehungen.*

(1) *Die Summe $f + g$ besitzt einen Grenzwert in a, und zwar ist*
$$\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)\,.$$
(2) *Das Produkt $f \cdot g$ besitzt einen Grenzwert in a, und zwar ist*
$$\lim_{x \to a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)\,.$$
(3) *Es sei $g(x) \neq 0$ für alle $x \in T$ und $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$. Dann besitzt der Quotient f/g einen Grenzwert in a, und zwar ist*
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}\,.$$

Beweis. Dies ergibt sich direkt aus Lemma 12.10. □

Lemma 15.11. *Es sei $T \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge und sei $a \in \mathbb{R}$ ein Punkt. Es sei $f : T \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $b \in \mathbb{R}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

(1) *Es ist*
$$\lim_{x \to a} f(x) = b\,.$$
(2) *Für jedes $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ derart, dass für alle $x \in T$ mit $d(x, a) \leq \delta$ die Abschätzung $d(f(x), b) \leq \epsilon$ folgt.*

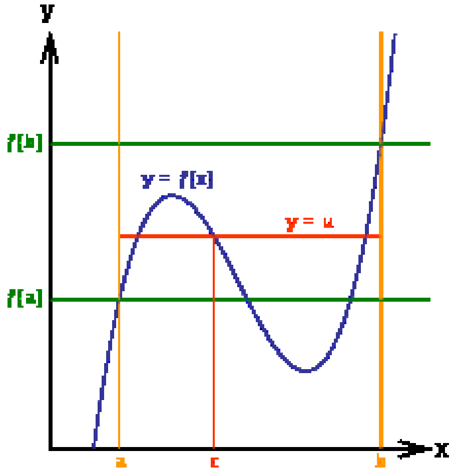
Beweis. Siehe Aufgabe 15.10. □

Für eine stetige Funktion $f : T \to \mathbb{R}$ folgt daraus, dass sie sich zu einer stetigen Funktion $\tilde{f} : T \cup \{a\} \to \mathbb{R}$ (durch $\tilde{f}(a) = b$) genau dann fortsetzen lässt, wenn der Limes von f in a gleich b ist.

16. Vorlesung

16.1. **Der Zwischenwertsatz.**

Wir interessieren uns dafür, was unter einer stetigen Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit einem Intervall passiert. Der Zwischenwertsatz besagt, dass das Bild wieder ein Intervall ist.



Satz 16.1. *Seien $a \leq b$ reelle Zahlen und sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Es sei $c \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl zwischen $f(a)$ und $f(b)$. Dann gibt es ein $x \in [a, b]$ mit $f(x) = c$.*

Beweis. Wir zeigen die Existenz von einem solchen c mit Hilfe einer Intervallhalbierung. Dazu setzt man $a_0 := a$ und $b_0 := b$, betrachtet die Intervallmitte $c_0 := \frac{a_0+b_0}{2}$ und berechnet

$$f(c_0)\,.$$

Bei $f(c_0) \leq u$ setzt man

$$a_1 := c_0 \text{ und } b_1 := b_0$$

und bei $f(c_0) > u$ setzt man

$$a_1 := a_0 \text{ und } b_1 := c_0\,.$$

In jedem Fall hat das neue Intervall $[a_1, b_1]$ die halbe Länge des Ausgangsintervalls und liegt in diesem. Da es wieder die Voraussetzung $f(a_1) \leq u \leq f(b_1)$ erfüllt, können wir darauf das gleiche Verfahren anwenden und gelangen so rekursiv zu einer Intervallschachtelung. Sei c die durch diese Intervallschachtelung definierte reelle Zahl. Für die unteren Intervallgrenzen gilt $f(a_n) \leq u$ und das überträgt sich wegen der Stetigkeit nach dem Folgenkriterium auf den Grenzwert c, also $f(c) \leq u$. Für die oberen Intervallgrenzen gilt $f(b_n) \geq u$ und das überträgt sich ebenfalls auf c, also $f(c) \geq u$. Also ist $f(c) = u$. □

Die in diesem Beweis beschriebene Methode ist konstruktiv und kann zu einem expliziten Verfahren ausgebaut werden.

Korollar 16.2. *Seien $a \leq b$ reelle Zahlen und sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(a) \leq 0$ und $f(b) \geq 0$. Dann gibt es ein $x \in \mathbb{R}$ mit $a \leq x \leq b$ und mit $f(x) = 0$, d.h. f besitzt eine Nullstelle zwischen a und b.*

Beweis. Dies folgt direkt aus Satz 16.1. □

Beispiel 16.3. Die Abbildung

$$f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q},\, x \longmapsto x^2 - 2,$$

ist stetig, sie genügt aber nicht dem Zwischenwertsatz. Für $x = 0$ ist $f(0) = -2 < 0$ und für $x = 2$ ist $f(2) = 2 > 0$, es gibt aber kein $x \in \mathbb{Q}$ mit $f(x) = 0$, da dafür $x^2 = 2$ sein muss, wofür es in $\mathbb{Q}$ keine Lösung gibt.

16.2. **Stetige bijektive Funktionen und ihre Umkehrfunktion.**

Für eine bijektive stetige Funktion auf einem reellen Intervall ist die Umkehrabbildung wieder stetig. Dies ist keineswegs selbstverständlich.

Satz 16.4. *Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und*

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige, streng wachsende Funktion. Dann ist das Bild $J := f(I) = \{f(x) | \, x \in I\}$ ebenfalls ein Intervall, und die Umkehrabbildung

$$f^{-1} : J \longrightarrow I$$

ist ebenfalls stetig.

Beweis. Dass das Bild wieder ein Intervall ist folgt aus Satz 16.1. Die Funktion f ist injektiv, da sie streng wachsend ist und damit ist die Abbildung

$$f : I \longrightarrow J$$

auf das Bild bijektiv. Die Umkehrfunktion

$$f^{-1} : J \longrightarrow I$$

ist ebenfalls streng wachsend. Sei $g := f^{-1}$ und $y := f(x)$ vorgegeben. Es sei zunächst y kein Randpunkt von J. Dann ist auch x kein Randpunkt von I. Sei $\epsilon > 0$ vorgegeben und ohne Einschränkung $[x-\epsilon, x+\epsilon] \subseteq I$ angenommen. Dann ist

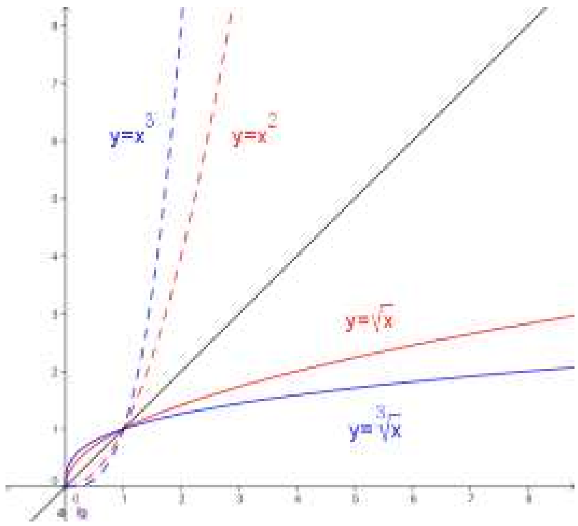
$$\delta := \min\left(y - f(x-\epsilon), f(x+\epsilon) - y\right) > 0$$

und für $y' \in [y - \delta, y + \delta]$ gilt

$$g(y') \in [g(y-\delta), g(y+\delta)] \subseteq [x - \epsilon, x + \epsilon]\,.$$

Also ist g stetig in y. Wenn y ein Randpunkt von J ist, so ist auch x ein Randpunkt von I, sagen wir der rechte Randpunkt. Dann ist zu vorgegebenem $\epsilon > 0$ wieder $[x - \epsilon, x] \subseteq I$ und $\delta := y - f(x - \epsilon)$ erfüllt die geforderte Eigenschaft. □

16.3. **Wurzeln.**



Satz 16.5. *Sei $n \in \mathbb{N}_+$. Für n ungerade ist die Potenzfunktion*

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^n,$$

stetig, streng wachsend, surjektiv und die Umkehrfunktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^{1/n},$$

ist streng wachsend und stetig. Für n gerade ist die Potenzfunktion

$$\mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0},\ x \longmapsto x^n,$$

stetig, streng wachsend, surjektiv und die Umkehrfunktion

$$\mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0},\ x \longmapsto x^{1/n},$$

ist streng wachsend und stetig.

Beweis. Die Stetigkeit ergibt sich aus Korallar 15.7. Das strenge Wachstum für $x \geq 0$ folgt aus der binomischen Formel. Für ungerades n folgt das strenge Wachstum für $x < 0$ aus der Beziehung $x^n = -(-x)^n$ und dem Verhalten im positiven Bereich. Für $x \geq 1$ ist $x^n \geq x$, woraus die Unbeschränktheit des Bildes nach oben folgt. Bei n ungerade folgt ebenso die Unbeschränktheit des Bildes nach unten. Aufgrund des Zwischenwertsatzes ist das Bild daher $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{R}_{\geq 0}$. Somit sind die Potenzfunktionen wie angegeben surjektiv und die Umkehrfunktionen existieren. Die Stetigkeit der Umkehrfunktionen folgt aus Satz 16.4. $\square$

Beispiel 16.6. Die Schallgeschwindigkeit auf der Erde ist abhängig von der Temperatur. Wenn man mit der absoluten Temperatur T (gemessen in Kelvin) arbeitet, so gilt die Beziehung

$$v = 20,06\sqrt{T}\,,$$

wobei die Schallgeschwindigkeit in m/s gemessen wird. Für $T = 300K$ ist also die Schallgeschwindigkeit ungefähr gleich $347,5m/s$.

16.4. **Der Satz von Bolzano-Weierstraß.**

Karl Weierstraß (1815-1897)

Die folgende Aussage heißt *Satz von Bolzano-Weierstraß*.

Satz 16.7. *Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge von reellen Zahlen. Dann besitzt die Folge eine konvergente Teilfolge.*

Beweis. Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei durch

$$a_0 \leq x_n \leq b_0$$

beschränkt. Wir definieren zuerst induktiv eine Intervallhalbierung derart, dass in den Intervallen unendlich viele Folgenglieder liegen. Das Startintervall ist $I_0 := [a_0, b_0]$. Sei das k-te Intervall I_k bereits konstruiert. Wir betrachten die beiden Hälften

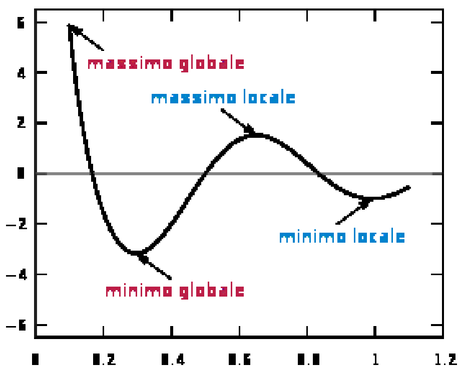
$$[a_k, \frac{a_k + b_k}{2}] \text{ und } [\frac{a_k + b_k}{2}, b_k]\,.$$

In mindestens einer der Hälften liegen unendlich viele Folgenglieder, und wir wählen als Intervall I_{k+1} eine Hälfte mit unendlich vielen Gliedern. Da sich bei diesem Verfahren die Intervalllängen mit jedem Schritt halbieren, liegt eine Intervallschachtelung vor. Als Teilfolge wählen wir nun ein beliebiges Element

$$x_{n_k} \in I_k$$

mit $n_k > n_{k-1}$. Dies ist möglich, da es in diesen Intervallen unendlich viele Folgenglieder gibt. Diese Teilfolge konvergiert gegen die durch die Intervallschachtelung bestimmte Zahl x. $\square$

16.5. **Minima und Maxima.**



Definition 16.8. Sei M eine Menge und

$$f : M \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Man sagt, dass f in einem Punkt $x \in M$ das *Maximum* annimmt, wenn

$$f(x) \geq f(x') \text{ für alle } x' \in M \text{ gilt},$$

und dass f das *Minimum* annimmt, wenn

$$f(x) \leq f(x') \text{ für alle } x' \in M \text{ gilt}.$$

Die gemeinsame Bezeichnung für ein Maximum oder ein Minimum ist *Extremum*. In der vorstehenden Definition spricht man auch von dem *globalen Maximum*, da darin Bezug auf sämtliche Elemente der Definitionsmenge genommen wird. Interessiert man sich nur für das Verhalten in einer offenen, eventuell kleinen Umgebung, so gelangt man zum Begriff des lokalen Maximums.

Definition 16.9. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge und sei

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Man sagt, dass f in einem Punkt $x \in D$ ein *lokales Maximum* besitzt, wenn es ein $\epsilon > 0$ gibt derart, dass für alle $x' \in D$ mit $|x - x'| \leq \epsilon$ die Abschätzung

$$f(x) \geq f(x')$$

gilt. Man sagt, dass f in $x \in D$ ein *lokales Minimum* besitzt, wenn es ein $\epsilon > 0$ gibt derart, dass für alle $x' \in D$ mit $|x - x'| \leq \epsilon$ die Abschätzung

$$f(x) \leq f(x')$$

gilt.

Wenn $f(x) > f(x')$ für alle $x' \neq x$, so spricht man von einem *isolierten Maximum.*

Satz 16.10. *Sei $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes beschränktes Intervall und sei*

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Dann gibt es ein $x \in [a, b]$ mit

$$f(x) \geq f(x') \text{ für alle } x' \in [a, b] .$$

D.h., dass die Funktion ihr Maximum (und ihr Minimum) annimmt.

Beweis. Nach dem Zwischenwertsatz wissen wir, dass das Bild $J := f([a, b])$ ein Intervall ist. Wir zeigen zunächst, dass J (nach oben und nach unten) beschränkt ist. Wir nehmen dazu an, dass J nicht nach oben beschränkt ist. Dann gibt es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in I mit $f(x_n) \geq n$. Nach Satz 16.7 besitzt $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge. Da $[a, b]$ abgeschlossen ist, gehört der Grenzwert der Teilfolge zu $[a, b]$. Wegen der Stetigkeit muss dann auch die Bildfolge konvergieren. Die Bildfolge ist aber unbeschränkt, so dass sie nach Lemma 12.8 nicht konvergieren kann, und sich ein Widerspruch ergibt.

Sei nun y das Supremum von J. Es gibt eine Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in J, die gegen das Supremum konvergiert. Nach Definition von J gibt es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f(x_n) = y_n$. Für diese Folge gibt es wieder nach Satz 16.7 eine konvergente Teilfolge. Es sei x der Grenzwert dieser Teilfolge. Somit ist aufgrund der Stetigkeit $f(x) = y$ und daher $y \in J$. □

Mit der Differentialrechnung werden wir bald schlagkräftige Methoden kennenlernen, um Minima und Maxima zu bestimmen.

17. Vorlesung

17.1. **Potenzreihen.**

Definition 17.1. Es sei $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von reellen Zahlen und x eine weitere reelle Zahl. Dann heißt die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

die *Potenzreihe* in x zu den Koeffizienten $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Durch Wahl geeigneter Koeffizienten kann man jede Reihe als Potenzreihe zu einer fixierten Basis $x \in \mathbb{R}$ ansehen. Bei Potenzreihen ist es aber wichtig, dass man x variieren lässt und dann die Potenzreihe in einem *Konvergenzintervall* eine Funktion in x darstellt.

Eine wichtige Potenzreihe haben wir schon in der 14ten Vorlesung kennengelernt, nämlich die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, die für $|x| < 1$ konvergiert und dort die Funktion $1/(1 - x)$ darstellt. Eine weitere besonders wichtige

Potenzreihe ist die *Exponentialreihe*, die für jede reelle Zahl konvergiert und zur *reellen Exponentialfunktion* führt. Ihre Umkehrfunktion ist der *natürliche Logarithmus.*

Satz 17.2. *Es sei*

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

eine Potenzreihe und es gebe ein $x_0 \neq 0$ *derart, dass* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x_0^n$ *konvergiere. Dann gibt es ein positives* R *(wobei* $R = \infty$ *erlaubt ist) derart, dass für alle* $x \in \mathbb{R}$ *mit* $|x| < R$ *die Reihe konvergiert. Auf einem solchen (offenen) Konvergenzintervall stellt die Potenzreihe* $f(x)$ *eine stetige Funktion dar.*

Beweis. Der Beweis beruht auf einer systematischen Untersuchung für Potenzreihen und dem Limes von Funktionenfolgen. Wir werden ihn nicht durchführen. $\square$

Definition 17.3. Zu zwei Reihen $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ und $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ reeller Zahlen heißt die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \text{ mit } c_k := \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$$

das *Cauchy-Produkt* der beiden Reihen.

Auch für die folgende Aussage geben wir keinen Beweis.

Lemma 17.4. *Es seien*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \textit{ und } \sum_{k=0}^{\infty} b_k$$

zwei absolut konvergente Reihen reeller Zahlen. Dann ist auch das Cauchy-Produkt $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ *absolut konvergent und für die Summe gilt*

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k \right) .$$

17.2. **Die Exponentialreihe und die Exponentialfunktion.**

Definition 17.5. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ heißt die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

die *Exponentialreihe* in x.

Dies ist also die Reihe

$$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \dots .$$

Satz 17.6. *Für jedes $x \in \mathbb{R}$ ist die Exponentialreihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

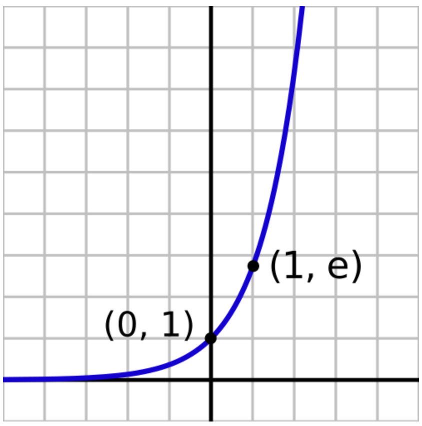
absolut konvergent.

Beweis. Für $x = 0$ ist die Aussage richtig. Andernfalls betrachten wir den Quotienten

$$\left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} \right| = \left| \frac{x}{n+1} \right| = \frac{|x|}{n+1}.$$

Dies ist für $n \geq 2|x|$ kleiner als $1/2$. Aus dem Quotientenkriterium folgt daher die Konvergenz. □

Aufgrund dieser Eigenschaft können wir die reelle Exponentialfunktion definieren.



Der Graph der reellen Exponentialfunktion

Definition 17.7. Die Funktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto \exp x := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

heißt (reelle) *Exponentialfunktion.*

Satz 17.8. *Für reelle Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\exp(x + y) = \exp x \cdot \exp y\,.$$

Beweis. Das Cauchy-Produkt der beiden Exponentialreihen ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

mit $c_n = \sum_{i=0}^n \frac{x^i}{i!} \frac{y^{n-i}}{(n-i)!}$. Diese Reihe ist nach Lemma 17.4 absolut konvergent und der Grenzwert ist das Produkt der beiden Grenzwerte. Andererseits ist der n-te Summand der Exponentialreihe von $x+y$ gleich

$$\frac{(x+y)^n}{n!} \;=\; \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i} \;=\; c_n,$$

so dass die beiden Seiten übereinstimmen. $\square$

Korollar 17.9. *Die Exponentialfunktion*

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\; x \longmapsto \exp x,$$

besitzt folgende Eigenschaften.

(1) *Es ist* $\exp 0 = 1$.
(2) *Für jedes* $x \in \mathbb{R}$ *ist* $\exp(-x) = (\exp x)^{-1}$. *Insbesondere ist* $\exp x \neq 0$.
(3) *Für ganze Zahlen* $n \in \mathbb{Z}$ *ist* $\exp n = (\exp 1)^n$.
(4) *Für jedes* x *ist* $\exp x \in \mathbb{R}_+$.
(5) *Für* $x > 0$ *ist* $\exp x > 1$ *und für* $x < 0$ *ist* $\exp x < 1$.
(6) *Die reelle Exponentialfunktion ist streng wachsend.*

Beweis. (1) folgt direkt aus der Definition. (2) folgt aus

$$\exp x \cdot \exp(-x) \;=\; \exp(x-x) \;=\; \exp 0 \;=\; 1$$

aufgrund von Satz 17.8. (3) folgt für $n \in \mathbb{N}$ aus Satz 17.8 durch Induktion, und daraus wegen (2) auch für negatives n. (4). Die Nichtnegativität ergibt sich aus

$$\exp x \;=\; \exp\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) \;=\; \exp\frac{x}{2} \cdot \exp\frac{x}{2} \;=\; \left(\exp\frac{x}{2}\right)^2 \;\geq\; 0.$$

(5). Für reelles x ist $\exp x \cdot \exp(-x) = 1$, so dass nach (4) ein Faktor ≥ 1 sein muss und der andere Faktor ≤ 1. Für $x > 0$ ist

$$\exp x \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \;=\; 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \ldots \;>\; 1,$$

da ja hinten nur positive Zahlen hinzuaddiert werden. (6). Für reelle $y > x$ ist $y - x > 0$ und daher nach (5) $\exp(y-x) > 1$, also

$$\exp y \;=\; \exp(y - x + x) \;=\; \exp(y-x) \cdot \exp x \;>\; \exp x.$$

$\square$

Mit der Exponentialreihe definieren wir die *eulersche Zahl*.

Definition 17.10. Die reelle Zahl

$$e := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

heißt *eulersche Zahl*.

Diese Zahl hat den Wert

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \ldots \cong 2,71\ldots .$$

Bemerkung 17.11. Für die eulersche Zahl gilt

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n ,$$

so dass e auch als Grenzwert dieser Folge eingeführt werden kann. Die Konvergenz bei der Exponentialreihe ist aber deutlich schneller.

Statt $\exp x$ werden wir in Zukunft auch e^x schreiben.

Satz 17.12. *Die reelle Exponentialfunktion*

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \exp x,$$

ist stetig und stiftet eine Bijektion zwischen $\mathbb{R}$ *und* $\mathbb{R}_+$*.*

Beweis. Die Stetigkeit folgt aus Satz 17.2, da die Exponentialfunktion ja über eine Potenzreihe definiert ist. Nach Korollar 17.9 liegt das Bild in $\mathbb{R}_+$ und ist nach dem Zwischenwertsatz ein Intervall. Die Unbeschränktheit des Bildes folgt aus Korollar 17.9, woraus wegen Korollar 17.9, folgt, dass auch beliebig kleine positive reelle Zahlen zum Bild gehören. Daher ist das Bild gleich $\mathbb{R}_+$. Die Injektivität ergibt sich aus Korollar 17.9. □

17.3. **Logarithmen.**

Definition 17.13. Der *natürliche Logarithmus*

$$\ln : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \ln x,$$

ist definiert als die Umkehrfunktion der reellen Exponentialfunktion.

Satz 17.14. *Der natürliche Logarithmus*

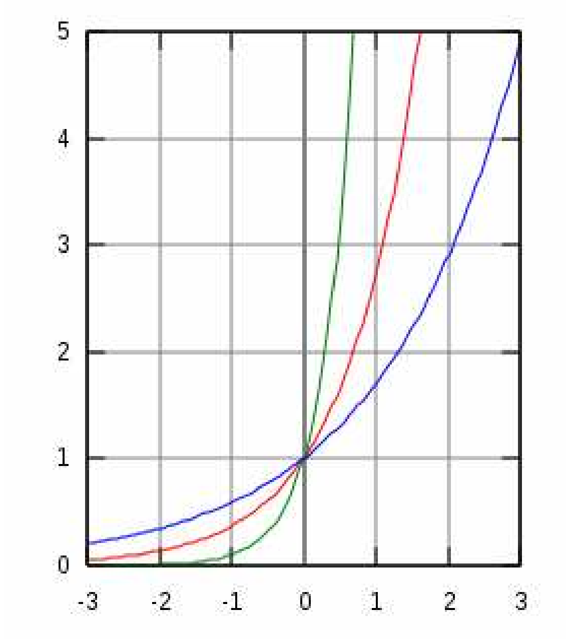
$$\ln : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \ln x,$$

ist eine stetige, streng wachsende Funktion, die eine Bijektion zwischen $\mathbb{R}_+$ *und* $\mathbb{R}$ *stiftet. Dabei gilt*

$$\ln (x \cdot y) = \ln x + \ln y$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}_+$*.*

Beweis. Dies folgt aus Satz 17.8, Korollar 17.9, Satz 17.12 und Satz 16.4. □



Die Exponentialfunktionen für verschiedene Basen

Definition 17.15. Zu einer positiven reellen Zahl $b > 0$ definiert man die *Exponentialfunktion zur Basis* b als

$$b^x := \exp(x \ln b) .$$

Satz 17.16. *Für die Exponentialfunktionen*

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto a^x,$$

gelten die folgenden Rechenregeln (dabei seien $a, b \in \mathbb{R}_+$ und $x, y \in \mathbb{R}$).

(1) $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$.
(2) $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$.
(3) $(a^x)^y = a^{xy}$.
(4) $(ab)^x = a^x b^x$.

Beweis. Siehe Aufgabe 17.7. □

Bemerkung 17.17. Die Exponentialfunktionen $x \mapsto a^x$ zur Basis $a > 0$ kann man auch anders einführen. Für natürliche Zahlen $n \geq 0$ nimmt man das n-fache Produkt von a mit sich selbst, also a^n, als Definition. Für eine negative ganze Zahl x setzt man $a^x := (a^{-x})^{-1}$. Für eine positive rationale Zahl $x = r/s$ setzt man

$$a^x := \sqrt[s]{a^r} ,$$

wobei man natürlich die Unabhängigkeit von der gewählten Bruchdarstellung beweisen muss. Für eine negative rationale Zahl arbeitet man wieder mit

Inversen. Für eine beliebige reelle Zahl x schließlich nimmt man eine Folge q_n von rationalen Zahlen, die gegen x konvergiert, und definiert

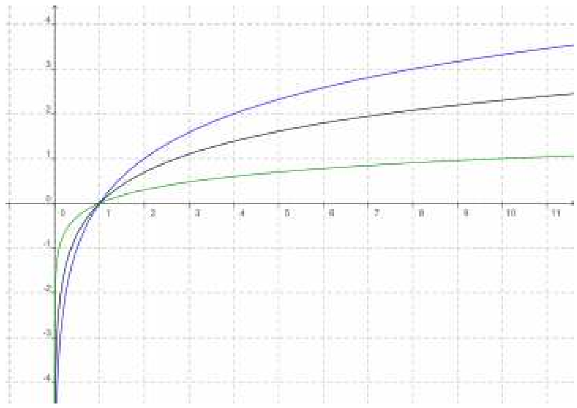
$$a^x := \lim_{n\to\infty} a^{q_n} .$$

Hierzu muss man zeigen, dass diese Limiten existieren und unabhängig von der gewählten rationalen Folge sind. Für den Übergang von $\mathbb{Q}$ nach $\mathbb{R}$ ist der Begriff der gleichmäßigen Stetigkeit entscheidend.

Definition 17.18. Zu einer positiven reellen Zahl $b > 0$ wird der *Logarithmus zur Basis b* durch

$$\log_b x := \frac{\ln x}{\ln b}$$

definiert.



Logarithmen zu verschiedenen Basen

Satz 17.19. *Die Logarithmen zur Basis b erfüllen die folgenden Rechenregeln.*

(1) *Es ist* $\log_b(b^x) = x$ *und* $b^{\log_b(y)} = y$, *das heißt der Logarithmus zur Basis b ist die Umkehrfunktion zur Exponentialfunktion zur Basis b.*
(2) *Es gilt* $\log_b(y \cdot z) = \log_b y + \log_b z$
(3) *Es gilt* $\log_b y^u = u \cdot \log_b y$ *für* $u \in \mathbb{R}$.
(4) *Es gilt*

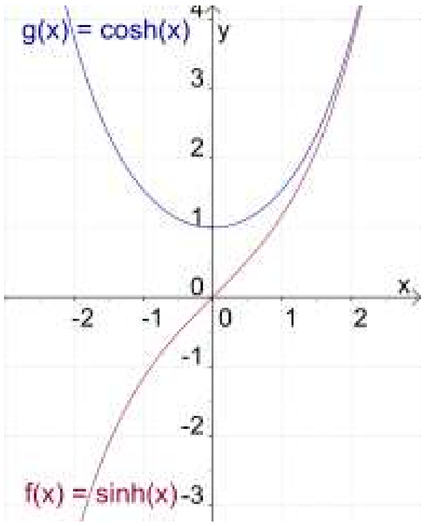
$$\log_a y \;=\; \log_a(b^{\log_b y}) \;=\; \log_b y \cdot \log_a b.$$

Beweis. Siehe Aufgabe 17.8. □

18. Vorlesung

In dieser Vorlesung führen wir weitere wichtige Funktionen über ihre Potenzreihen ein.

18.1. **Die Hyperbelfunktionen.**



Der Verlauf der Hyperbelfunktionen

Definition 18.1. Die für $x \in \mathbb{R}$ durch

$$\sinh x := \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

definierte Funktion heißt *Sinus hyperbolicus*.

Definition 18.2. Die für $x \in \mathbb{R}$ durch

$$\cosh x := \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

definierte Funktion heißt *Kosinus hyperbolicus*.

Lemma 18.3. *Die Funktionen Sinus hyperbolicus und Kosinus hyperbolicus besitzen die folgenden Eigenschaften.*

(1)
$$\cosh x + \sinh x = e^x$$

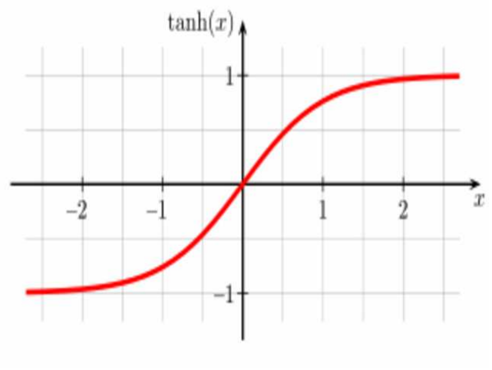
(2)
$$\cosh x - \sinh x = e^{-x}$$

(3)
$$(\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 = 1\,.$$

Beweis. Siehe Aufgabe 18.1. □

Lemma 18.4. *Die Funktion Sinus hyperbolicus ist streng wachsend und die Funktion Kosinus hyperbolicus ist auf* $\mathbb{R}_{\leq 0}$ *streng fallend und auf* $\mathbb{R}_{\geq 0}$ *streng wachsend.*

Beweis. Siehe Aufgabe 18.2 und Aufgabe 18.14. □

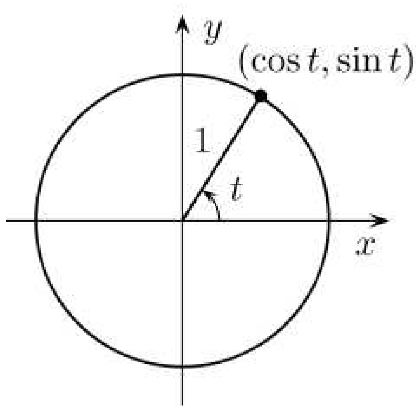


Definition 18.5. Die Funktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

definierte Funktion heißt *Tangens hyperbolicus*.

18.2. **Der Kreis und die trigonometrischen Funktionen.**



Die trigonometrischen Funktionen *Sinus* und *Kosinus* werden in einem naiven Zugang am Einheitskreis definiert. Es sei

$$E := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\, x^2 + y^2 = 1\}$$

der *Einheitskreis*, also der Kreis mit dem Radius 1 und dem Mittelpunkt $0 = (0,0)$. Für einen Punkt in der Ebene mit den Koordinanten (x,y) ist aufgrund des Satzes des Pythagoras $\sqrt{x^2+y^2}$ der Abstand zum Nullpunkt. Ein „Winkel“ α am Nullpunkt (und von der positiven „x-Achse“ aus „gegen den Uhrzeigersinn“ gemessen) definiert eine vom Nullpunkt ausgehende „Halbgerade“ (oder „Strahl“). Da diese einen eindeutigen Durchstoßungspunkt $P(\alpha) = (x,y)$ mit der Einheitskreislinie besitzt, definiert der Winkel auch einen eindeutigen Punkt auf dem Einheitskreis. Dessen Koordinaten sind nach Definition gleich

$$P(\alpha) = (\cos\alpha\,,\, \sin\alpha\,)\,,$$

d.h. die x-Koordinate wird durch den Kosinus und die y-Koordinate wird durch den Sinus angegeben. Dadurch sind einige wichtige Eigenschaften direkt klar:

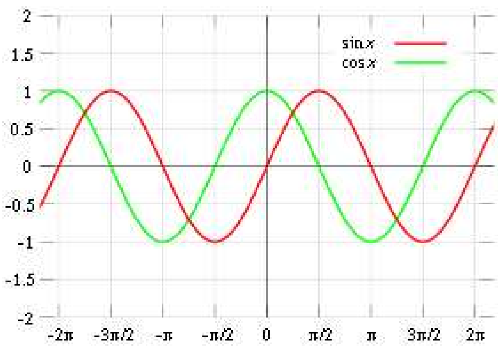
(1) Es gilt

$$(\cos\alpha\,)^2 + (\sin\alpha\,)^2 = 1\,.$$

(2) Es ist $\cos 0 = 1$ und $\sin 0 = 0$.
(3) Wenn der Winkel β eine Vierteldrehung bezeichnet, so ist $\cos\beta = 0$ und $\sin\beta = 1$.
(4) Es ist $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ und $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$. Dabei bezeichnet $-\alpha$ den durch den gegenläufigen Strahl definierten Winkel.[21]
(5) Die Werte von Sinus und Kosinus wiederholen sich nach einer Volldrehung.

Diese Definition ist zwar intuitiv klar, sie ist aber in verschiedener Hinsicht unbefriedigend.

(1) Es ist nicht klar, wie der Winkel zu messen ist.
(2) Es gibt keinen analytischen „berechenbaren" Ausdruck, wie zu einem gegebenen Winkel die Werte von Kosinus und Sinus berechnet werden müssen.
(3) Damit fehlt die Grundlage, um Gesetzmäßigkeiten dieser Funktionen zu beweisen.



Die Graphen von Kosinus und Sinus. Der qualitative Verlauf ist von der naiven Definition her klar. Mit der unten folgenden analytischen Definition über Reihen kann man die Funktionswerte beliebig genau ausrechnen. Für viele wichtige qualitative Eigenschaften wie die Periodizität mit der Periodenlänge 2π muss man aber die analytische Definition genauer studieren.

[21] Dieser Winkel ist $\alpha + \pi$ im Bogenmaß.

Mit diesen Defiziten hängt auch zusammen, dass wir noch keine präzise Definition für die Kreiszahl π haben. Diese ist bekanntlich gleich dem Kreisinhalt des Einheitskreises und gleich der Hälfte des Kreisumfanges. Doch sind sowohl der „Flächeninhalt ebener berandeter Gebiete“ als auch die „Länge von gebogenen Kurven“ problematische Begriffe. Von daher ist es in der höheren Mathematik sinnvoll, die Kreisfunktionen über ihre Potenzreihen einzuführen und nach und nach zu beweisen, dass sie die gewünschten Eigenschaften erfüllen. Sodann kann man auch die Kreiszahl π über Eigenschaften dieser Funktionen einführen und letztlich den Winkel als Länge des zugehörigen Kreisbogens einführen, nachdem diese Länge exakt definiert wird (was wir erst im zweiten Semester tun).

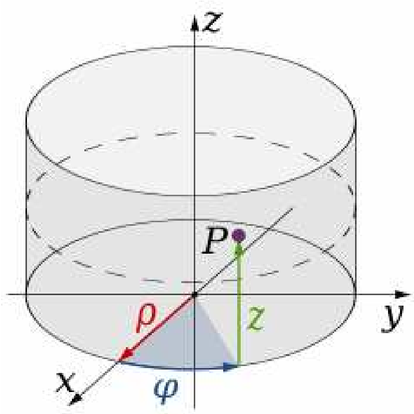
Wir besprechen einige wichtige Anwendungen der trigonometrischen Funktionen, nämlich Polarkoordinaten und Drehungen, wobei wir die Winkel naiv verstehen und die trigonometrischen Funktionen als geometrisch definiert betrachten.

18.3. **Polar- und Zylinderkoordinaten.**

Beispiel 18.6. Ein Winkel α und eine positive reelle Zahl r definieren einen eindeutigen Punkt

$$P = (x,y) = (r \cos \alpha , r \sin \alpha) = r(\cos \alpha , \sin \alpha)$$

in der reellen Ebene $\mathbb{R}^2$. Dabei bedeutet r den Abstand des Punktes P vom Nullpunkt $(0,0)$ und $(\cos \alpha , \sin \alpha)$ bedeutet den Durchstoßungspunkt der durch P definierten Halbgeraden mit dem Einheitskreis. Jeder Punkt $P = (x,y) \neq 0$ besitzt eine eindeutige Darstellung mit $r = \sqrt{x^2+y^2}$ und mit einem Winkel α, der je nach dem gewählten Winkelmaß geeignet zu wählen ist, also beispielsweise aus $[0,2\pi[$ ist (der Nullpunkt wird durch $r=0$ und einen beliebigen Winkel repräsentiert). Die Komponenten (r,α) heißen die *Polarkoordinaten* von P.



Beispiel 18.7. Eine räumliche Variante von Beispiel 18.6 wird durch *Zylinderkoordinaten* gegeben. Ein Tripel $(r, \alpha, z) \in \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi[\times \mathbb{R}$ wird dabei auf die kartesischen Koordinaten

$$(x, y, z) = (r \cos \alpha, r \sin \alpha, z)$$

abgebildet.

Beispiel 18.8. Jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, kann man eindeutig schreiben als

$$z = r(\cos \alpha, \sin \alpha) = (r \cos \alpha, r \sin \alpha) = r \cos \alpha + (r \sin \alpha)i$$

mit einer eindeutig bestimmten positiven reellen Zahl r, nämlich dem Abstand von z zum Nullpunkt (also $r = |z|$) und einem eindeutig bestimmten Winkel α zwischen 0 (einschließlich) und 360 Grad (ausschließlich), der ausgehend von der positiven reellen Achse gegen den Uhrzeigersinn gemessen wird. Man spricht von *Polarkoordinaten* für die komplexen Zahlen.

Polarkoordinaten der reellen Zahlenebene und für komplexe Zahlen unterscheiden sich nicht. Allerdings erlauben Polarkoordinaten eine Neuinterpretation der Multiplikation von komplexen Zahlen: Wegen

$$\begin{aligned} & (r \cos \alpha + ir \sin \alpha) \cdot (s \cos \beta + is \sin \beta) \\ = \ & rs(\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) + irs(\cos \alpha \sin \beta - \sin \alpha \cos \beta) \\ = \ & rs(\cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)) \end{aligned}$$

(dabei wurden im letzten Schritt die Additionstheoreme für Sinus und Kosinus verwendet) multipliziert man zwei komplexe Zahlen, indem man ihre Beträge multipliziert und ihre Winkel addiert.

Diese Neuinterpretation der Multiplikation von komplexen Zahlen führt auch zu einem neuen Verständnis der Wurzeln aus komplexen Zalen, die es aufgrund des Fundamentalsatzes der Algebra geben muss. Wenn $z = r \cos \alpha + ri \sin \alpha$ ist, so ergibt sich, dass

$$w = \sqrt[n]{r} \cos \frac{\alpha}{n} + \sqrt[n]{r} i \sin \frac{\alpha}{n}$$

eine n-te Wurzel von z ist. D.h. man muss für den Betrag der komplexen Zahl die reelle n-te Wurzel nehmen und den Winkel durch n teilen.

18.4. **Drehungen.**

Eine Drehung der reellen Ebene $\mathbb{R}^2$ um den Nullpunkt um den Winkel α gegen den Uhrzeigersinn bildet $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ auf $\begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ auf $\begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix}$ ab. Daher werden ebene Drehungen folgendermaßen beschrieben.

Definition 18.9. Eine lineare Abbildung

$$D(\alpha) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,$$

die durch eine *Drehmatrix* $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ (mit einem $\alpha \in \mathbb{R}$) bezüglich der Standardbasis gegeben ist, heißt *Drehung*.

Eine *Raumdrehung* ist eine lineare Abbildung des $\mathbb{R}^3$ in sich, bei der um eine Drehachse (durch den Nullpunkt) um einen bestimmten Winkel gedreht wird. Wenn der Vektor $v_1 \neq 0$ die Drehachse definiert und u_2 und u_3 auf v_1 und aufeinander senkrecht stehen, so wird die Drehung bezüglich v_1, u_2, u_3 durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

beschrieben.

18.5. **Die trigonometrischen Reihen.**

Wir besprechen nun den analytischen Zugang zu den trigonometrischen Funktionen.

Definition 18.10. Für $x \in \mathbb{R}$ heißt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

die *Kosinusreihe* und

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

die *Sinusreihe* zu x.

Durch Vergleich mit der Exponentialreihe ergibt sich sofort, dass diese beiden Reihen für jedes x absolut konvergieren. Die zugehörigen Funktionen

$$\cos x := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \text{ und } \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

heißen *Sinus* und *Kosinus*. Beide Funktionen stehen unmittelbar in Zusammenhang mit der Exponentialfunktion, wobei man allerdings die komplexen Zahlen braucht, um diesen Zusammenhang zu erkennen. Der Hintergrund ist, dass man in Potenzreihen stets auch komplexe Zahlen einsetzen kann (der Konvergenzbereich ist dann nicht ein reelles Konvergenzintervall, sondern eine Kreisscheibe). Für die Exponentialreihe und $z = ix$ (wobei x reell oder komplex sein kann) ist (wir verwenden Rechenregeln für Potenzreihen, die wir nicht behandelt haben)

$$\exp(ix) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k!}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=0,\, k \text{ gerade}}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k!} + \sum_{k=0,\, k \text{ ungerade}}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + i(-1)^n \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x)^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= \cos x + i \sin x\,.
\end{aligned}
$$

Mit dieser Beziehung zwischen komplexer Exponentialfunktion und den trigonometrischen Funktionen (die die *eulersche Formel* heißt) lassen sich viele Eigenschaften der letzteren besonders einfach beweisen. Prominente Spezialfälle dieser Beziehung sind

$$e^{\pi i} = -1$$

und

$$e^{2\pi i} = 1.$$

Aufgrund von Satz 17.2 sind Sinus und Kosinus stetige Funktionen. Weitere wichtige Eigenschaften werden in der folgenden Aussage zusammengefasst.

Satz 18.11. *Die Funktionen*

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto \cos x\,,$$

und

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto \sin x\,,$$

besitzen für $x, y \in \mathbb{R}$ folgende Eigenschaften.

(1) *Es ist* $\cos 0 = 1$ *und* $\sin 0 = 0$.
(2) *Es ist* $\cos(-x) = \cos x$ *und* $\sin(-x) = -\sin x$.
(3) *Es gelten die Additionstheoreme*

$$\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y\,.$$

und

$$\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y\,.$$

(4) *Es gilt*

$$(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1\,.$$

Beweis. (1) und (2) folgen direkt aus der Definition der Reihen. (3). Der $2n$-te Summand in der Kosinusreihe (die Koeffizienten zu x^i, i ungerade, sind 0) von $x+y$ ist

$$\begin{aligned}
\frac{(-1)^n(x+y)^{2n}}{(2n)!} &= \frac{(-1)^n}{(2n)!}\sum_{i=0}^{2n}\binom{2n}{i}x^iy^{2n-i} \\
&= (-1)^n\sum_{i=0}^{2n}\frac{1}{i!(2n-i)!}x^iy^{2n-i} \\
&= (-1)^n\sum_{j=0}^{n}\frac{x^{2j}y^{2n-2j}}{(2j)!(2n-2j)!} \\
&\qquad +(-1)^n\sum_{j=0}^{n-1}\frac{x^{2j+1}y^{2n-2j-1}}{(2j+1)!(2n-2j-1)!},
\end{aligned}$$

wobei wir im letzen Schritt die Indexmenge in gerade und ungerade Zahlen aufgeteilt haben.

Der $2n$-te Summand im Cauchy-Produkt von $\cos x$ und $\cos y$ ist

$$\sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^j(-1)^{n-j}}{(2j)!(2(n-j))!}x^{2j}y^{2(n-j)} = (-1)^n\sum_{j=0}^{n}\frac{x^{2j}y^{2(n-j)}}{(2j)!(2(n-j))!}$$

und der $2n$-te Summand im Cauchy-Produkt von $\sin x$ und $\sin y$ ist

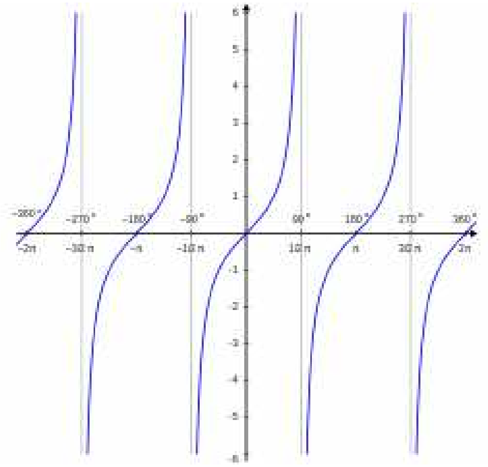
$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{n-1}\frac{(-1)^j(-1)^{n-1-j}}{(2j+1)!(2(n-1-j)+1)!}x^{2j+1}y^{2(n-j)+1} \\
&\qquad =(-1)^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{x^{2j+1}y^{2(n-1-j)+1}}{(2j+1)!(2(n-1-j)+1)!}.
\end{aligned}$$

Daher stimmen die beiden Seiten des Additionstheorems überein. Das Additionstheorem für den Sinus folgt ähnlich. (4). Aus dem Additionstheorem für den Kosinus angewendet auf $y := -x$ und aufgrund von (2) ergibt sich

$$\begin{aligned}
1 &= \cos 0 \\
&= \cos(x-x) \\
&= \cos x\cdot\cos(-x) - \sin x\cdot\sin(-x) \\
&= \cos x\cdot\cos x + \sin x\cdot\sin x\,.
\end{aligned}$$

□

Die letzte Aussage im vorstehenden Satz besagt, dass das Paar $(\cos x, \sin x)$ ein Punkt auf dem *Einheitskreis* $\{(u,v)|\, u^2+v^2=1\}$ ist. Wir werden später sehen, dass sich jeder Punkt des Einheitskreises als $(\cos x, \sin x)$ schreiben lässt, wobei man x als Winkel interpretieren kann. Dabei tritt die Periode 2π auf, wobei wir die *Kreiszahl* π eben über die trigonometrischen Funktionen einführen werden.



In der folgenden Definition für Tangens und Kotangens verwenden wir in der Formulierung der Definitionsbereiche die Zahl π.

Definition 18.12. Die Funktion

$$\mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \mathbb{Z}\pi\right) \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto \tan x = \frac{\sin x}{\cos x},$$

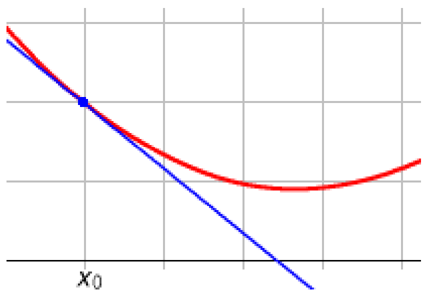
heißt *Tangens* und die Funktion

$$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}\pi \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto \cot x = \frac{\cos x}{\sin x},$$

heißt *Kotangens*.

19. Vorlesung

19.1. **Differenzierbarkeit.**



In diesem Abschnitt betrachten wir Funktionen

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R},$$

wobei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge ist. Wir wollen erklären, wann eine solche Funktion in einem Punkt $a \in D$ differenzierbar ist. Die intuitive Idee ist dabei, für einen weiteren Punkt $x \in D$ die *Sekante* durch die zwei Punkte $(a, f(a))$ und $(x, f(x))$ des Funktionsgraphen zu ziehen und dann „x gegen a laufen zu lassen“. Wenn sich dieser Grenzwertprozess sinnvoll durchführen lässt, so wird aus den Sekanten eine Tangente. Dieser Grenzwertprozess wird über den Begriff des Grenzwertes einer Funktion präzise gefasst, den wir im Anschluss an die Stetigkeit eingeführt haben.

Definition 19.1. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge, $a \in D$ ein Punkt und

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Zu $x \in D$, $x \neq a$, heißt die Zahl

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

der *Differenzenquotient* von f zu a und x.

Der Differenzenquotient ist die Steigung der Sekante am Graph durch die beiden Punkte $(a, f(a))$ und $(x, f(x))$. Für $x = a$ ist dieser Quotient *nicht* definiert. Allerdings kann ein sinnvoller Limes für $x \to a$ existieren. Dieser repräsentiert dann die Steigung der *Tangente* an f im Punkt $(a, f(a))$ (oder an der Stelle a).

Definition 19.2. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge, $a \in D$ ein Punkt und

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Man sagt, dass f *differenzierbar* in a ist, wenn der Limes

$$\lim_{x \in D \setminus \{a\},\, x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existiert. Im Fall der Existenz heißt dieser Limes der *Differentialquotient* oder die *Ableitung* von f in a, geschrieben

$$f'(a)\,.$$

Die Ableitung in einem Punkt a ist, falls sie existiert, ein Element in $\mathbb{R}$. Häufig nimmt man die Differenz $h := x - a$ als Parameter für den Limes des Differenzenquotienten, und lässt h gegen 0 gehen, d.h. man betrachtet

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}\,.$$

Die Bedingung $x \in D \setminus \{a\}$ wird dann zu $a + h \in D$, $h \neq 0$.

Beispiel 19.3. Es seien $s, c \in \mathbb{R}$ und sei

$$\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto sx + c,$$

eine affin-lineare Funktion. Zur Bestimmung der Ableitung in einem Punkt $a \in \mathbb{R}$ betrachtet man

$$\frac{(sx + c) - (sa + c)}{x - a} = \frac{s(x - a)}{x - a} = s\,.$$

Dies ist konstant gleich s, so dass der Limes für x gegen a existiert und gleich s ist. Die Ableitung in jedem Punkt existiert demnach und ist gleich s. Die *Steigung* der affin-linearen Funktion ist also die Ableitung.

Beispiel 19.4. Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^2 .$$

Der Differenzenquotient zu a und $a+h$ ist

$$\begin{aligned}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \frac{(a+h)^2-a^2}{h}\\ &= \frac{a^2+2ah+h^2-a^2}{h}\\ &= \frac{2ah+h^2}{h}\\ &= 2a+h.\end{aligned}$$

Der Limes davon für h gegen 0 ist $2a$. Die Ableitung von f in a ist daher $f'(a) = 2a$.

19.2. **Lineare Approximierbarkeit.**

Satz 19.5. *Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge, $a \in D$ ein Punkt und*

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Dann ist f in a genau dann differenzierbar, wenn es ein $s \in \mathbb{R}$ und eine Funktion

$$r : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

gibt mit r stetig in a und $r(a) = 0$ und mit

$$f(x) = f(a) + s \cdot (x-a) + r(x)(x-a)\,.$$

Beweis. Wenn f differenzierbar ist, so setzen wir $s := f'(a)$. Für die Funktion r muss notwendigerweise

$$r(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - s \text{ für } x \neq a\,, \\ 0 \text{ für } x = a\,, \end{cases}$$

gelten, um die Bedingungen zu erfüllen. Aufgrund der Differenzierbarkeit existiert der Limes

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to a,\, x\in D\setminus\{a\}} r(x)\\ =\ &\lim_{x\to a,\, x\in D\setminus\{a\}} \left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - s\right),\end{aligned}$$

und hat den Wert 0. Dies bedeutet, dass r in a stetig ist. Wenn umgekehrt s und r mit den angegebenen Eigenschaften existieren, so gilt für $x \neq a$ die Beziehung

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = r(x) + s\,.$$

Da r stetig in a ist, muss auch der Limes links für $x \to a$ existieren. $\square$

Die in diesem Satz formulierte Eigenschaft, die zur Differenzierbarkeit äquivalent ist, nennt man auch die *lineare Approximierbarkeit*. Die affin-lineare Funktion

$$D \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(a) + f'(a)(x-a),$$

heißt dabei die *affin-lineare Approximation*. Die durch $f(a)$ gegebene konstante Funktion kann man als konstante Approximation ansehen.

Korollar 19.6. *Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge, $a \in D$ ein Punkt und*

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion, die im Punkt a differenzierbar sei. Dann ist f stetig in a.

Beweis. Dies folgt direkt aus Satz 19.5. □

19.3. **Rechenregeln für differenzierbare Funktionen.**

Lemma 19.7. *Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge, $a \in D$ ein Punkt und*

$$f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

zwei Funktionen, die in a differenzierbar seien. Dann gelten folgende Differenzierbarkeitsregeln.

(1) *Die Summe $f + g$ ist differenzierbar in a mit*
$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)\,.$$
(2) *Das Produkt $f \cdot g$ ist differenzierbar in a mit*
$$(f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)\,.$$
(3) *Für $c \in \mathbb{R}$ ist auch cf in a differenzierbar mit*
$$(cf)'(a) = cf'(a)\,.$$
(4) *Wenn g keine Nullstelle in D besitzt, so ist $1/g$ differenzierbar in a mit*
$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = \frac{-g'(a)}{(g(a))^2}\,.$$
(5) *Wenn g keine Nullstelle in D besitzt, so ist f/g differenzierbar in a mit*
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}\,.$$

Beweis. (1). Wir schreiben f bzw. g mit den in Satz 19.5 formulierten Objekten, also

$$f(x) = f(a) + s(x-a) + r(x)(x-a)$$

und

$$g(x) = g(a) + \tilde{s}(x-a) + \tilde{r}(x)(x-a)\,.$$

Summieren ergibt

$$f(x) + g(x) = f(a) + g(a) + (s + \tilde{s})(x-a) + (r + \tilde{r})(x)(x-a)\,.$$

Dabei ist die Summe $r+\tilde{r}$ wieder stetig in a mit dem Wert 0. (2). Wir gehen wieder von

$$f(x) = f(a) + s(x-a) + r(x)(x-a)$$

und

$$g(x) = g(a) + \tilde{s}(x-a) + \tilde{r}(x)(x-a)$$

aus und multiplizieren die beiden Gleichungen. Dies führt zu

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= (f(a) + s(x-a) + r(x)(x-a))(g(a) + \tilde{s}(x-a) + \tilde{r}(x)(x-a)) \\ &= f(a)g(a) + (sg(a) + \tilde{s}f(a))(x-a) \\ &= +f(a)\tilde{r}(x) + g(a)r(x) + s\tilde{s}(x-a) \\ &= +s\tilde{r}(x)(x-a) + \tilde{s}r(x)(x-a) + r(x)\tilde{r}(x)(x-a)(x-a). \end{aligned}$$

Aufgrund von Lemma 15.10 für Limiten ist die aus der letzten Zeile ablesbare Funktion stetig mit dem Wert 0 für $x = a$. (3) folgt aus (2), da eine konstante Funktion differenzierbar ist mit Ableitung 0. (4). Es ist

$$\frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(a)}}{x-a} = \frac{-1}{g(a)g(x)} \cdot \frac{g(x)-g(a)}{x-a}\,.$$

Da g nach Korollar 19.6 stetig in a ist, konvergiert für $x \to a$ der linke Faktor gegen $-\frac{1}{g(a)^2}$ und wegen der Differenzierbarkeit von g in a konvergiert der rechte Faktor gegen $g'(a)$. (5) folgt aus (2) und (4). $\square$

Satz 19.8. *Seien $D, E \subseteq \mathbb{R}$ Teilmengen und seien*

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

und

$$g : E \longrightarrow \mathbb{R}$$

Funktionen mit $f(D) \subseteq E$. Es sei f in a differenzierbar und g sei in $b := f(a)$ differenzierbar. Dann ist auch die Hintereinanderschaltung

$$g \circ f : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

in a differenzierbar mit der Ableitung

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)\,.$$

Beweis. Aufgrund von Satz 19.5 kann man

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + r(x)(x-a)$$

und

$$g(y) = g(f(a)) + g'(f(a))(y - f(a)) + s(y)(y - f(a))$$

schreiben. Daher ergibt sich

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= g(f(a)) + g'(f(a))(f(x) - f(a)) + s(f(x))(f(x) - f(a)) \\ &= g(f(a)) + g'(f(a))(f'(a)(x-a) + r(x)(x-a)) \\ &\quad +s(f(x))(f'(a)(x-a) + r(x)(x-a)) \\ &= g(f(a)) + g'(f(a))f'(a)(x-a) + (g'(f(a))r(x) \\ &\quad +s(f(x))(f'(a) + r(x)))(x-a). \end{aligned}$$

Die hier ablesbare Restfunktion

$$t(x) := g'(f(a))r(x) + s(f(x))(f'(a) + r(x))$$

ist stetig in a mit dem Wert 0. □

Satz 19.9. *Es seien $D, E \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle und sei*

$$f : D \longrightarrow E \subseteq \mathbb{R}$$

eine bijektive stetige Funktion mit der Umkehrfunktion

$$f^{-1} : E \longrightarrow D.$$

Es sei f in $a \in D$ differenzierbar mit $f'(a) \neq 0$. Dann ist auch die Umkehrfunktion f^{-1} in $b := f(a)$ differenzierbar mit

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))} = \frac{1}{f'(a)}\,.$$

Beweis. Wir betrachten den Differenzenquotienten

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \frac{f^{-1}(y) - a}{y - b}$$

und müssen zeigen, dass der Limes für $y \to b$ existiert und den behaupteten Wert annimmt. Sei dazu $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $E \setminus \{b\}$, die gegen b konvergiert. Nach Satz 16.4 ist f^{-1} stetig. Daher konvergiert auch die Folge mit den Gliedern $x_n := f^{-1}(y_n)$ gegen a. Wegen der Bijektivität ist $x_n \neq a$ für alle n. Damit ist

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f^{-1}(y_n) - a}{y_n - b} = \lim_{n \to \infty} \frac{x_n - a}{f(x_n) - f(a)} = \left(\lim_{n \to \infty} \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} \right)^{-1},$$

wobei die rechte Seite nach Voraussetzung existiert. □

Beispiel 19.10. Die Funktion

$$f^{-1} : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+,\ x \longmapsto \sqrt{x},$$

ist die Umkehrfunktion der Funktion f mit $f(x) = x^2$ (eingeschränkt auf $\mathbb{R}_+$). Deren Ableitung in einem Punkt a ist $f'(a) = 2a$. Nach Satz 19.9 gilt daher für $b \in \mathbb{R}_+$ die Beziehung

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))} = \frac{1}{2\sqrt{b}} = \frac{1}{2} b^{-\frac{1}{2}}.$$

Die Funktion

$$f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^{\frac{1}{3}},$$

ist die Umkehrfunktion der Funktion f mit $f(x) = x^3$ Deren Ableitung in a ist $f'(a) = 3a^2$, dies ist für $a \neq 0$ von 0 verschieden. Nach Satz 19.9 ist für $b \neq 0$ somit

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))} = \frac{1}{3(b^{\frac{1}{3}})^2} = \frac{1}{3} b^{-\frac{2}{3}}.$$

Im Nullpunkt ist f^{-1} nicht differenzierbar.

19.4. **Die Ableitungsfunktion.**

Bisher haben wir nur von der Differenzierbarkeit einer Funktion in einem Punkt gesprochen. Jetzt lösen wir uns von dieser punktweisen Betrachtung.

Definition 19.11. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und sei

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Man sagt, dass f *differenzierbar* ist, wenn für jeden Punkt $a \in I$ die Ableitung $f'(a)$ von f in a existiert. Die Abbildung

$$f' : I \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f'(x),$$

heißt die *Ableitung* (oder *Ableitungsfunktion*) von f.

20. Vorlesung

20.1. **Höhere Ableitungen.**

Die Ableitung f' einer (in jedem Punkt) differenzierbaren Funktion nennt man häufig auch die *erste Ableitung* von f. Unter der nullten Ableitung versteht man die Funktion selbst. Höhere Ableitungen werden rekursiv definiert.

Definition 20.1. Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und sei

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Die Funktion f heißt n-mal *differenzierbar*, wenn sie $(n-1)$-mal differenzierbar ist und die $(n-1)$-te Ableitung, also $f^{(n-1)}$, differenzierbar ist. Die Ableitung

$$f^{(n)}(x) := (f^{(n-1)})'(x)$$

nennt man dann die n-te *Ableitung* von f.

Die zweite Ableitung schreibt man auch als f'', die dritte Ableitung als f'''. Wenn eine Funktion n-mal differenzierbar ist, so sagt man auch, dass die Ableitungen bis zur n-ten *Ordnung* existieren. Eine Funktion f heißt *unendlich oft differenzierbar*, wenn sie n-mal differenzierbar ist für jedes n.

Eine differenzierbare Funktion ist stetig, allerdings muss die Ableitung keineswegs stetig sein. Daher ist der folgende Begriff nicht überflüssig.

Definition 20.2. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Man sagt, dass f *stetig differenzierbar* ist, wenn f differenzierbar ist und die Ableitung f' stetig ist.

Eine Funktion heißt n-mal stetig differenzierbar, wenn sie n-mal differenzierbar ist und die n-te Ableitung stetig ist.

20.2. **Extrema von Funktionen.**

Wir untersuchen jetzt mit Mitteln der Differentialrechnung, wann eine differenzierbare Funktion

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R},$$

wobei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall ist, (lokale) Extrema besitzt und wie ihr Wachstumsverhalten aussieht.

Satz 20.3. *Es sei*

$$f :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion, die in $c \in]a, b[$ *ein lokales Extremum besitze und dort differenzierbar sei. Dann ist*

$$f'(c) = 0\,.$$

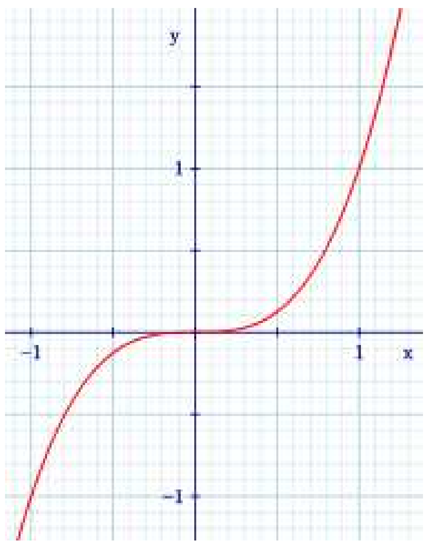
Beweis. Wir können annehmen, dass f ein lokales Maximum in c besitzt. Es gibt also ein $\epsilon > 0$ mit $f(x) \leq f(c)$ für alle $x \in [c - \epsilon, c + \epsilon] \subseteq]a, b[$. Es sei $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge mit $c - \epsilon \leq s_n < c$, die gegen c („von unten“) konvergiere. Dann ist

$$\frac{f(s_n) - f(c)}{s_n - c} \geq 0\,,$$

was sich dann auf den Limes überträgt. Für eine Folge $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $c + \epsilon \geq t_n > c$ gilt andererseits

$$\frac{f(t_n) - f(c)}{t_n - c} \leq 0\,.$$

Nach Voraussetzung existiert der Differentialquotient, d.h. für jede gegen c konvergente Folge existiert der Limes und besitzt stets den gleichen Wert. Also muss dieser Grenzwert 0 sein. □



Man beachte, dass das Verschwinden der Ableitung nur ein notwendiges, aber kein hinreichendes Kriterium für die Existenz eines Extremums ist. Das einfachste Beispiel für dieses Phänomen ist die Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$, die streng wachsend ist, deren Ableitung aber im Nullpunkt verschwindet.

20.3. **Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung.**

Der folgende Satz heißt *Satz von Rolle.*

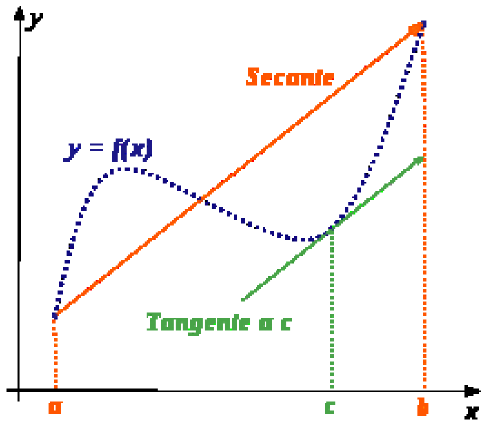
Satz 20.4. *Sei $a < b$ und sei*

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige, auf $]a, b[$ differenzierbare Funktion mit $f(a) = f(b)$. Dann gibt es ein $c \in]a, b[$ mit

$$f'(c) = 0\,.$$

Beweis. Wenn f konstant ist, so ist die Aussage richtig. Sei also f nicht konstant. Dann gibt es ein $x \in]a, b[$ mit $f(x) \neq f(a) = f(b)$. Sagen wir, dass $f(x)$ größer als dieser Wert ist. Aufgrund von Satz 16.10 gibt es ein $c \in [a, b]$, wo die Funktion ihr Maximum annimmt, und dieser Punkt kann kein Randpunkt sein. Für dieses c ist dann $f'(c) = 0$ nach Satz 20.3. □



Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung besagt anschaulich gesprochen, dass es zu einer Sekante eine parallele Tangente gibt.

Der folgende Satz, der direkt aus dem Satz von Rolle folgt, heißt *Mittelwertsatz der Differentialrechnung.*

Satz 20.5. *Sei $a < b$ und sei*

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige, auf $]a, b[$ differenzierbare Funktion. Dann gibt es ein $c \in]a, b[$ mit

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,.$$

Beweis. Wir betrachten die Funktion

$$g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Diese Funktion ist ebenfalls stetig und in $]a, b[$ differenzierbar. Ferner ist $g(a) = f(a)$ und

$$g(b) \;=\; f(b) - (f(b) - f(a)) \;=\; f(a).$$

Daher erfüllt g die Voraussetzungen von Satz 20.4 und somit gibt es ein $c \in]a, b[$ mit $g'(c) = 0$. Aufgrund der Ableitungsregeln gilt also

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,.$$

□

Korollar 20.6. *Sei*

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige, auf $]a, b[$ differenzierbare Funktion mit $f'(x) = 0$ für alle $x \in]a, b[$. Dann ist f konstant.

Beweis. Wenn f nicht konstant ist, so gibt es $x < x'$ mit $f(x) \neq f(x')$. Dann gibt es aufgrund von Satz 20.5 ein c, $x < c < x'$, mit $f'(c) = \frac{f(x') - f(x)}{x' - x} \neq 0$, ein Widerspruch zur Voraussetzung. □

Satz 20.7. *Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und*

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine differenzierbare Funktion. Dann gelten folgende Aussagen.

(1) *Die Funktion f ist genau dann auf I wachsend (bzw. fallend), wenn $f'(x) \geq 0$ (bzw. $f'(x) \leq 0$) ist für alle $x \in I$.*
(2) *Wenn $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in I$ ist und f' nur endlich viele Nullstellen besitzt, so ist f streng wachsend.*
(3) *Wenn $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in I$ ist und f' nur endlich viele Nullstellen besitzt, so ist f streng fallend.*

Beweis. (1). Es genügt, die Aussagen für wachsende Funktionen zu beweisen. Wenn f wachsend ist, und $x \in I$ ist, so gilt für den Differenzenquotient

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} \geq 0$$

für jedes h mit $x + h \in I$. Diese Abschätzung gilt dann auch für den Grenzwert, und dieser ist $f'(x)$. Sei umgekehrt die Ableitung ≥ 0. Nehmen wir an, dass es zwei Punkte $x < x'$ in I gibt mit $f(x) > f(x')$. Aufgrund des Mittelwertsatzes gibt es dann ein c mit $x < c < x'$ mit

$$f'(c) \;=\; \frac{f(x') - f(x)}{x' - x} \;<\; 0$$

im Widerspruch zur Voraussetzung. (2). Es sei nun $f'(x) > 0$ mit nur endlich vielen Ausnahmen. Angenommen es wäre $f(x) = f(x')$ für zwei Punkte $x < x'$. Da f nach dem ersten Teil wachsend ist, ist f auf dem Intervall $[x, x']$ konstant. Somit ist $f' = 0$ auf diesem gesamten Intervall, ein Widerspruch dazu, dass f' nur endlich viele Nullstellen besitzt. □

Korollar 20.8. *Eine reelle Polynomfunktion*

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

vom Grad $d \geq 1$ besitzt maximal $d-1$ Extrema, und die reellen Zahlen lassen sich in maximal d Abschnitte unterteilen, auf denen f streng wachsend oder streng fallend ist.

Beweis. Siehe Aufgabe 20.6. □

20.4. **Der zweite Mittelwertsatz und die Regel von l'Hospital.**

Die folgende Aussage heißt auch *zweiter Mittelwertsatz*.

Satz 20.9. *Es sei $b > a$ und*

$$f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

zwei stetige, auf $]a, b[$ differenzierbare Funktionen mit $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in]a, b[$. Dann ist $g(b) \neq g(a)$ und es gibt ein $c \in]a, b[$ mit

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}\,.$$

Beweis. Dies folgt aus Satz 20.4, angewendet auf die Hilfsfunktion

$$h(x) := f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g(x)\,.$$

□

Zur Berechnung von Grenzwerten einer Funktion, die als Quotient gegeben ist, ist die folgende *Regel von l'Hospital* hilfreich.

L'Hospital (1661-1704)

Korollar 20.10. *Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $a \in I$ ein Punkt. Es seien*

$$f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

stetige Funktionen, die auf $I \setminus \{a\}$ differenzierbar seien mit $f(a) = g(a) = 0$ und mit $g'(x) \neq 0$ für $x \neq a$. Es sei vorausgesetzt, dass der Grenzwert

$$w := \lim_{x \in I \setminus \{a\},\, x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

existiert. Dann existiert auch der Grenzwert

$$\lim_{x \in I \setminus \{a\},\, x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} \,,$$

und sein Wert ist ebenfalls w.

Beweis. Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $I \setminus \{a\}$, die gegen a konvergiert. Zu jedem x_n gibt es nach Satz 20.9, angewandt auf $I_n := [x_n, a]$ bzw. $[a, x_n]$, ein c_n (im Innern[22] von I_n) mit

$$\frac{f(x_n) - f(a)}{g(x_n) - g(a)} = \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)} \,.$$

Die Folge $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert ebenfalls gegen a, so dass nach Voraussetzung die rechte Seite gegen $\frac{f'(a)}{g'(a)} = w$ konvergiert. Daher konvergiert auch die linke Seite gegen w, und wegen $f(a) = g(a) = 0$ bedeutet das, dass $\frac{f(x_n)}{g(x_n)}$ gegen w konvergiert. □

Beispiel 20.11. Die beiden Polynome

$$3x^2 - 5x - 2 \text{ und } x^3 - 4x^2 + x + 6$$

[22]Unter dem *Innern* eines reellen Intervalls $I \subseteq \mathbb{R}$ versteht man das Intervall ohne die Intervallgrenzen.

haben beide für $x = 2$ eine Nullstelle. Es ist also nicht von vornherein klar, ob der Limes

$$\lim_{x \to 2} \frac{3x^2 - 5x - 2}{x^3 - 4x^2 + x + 6}$$

existiert und welchen Wert er besitzt. Aufgrund der Regel von l'Hospital kann man den Grenzwert über die Ableitungen bestimmen, und das ergibt

$$\lim_{x \to 2} \frac{3x^2 - 5x - 2}{x^3 - 4x^2 + x + 6} = \lim_{x \to 2} \frac{6x - 5}{3x^2 - 8x + 1} = \frac{7}{-3} = -\frac{7}{3}.$$

21. Vorlesung

21.1. Ableitung von Potenzreihen.

Viele wichtige Funktionen wie die Exponentialfunktion oder die trigonometrischen Funktionen werden durch eine Potenzreihe dargestellt. Der folgende Satz zeigt, dass diese Funktionen differenzierbar sind und ihre Ableitung durch diejenige Potenzreihe dargestellt wird, die sich durch gliedweises Ableiten ergibt.

Satz 21.1. *Es sei*

$$g(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

eine Potenzreihe, die auf dem offenen Intervall $]-r, r[$ *konvergiere und dort die Funktion* $f :]-r, r[\to \mathbb{R}$ *darstellt. Dann ist auch die formal abgeleitete Potenzreihe*

$$\tilde{g}(x) := \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

auf $]-r, r[$ *konvergent. Die Funktion* f *ist in jedem Punkt dieses Intervalls differenzierbar mit*

$$f'(x) = \tilde{g}(x)\,.$$

Beweis. Der Beweis erfordert ein genaues Studium von Potenzreihen. □

Satz 21.2. *Die Exponentialfunktion*

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \exp x,$$

ist differenzierbar mit

$$\exp{}'(x) = \exp x\,.$$

Beweis. Aufgrund von Satz 21.1 ist

$$\begin{aligned} \exp{}'(x) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right)' \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n!} \right)' \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} x^{n-1} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} x^{n-1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \\
&= \exp\, x.
\end{aligned}
$$

□

Korollar 21.3. *Die Ableitung des natürlichen Logarithmus*

$$\ln\, : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto \ln\, x,$$

ist

$$\ln' : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto \frac{1}{x}.$$

Beweis. Siehe Aufgabe 21.3. □

Korollar 21.4. *Es sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann ist die Funktion*

$$f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+,\, x \longmapsto x^\alpha,$$

differenzierbar und ihre Ableitung ist

$$f'(x) = \alpha x^{\alpha - 1}\,.$$

Beweis. Nach Definition ist

$$x^\alpha = \exp(\alpha\;\ln\, x)\,.$$

Die Ableitung nach x ist aufgrund von Satz 21.2 und Korollar 21.3 gleich

$$(x^\alpha)' \;=\; (\exp(\alpha\;\ln\, x))' \;=\; \frac{\alpha}{x} \cdot \exp(\alpha\;\ln\, x) \;=\; \frac{\alpha}{x} x^\alpha \;=\; \alpha x^{\alpha-1}.$$

□

Satz 21.5. *Die Sinusfunktion*

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto \sin\, x\,,$$

ist differenzierbar mit

$$\sin'(x) \;=\; \cos\, x$$

und die Kosinusfunktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto \cos\, x\,,$$

ist differenzierbar mit

$$\cos'(x) \;= -\, \sin\, x\;.$$

Beweis. Siehe Aufgabe 21.4. □

21.2. **Die Zahl π.**

Die Zahl π ist der Flächeninhalt bzw. der halbe Kreisumfang eines Kreises mit Radius 1. Um darauf eine präzise Definition dieser Zahl aufzubauen müsste man zuerst die Maßtheorie (bzw. die Länge von „krummen Kurven“) entwickeln. Auch die trigonometrischen Funktionen haben eine intuitive Interpretation am Einheitskreis, doch auch diese setzt das Konzept der Bogenlänge voraus. Ein alternativer Zugang ist es, die Zahl π über analytische Eigenschaften der durch ihre Potenzreihen definierten Funktionen Sinus und Kosinus zu definieren und dann erst nach und nach die Beziehung zum Kreis herzustellen.

Lemma 21.6. *Die Kosinusfunktion besitzt im reellen Intervall* $[0,2]$ *genau eine Nullstelle.*

Beweis. Wir betrachten die Kosinusreihe

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} .$$

Für $x=0$ ist $\cos 0 = 1$. Für $x=2$ kann man geschickt klammern und erhält

$$\begin{aligned} \cos 2 &= 1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} - \frac{2^6}{6!} + \frac{2^8}{8!} - \ldots \\ &= 1 - \frac{2^2}{2!}\left(1 - \frac{4}{3\cdot 4}\right) - \frac{2^6}{6!}\left(1 - \frac{4}{7\cdot 8}\right) - \ldots \\ &= 1 - 2(2/3) - \ldots \\ &\leq -1/3. \end{aligned}$$

Nach dem Zwischenwertsatz gibt es also mindestens eine Nullstelle im angegebenen Intervall. Zum Beweis der Eindeutigkeit betrachten wir die Ableitung des Kosinus, diese ist nach Satz 21.5

$$\cos' x = -\sin x .$$

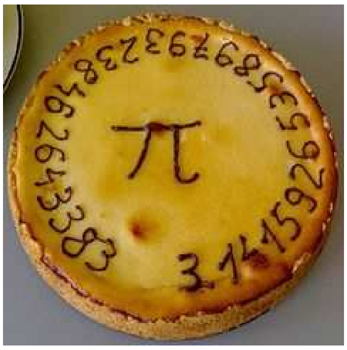
Es genügt zu zeigen, dass der Sinus im Intervall $]0,2[$ positiv ist, denn dann ist das Negative davon stets negativ und der Kosinus ist dann nach Satz 20.7 im angegebenen Intervall streng fallend, so dass es nur eine Nullstelle gibt. Für $x \in]0,2]$ gilt

$$\begin{aligned} \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots \\ &= x\left(1 - \frac{x^2}{3!}\right) + \frac{x^5}{5!}\left(1 - \frac{x^2}{6\cdot 7}\right) + \ldots \\ &\geq x\left(1 - \frac{4}{3!}\right) + \frac{x^5}{5!}\left(1 - \frac{4}{6\cdot 7}\right) + \ldots \\ &\geq x/3 \\ &> 0. \end{aligned}$$

$\square$

Definition 21.7. Es sei r die eindeutig bestimmte reelle Nullstelle der Kosinusfunktion auf dem Intervall $[0, 2]$. Die *Kreiszahl* π ist definiert durch

$$\pi := 2r\,.$$



Eine rationale Approximation der Zahl π auf einem π-Pie.

Satz 21.8. *Die Sinusfunktion und die Kosinusfunktion erfüllen in* $\mathbb{R}$ *folgende* Periodizitätseigenschaften.

(1) *Es ist* $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ *und* $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$.
(2) *Es ist* $\cos(x+\pi) = -\cos x$ *und* $\sin(x+\pi) = -\sin x$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$.
(3) *Es ist* $\cos(x + \pi/2) = -\sin x$ *und* $\sin(x + \pi/2) = \cos x$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$.
(4) *Es ist* $\cos 0 = 1$, $\cos \pi/2 = 0$, $\cos \pi = -1$, $\cos 3\pi/2 = 0$ *und* $\cos 2\pi = 1$.
(5) *Es ist* $\sin 0 = 0$, $\sin \pi/2 = 1$, $\sin \pi = 0$, $\sin 3\pi/2 = -1$ *und* $\sin 2\pi = 0$.

Beweis. Aufgrund der Kreisgleichung

$$(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$$

ist $(\sin \frac{\pi}{2})^2 = 1$, also ist $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ wegen der Überlegung im Beweis zu Lemma 21.6. Daraus folgen mit den Additionstheoremen die in (3) angegebenen Beziehungen zwischen Sinus und Kosinus. Es genügt daher, die Aussagen für den Kosinus zu beweisen. Alle Aussagen folgen dann aus der Definition von π und aus (3). $\square$

21.3. **Die inversen trigonometrischen Funktionen.**

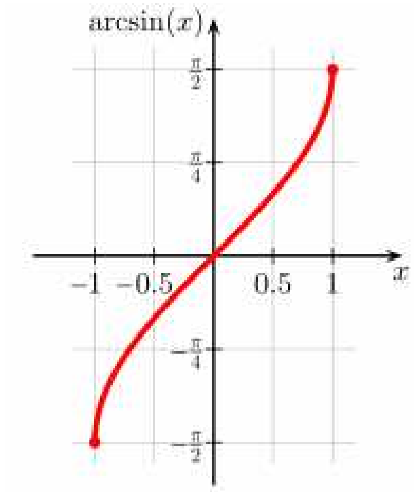
Korollar 21.9. *Die reelle Sinusfunktion induziert eine bijektive, streng wachsende Funktion*

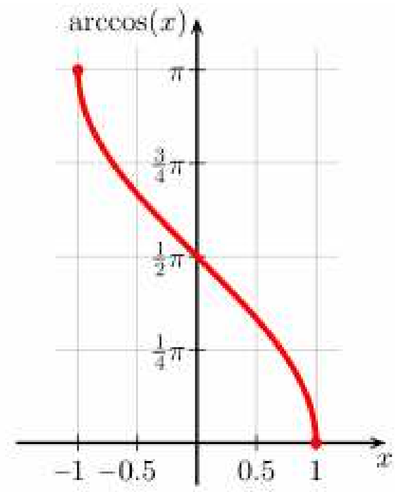
$$[-\pi/2, \pi/2] \longrightarrow [-1, 1],$$

und die reelle Kosinusfunktion induziert eine bijektive streng fallende Funktion

$$[0, \pi] \longrightarrow [-1, 1].$$

Beweis. Siehe Aufgabe 21.12. □





Aufgrund der Bijektivität von Sinus und Kosinus auf geeigneten Intervallen gibt es die folgenden Umkehrfunktionen.

Definition 21.10. Die Umkehrfunktion der reellen Sinusfunktion ist

$$[-1,1] \longrightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}],\ x \longmapsto \arcsin x\,,$$

und heißt *Arcus-Sinus*.

Definition 21.11. Die Umkehrfunktion der reellen Kosinusfunktion ist

$$[-1,1] \longrightarrow [0,\pi],\ x \longmapsto \arccos x\,,$$

und heißt *Arcus-Kosinus*.

21.4. **Die Taylor-Formel.**

Zu einer konvergenten Potenzreihe[23]

$$f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k$$

bilden die Teilpolynome $\sum_{k=0}^{n} c_k (x-a)^k$ polynomiale Approximationen für die Funktion f im Punkt a. Ferner ist f in a beliebig oft differenzierbar und die Ableitungen lassen sich aus der Potenzreihe ablesen. Wir fragen uns nun umgekehrt, inwiefern man aus den höheren Ableitungen einer hinreichend oft differenzierbaren Funktion approximierende Polynome (oder eine Potenzreihe) erhalten kann. Dies ist der Inhalt der *Taylor-Entwicklung*.

[23]Bisher haben wir nur Potenzreihen der Form $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ betrachtet; die Variable x darf jetzt auch durch die „verschobene Variable“ $x-a$ ersetzt werden, um das lokale Verhalten im Entwicklungspunkt a beschreiben zu können.

Brook Taylor (1685-1731)

Definition 21.12. Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall,

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine n-mal differenzierbare Funktion und $a \in I$. Dann heißt

$$T_{a,n}(f)(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

das *Taylor-Polynom vom Grad*[24] n zu f im Entwicklungspunkt a.

Das Taylor-Polynom zum Grad n ist dasjenige (eindeutig bestimmte) Polynom vom Grad $\leq n$, das mit f an der Stelle a bis zur n-ten Ableitung übereinstimmt.

Satz 21.13. *Es sei I ein reelles Intervall,*

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine $(n+1)$-mal differenzierbare Funktion, und $a \in I$ ein innerer Punkt des Intervalls. Dann gibt es zu jedem Punkt $x \in I$ ein $c \in I$ mit

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Dabei kann c zwischen a und x gewählt werden.

Beweis. Dieser Beweis wurde in der Vorlesung nicht vorgeführt. □

Korollar 21.14. *Es sei I ein beschränktes abgeschlossenes Intervall,*

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

[24]Oder genauer das Taylor-Polynom vom Grad $\leq n$. Wenn die n-te Ableitung in a null ist, so besitzt das n-te Taylor-Polynom einen Grad kleiner als n.

eine $(n+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion, $a \in I$ ein innerer Punkt und $B := \max\left(\left|f^{(n+1)}(c)\right|, c \in I\right)$. Dann gilt zwischen $f(x)$ und dem n-ten Taylor-Polynom die Fehlerabschätzung

$$| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k | \leq \frac{B}{(n+1)!} |x-a|^{n+1} .$$

Beweis. Die Zahl B existiert aufgrund von Satz 16.10, da nach Voraussetzung die $(n+1)$-te Ableitung $f^{(n+1)}$ stetig auf dem kompakten Intervall I ist. Die Aussage folgt somit direkt aus Satz 21.13. □

22. Vorlesung

22.1. **Kriterien für Extrema.**

In der zwanzigsten Vorlesung haben wir gesehen, dass es eine notwendige Bedingung für die Existenz eines Extremums einer differenzierbaren Funktion ist, dass die Ableitung an der in Frage stehenden Stelle gleich 0 ist. Wir formulieren nun ein wichtiges hinreichendes Kriterium, das auf die höheren Ableitungen Bezug nimmt.

Satz 22.1. *Es sei I ein reelles Intervall,*

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine $(n+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion, und $a \in I$ ein innerer Punkt des Intervalls. Es gelte

$$f'(a) = f''(a) = \ldots = f^{(n)}(a) = 0 \text{ und } f^{(n+1)}(a) \neq 0 .$$

Dann gelten folgende Aussagen.

(1) *Wenn n gerade ist, so besitzt f in a kein Extremum.*
(2) *Sei n ungerade. Bei $f^{(n+1)}(a) > 0$ besitzt f in a ein isoliertes Minimum.*
(3) *Sei n ungerade. Bei $f^{(n+1)}(a) < 0$ besitzt f in a ein isoliertes Maximum.*

Beweis. Unter den Voraussetzungen wird die Taylor-Formel zu

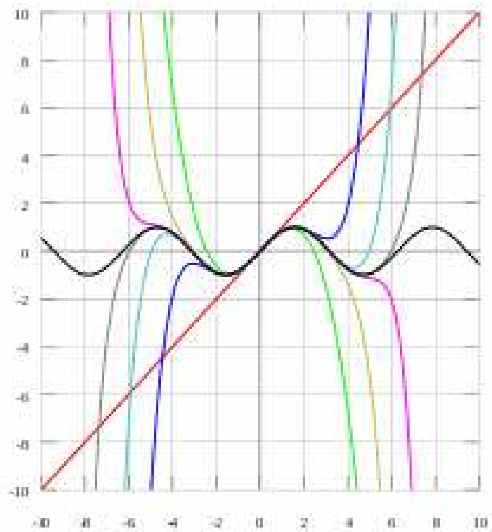
$$f(x) - f(a) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

mit c zwischen a und x. Je nachdem, ob $f^{(n+1)}(a) > 0$ oder $f^{(n+1)}(a) < 0$ ist, gilt auch (wegen der vorausgesetzten Stetigkeit der $(n+1)$-ten Ableitung) $f^{(n+1)}(x) > 0$ bzw. $f^{(n+1)}(x) < 0$ für $x \in [a-\epsilon, a+\epsilon]$ für ein geeignetes $\epsilon > 0$. Für diese x ist auch $c \in [a-\epsilon, a+\epsilon]$, so dass das Vorzeichen von $f^{(n+1)}(c)$ vom Vorzeichen von $f^{(n+1)}(a)$ abhängt. Bei n gerade ist $n+1$ ungerade und daher wechselt $(x-a)^{n+1}$ das Vorzeichen (abhängig von $x > a$ oder $x < a$). Da das Vorzeichen von $f^{(n+1)}(c)$ sich nicht ändert, ändert sich das

Vorzeichen von $f(x) - f(a)$. Das bedeutet, dass kein Extremum vorliegen kann. Sei nun n ungerade. Dann ist $n+1$ gerade, so dass $(x-a)^{n+1} > 0$ ist für alle $x \neq a$ in der Umgebung. Das bedeutet in der Umgebung bei $f^{(n+1)}(a) > 0$, dass $f(x) > f(a)$ ist und in a ein isoliertes Minimum vorliegt, und bei $f^{(n+1)}(a) < 0$, dass $f(x) < f(a)$ ist und in a ein isoliertes Maximum vorliegt. □

Ein Spezialfall davon ist, dass bei $f'(a) = 0$ und $f''(a) > 0$ ein isoliertes Minimum und bei $f'(a) = 0$ und $f''(a) < 0$ ein isoliertes Maximum vorliegt.

22.2. **Die Taylor-Reihe.**



Die reelle Sinusfunktion zusammen mit verschiedenen approximierenden Taylorpolynomen (von ungeradem Grad).

Definition 22.2. Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall,

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine ∞-oft differenzierbare Funktion und $a \in I$. Dann heißt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

die *Taylor-Reihe* zu f im Entwicklungspunkt a.

Satz 22.3. *Es sei* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ *eine Potenzreihe, die auf dem Intervall* $]-r, r[$ *konvergiere, und es sei*

$$f :]-r, r[\longrightarrow \mathbb{R}$$

die dadurch definierte Funktion. Dann ist f *unendlich oft differenzierbar und die Taylor-Reihe im Entwicklungspunkt* 0 *stimmt mit der vorgegebenen Potenzreihe überein.*

Beweis. Die unendliche Differenzierbarkeit folgt direkt aus Satz 21.1 durch Induktion. Daher existiert die Taylor-Reihe insbesondere im Punkt 0. Es ist also lediglich noch zu zeigen, dass die n-te Ableitung von f in 0 den Wert $c_n n!$ besitzt. Dies folgt aber ebenfalls aus Satz 21.1. □

Beispiel 22.4. Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x),$$

mit

$$f(x) := \begin{cases} 0, & \text{falls } x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & \text{falls } x > 0\,. \end{cases}$$

Wir behaupten, dass diese Funktion unendlich oft differenzierbar ist, was nur im Nullpunkt nicht offensichtlich ist. Man zeigt zunächst durch Induktion, dass sämtliche Ableitungen von $e^{-\frac{1}{x}}$ die Form $p(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x}}$ mit gewissen Polynomen $p \in \mathbb{R}[Z]$ besitzen und dass davon der Limes für $x \to 0$, $x > 0$ stets $= 0$ ist (siehe Aufgabe 22.4 und Aufgabe 22.5). Daher ist der (rechtsseitige) Limes für alle Ableitungen gleich 0 und existiert. Alle Ableitungen am Nullpunkt haben also den Wert null und daher ist die Taylor-Reihe im Nullpunkt die Nullreihe. Die Funktion f ist aber in keiner Umgebung des Nullpunktes die Nullfunktion, da $e^{-\frac{1}{x}} > 0$ ist.

22.3. **Potenzreihenansatz.**

Die Taylor-Reihe einer hinreichend oft differenzierbaren Funktion liefert häufig eine gute Approximation für die Funktion. Definitionsgemäß muss man zur Berechnung der Taylor-Reihe die Funktion ableiten. Für „implizit“ gegebene Funktionen kann man sie aber auch direkt bestimmen, was wir hier anhand typischer Beispiele demonstrieren. Als Faustregel gilt dabei, dass man lediglich die n-ten Ableitungen der die Funktion definierenden Daten kennen muss, um das n-te Taylor-Polynom der Funktion zu bestimmen. Wir verzichten weitgehend auf Konvergenzüberlegungen. Wenn aber die Daten durch Potenzreihen gegeben sind, so konvergieren die im Folgenden beschriebenen Taylor-Reihen auf einem gewissen Intervall und stellen eine Funktion dar.

Bemerkung 22.5. Es seien

$$f : I \longrightarrow J$$

und

$$g : J \longrightarrow \mathbb{R}$$

Funktionen, für die die Taylor-Polynome in den Entwicklungspunkten $a \in I$ und $b := f(a) \in J$ bis zum Grad n bekannt seien (insbesondere seien also diese Funktionen bis zur Ordnung n differenzierbar). Dann ist die hintereinandergeschaltete Funktion

$$g \circ f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

bis zur Ordnung n differenzierbar. Das zugehörige Taylor-Polynom lässt sich direkt berechnen: Sei dazu $S = \sum_{i=0}^{n} c_i(x-a)^i$ das Taylor-Polynom zu f und $T = \sum_{j=0}^{n} d_j(y-b)^j$ das Taylor-Polynom zu g. Dann stimmt das Taylor-Polynom von $g \circ f$ bis zum Grad n mit dem Polynom $T \circ S$ bis zum Grad n überein (das Polynom $T \circ S$ hat im Allgemeinen einen Grad $> n$. Man denke an $f(x) = x^2$ und $g(y) = y^2$ und $n = 2$). D.h. man muss in T überall y durch S ersetzen, durch Umsortieren ein Polynom in $x-a$ erhalten und davon die Monome vom Grad $\geq n+1$ weglassen (diese Monome muss man also nicht ausrechnen).

Bemerkung 22.6. Es sei

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine n-fach differenzierbare Funktion, für die das Taylor-Polynom im Entwicklungspunkt $a \in I$ bis zum Grad n bekannt sei und für die $f(a) \neq 0$ sei. Dann ist die Funktion $1/f$ auf einem offenen Intervall um a definiert und nach Lemma 19.7 differenzierbar in a. Aufgrund von Satz 14.13 gilt (für $|x| < 1$)

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{i=0}^{\infty} x^i$$

bzw.

$$\frac{1}{x} = \sum_{i=0}^{\infty} (1-x)^i = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i (x-1)^i$$

d.h. für die Funktion $\frac{1}{x}$ ist die Taylor-Reihe im Entwicklungspunkt 1 bekannt. Wir ersetzen f durch $h = \frac{1}{f(a)} f$, so dass $h(a) = 1$ gilt. Dann kann man die Funktion $1/h$ als die Verknüpfung von h mit der Funktion $\frac{1}{x}$ schreiben. Daher erhält man wegen Bemerkung 22.5 das Taylor-Polynom bis zum Grad n von $1/h$, indem man in $\sum_{i=0}^{n} (-1)^i (x-1)^i$ das Taylor-Polynom (bis zum Grad n) von h im Entwicklungspunkt a einsetzt und beim Grad n abschneidet. Das Taylor-Polynom von $1/f$ erhält man, indem man durch $f(a)$ teilt.

Beispiel 22.7. Wir möchten die Taylor-Reihe bis zum Grad 6 von $\frac{1}{\cos x}$ im Entwicklungspunkt 0 gemäß Bemerkung 22.6 bestimmen. Nach Definition ist

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 \ldots = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6 \ldots .$$

Zur Berechnung des Taylor-Polynoms bis zum Grad 6 braucht man nur die angeführte Entwicklung des Kosinus bis zum Grad 6. Das Taylorpolynom bis zum Grad 6 von $1/\cos x$ im Nullpunkt ist somit

$$\begin{aligned} & 1+\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{24}x^4+\frac{1}{720}x^6\right)+\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{24}x^4+\frac{1}{720}x^6\right)^2 \\ & \qquad +\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{24}x^4+\frac{1}{720}x^6\right)^3 \\ = \; & 1+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{24}x^4+\frac{1}{720}x^6+\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{24}x^6+\ldots+\frac{1}{8}x^6+\ldots \\ = \; & 1+\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{24}x^4+\frac{61}{720}x^6. \end{aligned}$$

Dabei wurden nur die für den Grad 6 relevanten Monome ausgerechnet.

Bemerkung 22.8. Es sei

$$f : I \longrightarrow J$$

(I, J seien reelle Intervalle) eine bijektive, n-mal differenzierbare Funktion, und in einem festen Punkt $a \in I$ gelte $f'(a) \neq 0$. Nach Satz 19.9 ist die Umkehrfunktion

$$g = f^{-1} : J \longrightarrow I$$

ebenfalls differenzierbar. Die Taylorreihe bis zum Grad n der Umkehrfunktion g kann man aus der Taylorreihe S bis zum Grad n von f berechnen. Man macht dazu ausgehend von $f \circ g = \mathrm{id}$ den Ansatz

$$S \circ T = x\,.$$

Dabei steht rechts die Taylor-Reihe der Identität, und links muss man das zu bestimmende Polynom T mit unbestimmten Koeffizienten in das Polynom S einsetzen. Der Einfachheit halber sei $a = 0$ und $f(a) = 0$. Es sei $S = a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$ (mit $a_1 \neq 0$) vorgegeben und $T = b_1x+b_2x^2+\ldots+b_nx^n$ gesucht. Dies führt zur Gesamtbedingung

$$\begin{aligned} x &= S \circ T \\ &= a_1T + a_2T^2 + \ldots + a_nT^n \\ &= a_1(b_1x + \ldots + b_nx^n) + a_2\left(b_1x + \ldots + b_nx^n\right)^2 + \\ & \qquad \ldots + a_n\left(b_1x + \ldots + b_nx^n\right)^n . \end{aligned}$$

Damit erhält man die Einzelbedingungen (durch Koeffizientenvergleich zu jedem Grad)

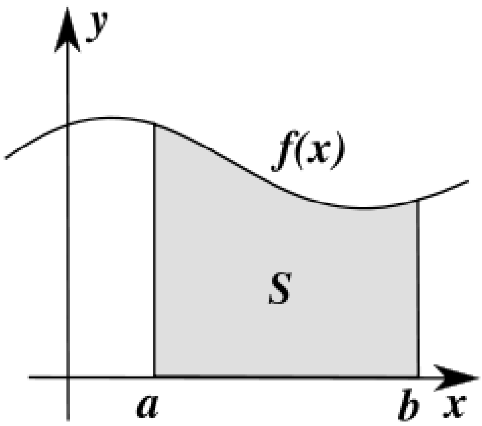
$$1 = a_1b_1\,,$$

$$0 = a_1b_2 + a_2b_1^2\,,$$

$$0 = a_1b_3 + 2a_2b_1b_2 + a_3b_1^3\,,$$

aus denen man sukzessive die Koeffizienten $b_1, b_2, b_3, \ldots$ berechnen kann.

23. Vorlesung

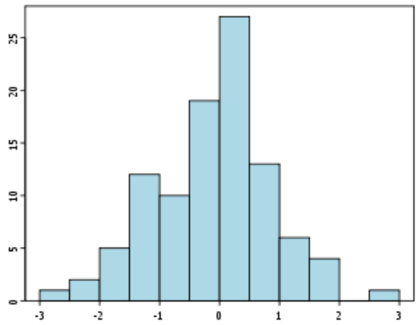


In den folgenden Vorlesungen beschäftigen wir uns mit der *Integrationstheorie*, d.h. wir wollen den Flächeninhalt derjenigen Fläche, die durch einen Funktionsgraphen einer Funktion

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

und der x-Achse begrenzt wird, systematisch studieren und berechnen. Zugleich ergibt sich ein direkter Zusammenhang zum Auffinden von *Stammfunktionen* von f, das sind Funktionen, deren Ableitung f ist. Der Flächeninhalt ist kein unproblematischer Begriff, der erst im Rahmen der *Maßtheorie* grundlegend behandelt wird. Dennoch handelt es sich um einen intuitiv leicht zugänglichen Begriff, von dem wir hier nur einige wenige naheliegende Grundtatsachen verwenden. Sie dienen hier auch nirgendwo der Argumentation, sondern lediglich der Motivation. Ausgangspunkt ist, dass der Flächeninhalt eines Rechtecks mit gegebenen Seitenlängen einfach das Produkt der beiden Seitenlängen ist, und dass der Flächeninhalt einer Fläche, die man mit Rechtecken „ausschöpfen“ kann, als der Limes der Summe der beteiligten Rechtecksinhalte erhalten werden kann. Beim *Riemannschen Integral*, das zumindest für stetige Funktionen eine befriedigende Theorie liefert, beschränkt man sich auf solche Rechtecke, die parallel zum Koordinatensystem liegen, deren Breite (Grundseite auf der x-Achse) beliebig variieren darf und deren Höhe in Beziehung zu den Funktionswerten über der Grundseite steht. Dadurch werden die Funktionen durch sogenannte *Treppenfunktionen* approximiert.

23.1. **Treppenfunktionen.**



Eine Treppenfunktion. Im statistischen Kontext spricht man von Histogrammen oder von Säulendiagrammen.

Definition 23.1. Sei I ein reelles Intervall mit den Grenzen $a, b \in \mathbb{R}$. Dann heißt eine Funktion

$$t : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine *Treppenfunktion*, wenn es eine Unterteilung

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b$$

von I gibt derart, dass t auf jedem offenen Teilintervall $]a_{i-1}, a_i[$ konstant ist.

Diese Definition stellt also keine Bedingung an den Wert der Funktion an den Unterteilungspunkten. Das Intervall $]a_{i-1}, a_i[$ nennt man i-tes Teilintervall, und $a_i - a_{i-1}$ heißt Länge dieses Teilintervalls. Wenn die Länge der Teilintervalle konstant ist, so spricht man von einer *äquidistanten Unterteilung*.

Definition 23.2. Sei I ein reelles Intervall mit den Grenzen $a, b \in \mathbb{R}$ und sei

$$t : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Treppenfunktion zur Unterteilung $a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b$ und den Werten t_i, $i = 1, \ldots, n$. Dann heißt

$$T := \sum_{i=1}^{n} t_i(a_i - a_{i-1})$$

das *Treppenintegral* von t auf I.

Das Treppenintegral wird auch mit $\int_a^b t(x)\, dx$ bezeichnet. Bei einer äquidistanten Unterteilung mit der Teilintervalllänge $\frac{b-a}{n}$ ist das Treppenintegral gleich $\frac{b-a}{n}(\sum_{i=1}^{n} t_i)$. Das Treppenintegral ist nicht von der gewählten Unterteilung abhängig, bzgl. der eine Treppenfunktion vorliegt.

Definition 23.3. Sei I ein beschränktes Intervall und sei

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Dann heißt eine Treppenfunktion

$$t : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine *obere Treppenfunktion* zu f, wenn $t(x) \geq f(x)$[25] ist für alle $x \in I$. Eine Treppenfunktion

$$s : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

heißt eine *untere Treppenfunktion* zu f, wenn $s(x) \leq f(x)$ ist für alle $x \in I$.

Eine obere (untere) Treppenfunktion zu f gibt es genau dann, wenn f nach oben (nach unten) beschränkt ist.

Definition 23.4. Sei I ein beschränktes Intervall und sei

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Zu jeder oberen Treppenfunktion

$$t : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

von f zur Unterteilung a_i, $i = 0, \ldots, n$, und den Werten t_i, $i = 1, \ldots, n$, heißt das Treppenintegral

$$T = \sum_{i=1}^{n} t_i(a_i - a_{i-1})$$

eine *Obersumme* (oder ein *oberes Treppenintegral*) von f auf I.

Definition 23.5. Sei I ein beschränktes Intervall und sei

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Zu jeder unteren Treppenfunktion

$$s : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

von f zur Unterteilung a_i, $i = 0, \ldots, n$, und den Werten s_i, $i = 1, \ldots, n$, heißt

$$S := \sum_{i=1}^{n} s_i(a_i - a_{i-1})$$

eine *Untersumme* (oder ein *unteres Treppenintegral*) von f auf I.

Verschiedene obere (untere) Treppenfunktionen liefern natürlich verschiedene Obersummen (Untersummen).

Definition 23.6. Sei I ein beschränktes Intervall und sei

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine nach oben beschränkte Funktion. Dann heißt das Infimum von sämtlichen Obersummen von oberen Treppenfunktionen von f das *Oberintegral* von f.

[25] Dafür schreibt man auch $t \geq f$.

Definition 23.7. Sei I ein beschränktes Intervall und sei

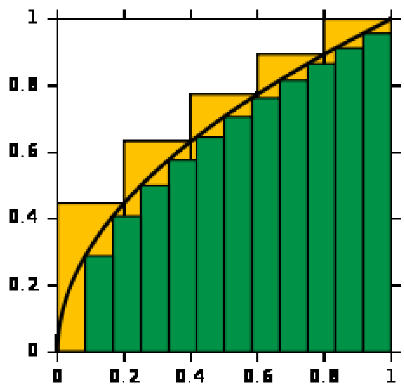
$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine nach unten beschränkte Funktion. Dann heißt das Supremum von sämtlichen Untersummen von unteren Treppenfunktionen von f das *Unterintegral* von f.

Die Beschränkung nach unten stellt sicher, dass es überhaupt eine untere Treppenfunktion gibt und damit die Menge der Untersummen nicht leer ist. Unter dieser Bedingung allein muss nicht unbedingt die Menge der Untersummen ein Supremum besitzen. Für (beidseitig) beschränkte Funktionen existiert hingegen stets das Ober- und das Unterintegral. Bei einer gegebenen Unterteilung gibt es eine kleinste obere (größte untere) Treppenfunktion, die durch die Maxima (Minima) der Funktion auf den Teilintervallen festgelegt ist. Für das Integral muss man aber Treppenfunktionen zu sämtlichen Unterteilungen berücksichtigen.

23.2. **Riemann-integrierbare Funktionen.**

Im Folgenden sprechen wir manchmal von einem kompakten Intervall, das ist ein beschränktes und abgeschlossenes Intervall, also von der Form $I = [a, b]$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.



Eine untere und eine obere Treppenfunktion. Der grüne Flächeninhalt ist eine Untersumme und der gelbe Flächeninhalt (teilweise verdeckt) ist eine Obersumme.

Definition 23.8. Sei I ein kompaktes Intervall und sei

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Dann heißt f *Riemann-integrierbar*, wenn Ober- und Unterintegral von f existieren und übereinstimmen.

Definition 23.9. Es sei $I = [a, b]$ ein kompaktes Intervall. Zu einer Riemann-integrierbaren Funktion

$$f : I = [a, b] \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto f(t),$$

heißt das Oberintegral (das nach Definition mit dem Unterintegral übereinstimmt) das *bestimmte Integral* von f über I. Es wird mit

$$\int_a^b f(t)\, dt \text{ oder mit } \int_I f(t)\, dt$$

bezeichnet.

Das Berechnen von solchen Integralen nennt man *integrieren*. Man sollte sich keine allzu großen Gedanken über das Symbol dt machen. Darin wird ausgedrückt, bzgl. welcher Variablen die Funktion zu integrieren ist. Es kommt dabei aber nicht auf den Namen der Variablen an, d.h. es ist

$$\int_a^b f(t)\, dt = \int_a^b f(x)\, dx$$

Lemma 23.10. *Sei I ein kompaktes Intervall und sei*

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Es gebe eine Folge von unteren Treppenfunktionen $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $s_n \leq f$ und eine Folge von oberen Treppenfunktionen $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $t_n \geq f$. Es sei vorausgesetzt, dass die beiden zugehörigen Folgen der Treppenintegrale konvergieren und dass ihr Grenzwert übereinstimmt. Dann ist f Riemann-integrierbar, und das bestimmte Integral ist gleich diesem Grenzwert, also

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b s_n(x)\, dx \;=\; \int_a^b f(x)\, dx \;=\; \lim_{n\to\infty} \int_a^b t_n(x)\, dx$$

Beweis. Siehe Aufgabe 23.8. □

Beispiel 23.11. Wir betrachten die Funktion

$$f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto t^2,$$

die bekanntlich in diesem Intervall streng wachsend ist. Für ein Teilintervall $[a, b] \subseteq [0, 1]$ ist daher $f(a)$ das Minimum und $f(b)$ das Maximum der Funktion über diesem Teilintervall. Sei n eine positive natürliche Zahl. Wir unterteilen das Intervall $[0, 1]$ in die n gleichlangen Teilintervalle

$$\left[i\frac{1}{n}, (i+1)\frac{1}{n}\right], i = 0, \ldots, n-1,$$

der Länge $\frac{1}{n}$. Das Treppenintegral zu der zugehörigen unteren Treppenfunktionen ist

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n}\left(i\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^3}\sum_{i=0}^{n-1} i^2 = \frac{1}{n^3}\left(\frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n\right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}$$

(siehe Aufgabe 1.2 für die Formel für die Summe der Quadrate). Da die beiden Folgen $(1/2n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(1/6n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 0 konvergieren, ist der Limes für $n\to\infty$ von diesen Treppenintegralen gleich $\frac{1}{3}$. Das Treppenintegral zu der zugehörigen oberen Treppenfunktionen ist

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{n}\left((i+1)\frac{1}{n}\right)^2 &= \frac{1}{n^3}\sum_{i=0}^{n-1}(i+1)^2\\ &= \frac{1}{n^3}\sum_{j=1}^{n}j^2\\ &= \frac{1}{n^3}\left(\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n\right)\\ &= \frac{1}{3}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}.\end{aligned}$$

Der Limes davon ist wieder $\frac{1}{3}$. Da beide Limiten übereinstimmen, müssen nach Lemma 23.10 überhaupt das Ober- und das Unterintegral übereinstimmen, so dass die Funktion Riemann-integrierbar ist und das bestimmte Integral

$$\int_0^1 t^2\,dt = \frac{1}{3}$$

ist.

Lemma 23.12. *Sei $I=[a,b]$ ein kompaktes Intervall und sei*

$$f: I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Dann ist f genau dann Riemann-integrierbar, wenn es eine Unterteilung $a=a_0<a_1<\cdots<a_n=b$ gibt derart, dass die einzelnen Einschränkungen $f_i := f|_{[a_{i-1},a_i]}$ Riemann-integrierbar sind. In dieser Situation gilt

$$\int_a^b f(t)\,dt = \sum_{i=1}^{n}\int_{a_{i-1}}^{a_i} f_i(t)\,dt\,.$$

Beweis. Siehe Aufgabe 23.9. □

Definition 23.13. Sei I ein reelles Intervall und sei

$$f: I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Dann heißt f *Riemann-integrierbar*, wenn die Einschränkung von f auf jedes kompakte Intervall $[a,b]\subseteq I$ Riemann-integrierbar ist.

Aufgrund des obigen Lemmas stimmen für ein kompaktes Intervall $[a,b]$ die beiden Definitionen überein.

23.3. **Riemann-Integrierbarkeit stetiger Funktionen.**

Satz 23.14. *Sei I ein reelles Intervall und sei*

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Dann ist f Riemann-integrierbar.

Beweis. Wir werden den Beweis, der auf dem Begriff der gleichmäßigen Stetigkeit beruht, nicht durchführen. □

Wenn man Aussagen beweist, bei denen auf Unterteilungen eines Intervalls Bezug genommen wird, so ist es häufig sinnvoll, *feinere Unterteilungen* einzuführen. Insbesondere ersetzt man häufig zwei verschiedene Unterteilungen durch eine *gemeinsame Verfeinerung*.

Lemma 23.15. *Es sei $I = [a, b]$ ein kompaktes Intervall und es seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ zwei Riemann-integrierbare Funktionen. Dann gelten folgende Aussagen.*

(1) *Ist $m \leq f(x) \leq M$ für alle $x \in I$, so ist $m(b-a) \leq \int_a^b f(t)\, dt \leq M(b-a)$.*
(2) *Ist $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in I$, so ist $\int_a^b f(t)\, dt \leq \int_a^b g(t)\, dt$.*
(3) *Es ist $\int_a^b (f+g)(t)\, dt = \int_a^b f(t)\, dt + \int_a^b g(t)\, dt$.*
(4) *Für $c \in \mathbb{R}$ ist $\int_a^b (cf)(t)\, dt = c \int_a^b f(t)\, dt$.*
(5) *Die Funktionen $\max(f, g)$ und $\min(f, g)$ sind Riemann-integrierbar.*
(6) *Die Funktion $|f|$ ist Riemann-integrierbar.*
(7) *Das Produkt fg ist Riemann-integrierbar.*

Beweis. Für (1) bis (4) siehe Aufgabe 23.10. (5). Wir betrachten die Aussage für das Maximum. Wir müssen zeigen, dass es zu jedem $\delta > 0$ eine obere und eine untere Treppenfunktion gibt derart, dass die Differenz der beiden Treppenintegrale $\leq \delta$ ist. Sei also ein $\delta > 0$ vorgegeben. Aufgrund der Riemann-Integrierbarkeit gibt es Treppenfunktionen

$$s_1 \text{ und } t_1 \text{ mit } s_1 \leq f \leq t_1 \text{ und mit } \int_a^b (t_1 - s_1)(x)\, dx \leq \delta/2$$

und

$$s_2 \text{ und } t_2 \text{ mit } s_2 \leq g \leq t_2 \text{ und mit } \int_a^b (t_2 - s_2)(x)\, dx \leq \delta/2\,.$$

Wir können annehmen, dass diesen Treppenfunktionen die gleiche Unterteilung zugrunde liegt. Es sei ℓ_k, $k = 1, \ldots, n$ die Länge des k-ten Teilintervalls I_k und es sei

$$\delta_k := (t_1 - s_1)|_{I_k} + (t_2 - s_2)|_{I_k}\,.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \ell_k \delta_k &= \sum_{k=1}^{n} \ell_k ((t_1 - s_1)|_{I_k} + (t_2 - s_2)|_{I_k}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \ell_k (t_1 - s_1)|_{I_k} + \sum_{k=1}^{n} \ell_k (t_2 - s_2)|_{I_k} \\
&\leq \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} \\
&= \delta.
\end{aligned}$$

Wir setzen

$$s := \max(s_1, s_2) \text{ und } t := \max(t_1, t_2).$$

Dies ist offenbar eine untere bzw. obere Treppenfunktionen für $\max(f, g)$. Wir betrachten ein Teilintervall I_k dieser Unterteilung. Wenn dort

$$s_1 \leq s_2 \text{ und } t_1 \leq t_2$$

gilt, so ist

$$t - s = t_2 - s_2 \leq \delta_k.$$

Wenn dort

$$s_1 \leq s_2 \text{ und } t_2 \leq t_1$$

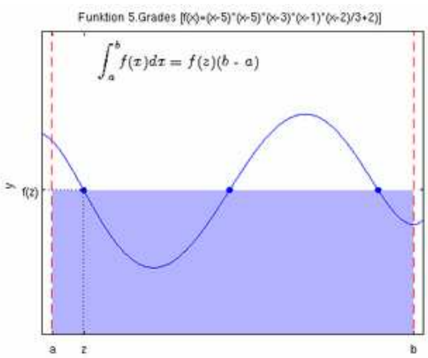
gilt, so ist ebenfalls

$$t - s = t_1 - s_2 \leq t_1 - s_1 \leq \delta_k.$$

Dies gilt auch in den beiden anderen Fällen. Damit ist die Differenz der Treppenintegrale $\leq \sum_{k=1}^{n} \ell_k \delta_k \leq \delta$. (6) folgt direkt aus (5). Für (7) siehe Aufgabe 23.12. $\square$

24. Vorlesung

24.1. **Der Mittelwertsatz der Integralrechnung.**



Zu einer Riemann-integrierbaren Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ kann man

$$\frac{\int_a^b f(t)\, dt}{b - a}$$

als die Durchschnittshöhe der Funktion ansehen, da dieser Wert mit der Länge $b - a$ des Grundintervalls multipliziert den Flächeninhalt ergibt. Der *Mittelwertsatz der Integralrechnung* besagt, dass für eine stetige Funktion dieser Durchschnittswert (oder Mittelwert) von der Funktion auch angenommen wird.

Satz 24.1. *Sei* $[a, b]$ *ein kompaktes Intervall und sei*

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Dann gibt es ein $c \in [a, b]$ *mit*

$$\int_a^b f(t)\, dt = f(c)(b - a)\,.$$

Beweis. Über dem kompakten Intervall ist die Funktion f nach oben und nach unten beschränkt, es seien m und M das Minimum bzw. das Maximum der Funktion. Dann ist insbesondere $m \leq f(x) \leq M$ für alle $x \in [a, b]$ und

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(t)\, dt \leq M(b - a)\,.$$

Daher ist $\int_a^b f(t)\, dt = d(b - a)$ mit einem $d \in [m, M]$ und aufgrund des Zwischenwertsatzes gibt es ein $c \in [a, b]$ mit $f(c) = d$. □

24.2. **Der Hauptsatz der Infinitesimalrechnung.**

Es ist geschickt auch Integralgrenzen zuzulassen, bei denen die untere Integralgrenze die obere Intervallgrenze und die obere Integralgrenze die untere Intervallgrenze ist. Dazu definieren wir für $a < b$ und eine integrierbare Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$

$$\int_b^a f(t)\, dt := -\int_a^b f(t)\, dt\,.$$

Definition 24.2. Sei I ein reelles Intervall und sei

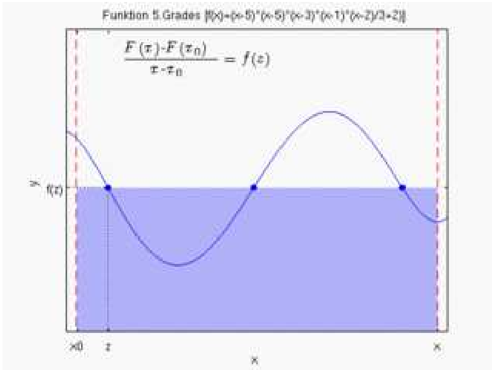
$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Riemann-integrierbare Funktion und $a \in I$. Dann heißt die Funktion

$$I \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \int_a^x f(t)\, dt,$$

die *Integralfunktion* zu f zum Startpunkt a.

Man spricht auch von der *Flächenfunktion* oder einem *unbestimmten Integral.*



Das x im Satz ist das x_0 in der Animation, und $x+h$ im Satz ist das wandernde x in der Animation. Der wandernde Punkt z in der Animation ist ein Punkt, wie er im Mittelwertsatz der Integralrechnung auftritt.

Satz 24.3. *Sei I ein reelles Intervall und sei*

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Es sei $a \in I$ und es sei

$$F(x) := \int_a^x f(t)\, dt$$

die zugehörige Integralfunktion. Dann ist F differenzierbar und es gilt

$$F'(x) = f(x)$$

für alle $x \in I$.

Beweis. Es sei x fixiert. Der Differenzenquotient ist

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h} \left(\int_a^{x+h} f(t)\, dt - \int_a^x f(t)\, dt \right) = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\, dt.$$

Wir müssen zeigen, dass für $h \to 0$ der Limes existiert und gleich $f(x)$ ist. Dies ist äquivalent dazu, dass der Limes von

$$\frac{1}{h} \left(\int_x^{x+h} f(t)\, dt - h f(x) \right)$$

für $h \to 0$ gleich 0 ist. Mit der durch $f(x)$ gegebenen konstanten Funktion können wir $hf(x) = \int_x^{x+h} f(x)\, dt$ schreiben und damit den Ausdruck

$$\frac{1}{h} \int_x^{x+h} (f(t) - f(x))\, dt$$

betrachten. Indem wir die Funktion $g(t) := f(t) - f(x)$ betrachten, können wir annehmen, dass $f(x) = 0$ ist. Wegen der Stetigkeit von f gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ derart, dass für alle $t \in [x-\delta, x+\delta]$ die Abschätzung $|f(t)| \leq \epsilon$ gilt. Damit gilt für $h \in [-\delta, +\delta]$ nach Lemma 23.5 die Abschätzung

$$|\int_x^{x+h} f(t)\,dt| \leq |\int_x^{x+h} |f(t)|\;dt| \leq |\int_x^{x+h} \epsilon\,dt| = |h|\,\epsilon$$

und daher

$$|\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt| \leq \epsilon.$$

□

24.3. **Stammfunktionen.**

Definition 24.4. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und sei

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Eine Funktion

$$F : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

heißt *Stammfunktion* zu f, wenn F auf I differenzierbar ist und $F'(x) = f(x)$ gilt für alle $x \in I$.

Den Hauptsatz der Infinitesimalrechnung kann man zusammen mit Satz 23.14 als einen Existenzsatz für Stammfunktionen interpretieren.

Korollar 24.5. *Sei I ein reelles Intervall und sei*

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Dann besitzt f eine Stammfunktion.

Beweis. Es sei $a \in I$ ein beliebiger Punkt. Aufgrund von Satz 23.14 existiert das Riemann-Integral

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt\,,$$

und aufgrund des Hauptsatzes ist $F'(x) = f(x)$, d.h. F ist eine Stammfunktion von f. □

Lemma 24.6. *Sei I ein reelles Intervall und sei*

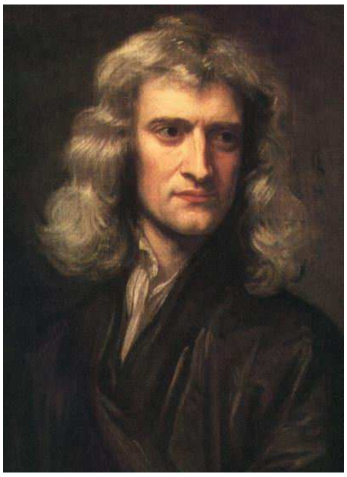
$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Es seien F und G zwei Stammfunktionen von f. Dann ist $F - G$ eine konstante Funktion.

Beweis. Es ist

$$(F-G)' = F' - G' = f - f = 0.$$

Daher ist nach Korollar 20.6 die Differenz $F - G$ konstant. □



Isaac Newton (1643-1727)

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)

Die folgende Aussage ist ebenfalls eine Version des Hauptsatzes, der darin ausgedrückte Zusammenhang heißt auch *Newton-Leibniz-Formel.*

Korollar 24.7. *Sei I ein reelles Intervall und sei*

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion, für die F eine Stammfunktion sei. Dann gilt für $a < b$ aus I die Gleichheit

$$\int_a^b f(t)\, dt = F(b) - F(a)\,.$$

Beweis. Aufgrund von Satz 23.14 existiert das Integral. Mit der Integralfunktion $G(x) := \int_a^x f(t)\, dt$ gilt die Beziehung

$$\int_a^b f(t)\, dt \;=\; G(b) \;=\; G(b) - G(a).$$

Aufgrund von Satz 24.3 ist G differenzierbar mit $G'(x) = f(x)$, d.h. G ist eine Stammfunktion von f. Wegen Lemma 24.6 ist $F(x) = G(x) + c$. Daher ist

$$\int_a^b f(t)\,dt \;=\; G(b) - G(a) \;=\; F(b) - c - F(a) + c \;=\; F(b) - F(a).$$

□

Da eine Stammfunktion nur bis auf eine additive Konstante bestimmt ist, schreibt man manchmal

$$\int f(t)\,dt = F + c\,,$$

und nennt c eine *Integrationskonstante*. In gewissen Situationen, insbesondere im Zusammenhang mit *Differentialgleichungen*, wird diese Konstante durch zusätzliche Bedingungen festgelegt.

Notation 24.8. Es sei I ein reelles Intervall und $F : I \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion zu $f : I \to \mathbb{R}$. Es seien $a, b \in I$. Dann setzt man

$$F|_a^b := F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\,dt\,.$$

Diese Notation wird hauptsächlich bei Rechnungen verwendet, vor allem beim Ermitteln von bestimmten Integralen.

Mit den früher bestimmten Ableitungen von differenzierbaren Funktionen erhält man sofort eine Liste von Stammfunktionen zu einigen wichtigen Funktionen. In der nächsten Vorlesung werden wir weitere Regeln zum Auffinden von Stammfunktionen kennenlernen, die auf Ableitungsregeln beruhen. Im Allgemeinen ist das Auffinden von Stammfunktionen schwierig.

Die Stammfunktion zu x^a, wobei $x \in \mathbb{R}_+$ und $a \in \mathbb{R}$, $a \neq -1$, ist, ist $\frac{1}{a+1} x^{a+1}$.

Beispiel 24.9. Zwischen zwei (punktförmig gedachten) Massen M und m bestehe der Abstand R_0. Aufgrund der Gravitation besitzt dieses System eine gewisse Lageenergie. Wie ändert sich die Lageenergie, wenn die beiden Massen auf einen Abstand von $R_1 \geq R_0$ auseinander gezogen werden?

Die aufzubringende Energie ist Anziehungskraft mal Weg, wobei die Anziehungskraft allerdings selbst vom Abstand der Massen abhängt. Nach dem Gravitationsgesetz ist die Kraft beim Abstand r gleich

$$F(r) = \gamma \frac{Mm}{r^2}\,,$$

wobei γ die Gravitationkonstante bezeichnet. Daher ist die Energie (oder Arbeit), die man aufbringen muss, um den Abstand von R_0 auf R_1 zu erhöhen, gleich

$$E \;=\; \int_{R_0}^{R_1} \gamma \frac{Mm}{r^2}\,dr$$

$$\begin{aligned}
&= \gamma M m \int_{R_0}^{R_1} \frac{1}{r^2}\, dr \\
&= \gamma M m \left(-\frac{1}{r} |_{R_0}^{R_1} \right) \\
&= \gamma M m \left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R_1} \right).
\end{aligned}$$

Damit kann man der Differenz der Lageenergien zum Abstand R_0 bzw. R_1 einen sinnvollen Wert zuweisen, nicht aber den Lageenergien selbst.

Die Stammfunktion der Funktion $\frac{1}{x}$ ist der natürliche Logarithmus.

Die Stammfunktion der Exponentialfunktion ist die Exponentialfunktion selbst.

Die Stammfunktion von $\sin x$ ist $-\cos x$, die Stammfunktion von $\cos x$ ist $\sin x$.

Die Stammfunktion von $\frac{1}{1+x^2}$ ist $\arctan x$, es ist ja

$$\begin{aligned}
(\arctan x)' &= \frac{1}{\frac{1}{\cos^2(\arctan x)}} \\
&= \frac{1}{\frac{\cos^2(\arctan x) + \sin^2(\arctan x)}{\cos^2(\arctan x)}} \\
&= \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan x)} \\
&= \frac{1}{1+x^2}.
\end{aligned}$$

Die Stammfunktion von $\frac{1}{1-x^2}$ (für $x \in]-1,1[$) ist $\frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$, es ist ja

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{2} \cdot \ln \frac{1+x}{1-x} \right)' &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1-x}{1+x} \cdot \frac{(1-x)+(1+x)}{(1-x)^2} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{(1+x)(1-x)} \\
&= \frac{1}{(1-x^2)}.
\end{aligned}$$

In der übernächsten Vorlesung werden wir eine Verfahren angeben, wie man zu einer beliebigen rationalen Funktion (also einem Quotienten aus zwei Polynomen) eine Stammfunktion finden kann.

Achtung! Integrationsregeln sind nur anwendbar auf Funktionen, die im gesamten Intervall definiert sind. Z.B. gilt *nicht*

$$\int_{-a}^{a} \frac{dt}{t^2}\, d = -\frac{1}{x} |_{-a}^{a} = -\frac{1}{a} - \frac{1}{a} = -\frac{2}{a},$$

da hier über eine Definitionslücke hinweg integriert wird.

Beispiel 24.10. Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, t \longmapsto f(t),$$

mit

$$f(t) := \begin{cases} 0 \text{ für } t = 0, \\ \frac{1}{t} \sin \frac{1}{t^2} \text{ für } t \neq 0\,. \end{cases}$$

Diese Funktion ist nicht Riemann-integrierbar, da sie weder nach oben noch nach unten beschränkt ist. Es existieren also weder untere noch obere Treppenfunktionen für f. Trotzdem besitzt f eine Stammfunktion. Dazu betrachten wir die Funktion

$$H(t) := \begin{cases} 0 \text{ für } t = 0, \\ \frac{t^2}{2} \cos \frac{1}{t^2} \text{ für } t \neq 0\,. \end{cases}$$

Diese Funktion ist differenzierbar. Für $t \neq 0$ ergibt sich die Ableitung

$$H'(t) = t \cos \frac{1}{t^2} + \frac{1}{t} \sin \frac{1}{t^2}\ .$$

Für $t = 0$ ist der Differenzenquotient gleich

$$\frac{\frac{s^2}{2} \cos \frac{1}{s^2}}{s} = \frac{s}{2} \cos \frac{1}{s^2}\ .$$

Für $s \mapsto 0$ existiert der Grenzwert und ist gleich 0, so dass H überall differenzierbar ist (aber nicht stetig differenzierbar). Der erste Summand in H' ist stetig und besitzt daher nach Korollar 24.5 eine Stammfunktion G. Daher ist $H - G$ eine Stammfunktion von f. Dies ergibt sich für $t \neq 0$ aus der expliziten Ableitung und für $t = 0$ aus

$$H'(0) - G'(0) \;=\; 0 - 0 \;=\; 0.$$

24.4. **Stammfunktionen zu Potenzreihen.**

Wir erinnern daran, dass die Ableitung einer konvergenten Potenzreihe gliedweise gewonnen werden kann.

Lemma 24.11. *Es sei*

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

eine auf $]-r, r[$ *konvergente Potenzreihe. Dann ist die Potenzreihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n} x^n$$

ebenfalls auf $]-r, r[$ *konvergent und stellt dort eine Stammfunktion für* f *dar.*

Beweis. Der Beweis beruht auf der Theorie der Potenzreihen. □

Mit dieser Aussage kann man manchmal die Taylor-Polynome (bzw. die Taylor-Reihe) einer Funktion bestimmen, indem man die Taylor-Polynome der Ableitung verwendet. Wir geben dazu ein typisches Beispiel.

Beispiel 24.12. Wir wollen die Taylor-Reihe des natürlichen Logarithmus im Entwicklungspunkt 1 bestimmen. Die Ableitung des natürlichen Logarithmus ist nach Korollar 21.3 gleich $1/x$. Diese Funktion besitzt nach Satz 14.13 die Potenzreihenentwicklung

$$\frac{1}{x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (x-1)^k$$

im Entwicklungspunkt 1 (die für $|x| < 1$ konvergiert). Daher besitzt nach Lemma 24.11 der natürliche Logarithmus die Potenzreihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} (x-1)^k \, .$$

Mit $z = x - 1$ ist dies die Reihe

$$z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \frac{z^5}{5} \ldots .$$

25. Vorlesung

Wir besprechen nun die wesentlichen Rechenregeln, mit denen man Stammfunktionen finden bzw. bestimmte Integrale berechnen kann. Sie beruhen auf Ableitungsregeln.

25.1. **Partielle Integration.**

Satz 25.1. *Es seien*

$$f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

stetig differenzierbare Funktionen. Dann gilt

$$\int_a^b f(t) g'(t) \, dt = fg|_a^b - \int_a^b f'(t) g(t) \, dt \, .$$

Beweis. Aufgrund der Produktregel ist fg eine Stammfunktion von $fg' + f'g$. Daher ist

$$\begin{aligned} & \int_a^b f(t) g'(t) \, dt + \int_a^b f'(t) g(t) \, dt \\ = \; & \int_a^b (fg' + f'g)(t) \, dt \\ = \; & fg|_a^b . \end{aligned}$$

$\square$

Bei der partiellen Integration sind insbesondere zwei Dinge zu beachten. Erstens liegt die zu integrierende Funktion im Allgemeinen nicht in der Form fg' vor, sondern einfach als Produkt uv (wenn kein Produkt vorliegt, so kommt man mit dieser Regel sowieso nicht weiter, wobei allerdings die triviale Produktzerlegung $1u$ manchmal helfen kann). Dann muss man einen Faktor integrieren und den anderen differenzieren. Wenn V eine Stammfunktion von v ist, so lautet die Formel

$$\int uv = uV - \int u'V\,.$$

Zweitens führt partielle Integration nur dann zum Ziel, wenn das Integral rechts, also $\int_a^b f'(t)g(t)\,dt$, integriert werden kann.

Beispiel 25.2. Wir bestimmen eine Stammfunktion des natürlichen Logarithmus $\ln x$ mittels partieller Integration, wobei wir $\ln x = 1 \cdot \ln x$ schreiben und 1 integrieren und den Logarithmus ableiten. Damit ist

$$\begin{aligned} \int_a^b \ln x\,dx &= (x \cdot \ln x)|_a^b - \int_a^b x \cdot \frac{1}{x}\,dx \\ &= (x \cdot \ln x)|_a^b - \int_a^b 1\,dx \\ &= (x \cdot \ln x)|_a^b - x|_a^b. \end{aligned}$$

Eine Stammfunktion ist also $x \cdot \ln x - x$.

Beispiel 25.3. Eine Stammfunktion der Sinusfunktion $\sin x$ ist $-\cos x$. Um Stammfunktionen zu $\sin^n x$ zu finden, verwenden wir partielle Integration, um eine rekursive Beziehung zu kleineren Potenzen zu erhalten. Um dies präzise zu machen, arbeiten wir mit Intervallgrenzen, und zwar sollen die Stammfunktionen von 0 ausgehen, also für 0 den Wert 0 besitzen. Für $n \geq 2$ ist mittels partieller Integration

$$\begin{aligned} \int_0^x \sin^n t\; dt &= \int_0^x \sin^{n-2} t \cdot \sin^2 t\; dt \\ &= \int_0^x \sin^{n-2} t \cdot (1 - \cos^2 t)\,dt \\ &= \int_0^x \sin^{n-2} t\; dt - \int_0^x (\sin^{n-2} t\, \cos t)\cos t\; dt \\ &= \int_0^x \sin^{n-2} t\; dt - \frac{\sin^{n-1} t}{n-1} \cos t\,|_0^x - \frac{1}{n-1}\left(\int_0^x \sin^n t\; dt\right). \end{aligned}$$

Durch Multiplikation mit $n-1$ und Umstellen erhält man

$$n\int_0^x \sin^n t\; dt = (n-1)\int_0^x \sin^{n-2} t\; dt - \sin^{n-1} x\, \cos x\,.$$

Speziell ergibt sich für $n = 2$

$$\int_0^x \sin^2 t\; dt = \frac{1}{2}(x - \sin x\, \cos x)\,.$$

25.2. **Integration der Umkehrfunktion.**

Satz 25.4. *Es sei $f : [a,b] \to [c,d]$ eine bijektive differenzierbare Funktion und es sei F eine Stammfunktion von f. Dann ist*

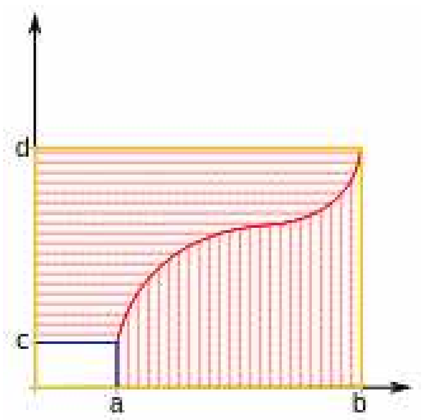
$$G(y) := yf^{-1}(y) - F(f^{-1}(y))$$

eine Stammfunktion der Umkehrfunktion f^{-1}.

Beweis. Ableiten unter Verwendung von Lemma 19.7 und Satz 19.8 ergibt

$$\begin{aligned}(yf^{-1}(y) - F(f^{-1}(y))' &= f^{-1}(y) + y\frac{1}{f'(f^{-1}(y))} - f(f^{-1}(y))\frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \\ &= f^{-1}(y).\end{aligned}$$

□



Funktionsgraph mit Umkehrfunktion und Flächen zur Berechnung eines Integrals der Umkehrfunktion.

Diese Aussage besitzt einen einfachen geometrischen Hintergrund. Wenn $f : [a,b] \to \mathbb{R}_+$ eine streng wachsende stetige Funktion ist (und daher eine Bijektion zwischen $[a,b]$ und $[f(a), f(b)]$ induziert), so besteht zwischen den beteiligten Flächeninhalten der Zusammenhang

$$\int_a^b f(s)\,ds + \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(t)\,dt = bf(b) - af(a)$$

bzw.

$$\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(t)\,dt = bf(b) - af(a) - \int_a^b f(s)\,ds\,.$$

Für die Stammfunktion G von f^{-1} mit dem Startpunkt $f(a)$ gilt daher, wenn F die Stammfunktion zu f bezeichnet, die Beziehung

$$G(y) \quad = \quad \int_{f(a)}^{y} f^{-1}(t)\,dt$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{f(a)}^{f(f^{-1}(y))} f^{-1}(t)\,dt \\
&= f^{-1}(y)f(f^{-1}(y)) - af(a) - \int_a^{f^{-1}(y)} f(s)\,ds \\
&= yf^{-1}(y) - af(a) - F(f^{-1}(y)) + F(a) \\
&= yf^{-1}(y) - F(f^{-1}(y)) - af(a) + F(a),
\end{aligned}
$$

wobei $-af(a)+F(a)$ eine Integrationskonstante ist.

Beispiel 25.5. Wir berechnen eine Stammfunktion von $\arctan x$ unter Verwendung von Satz 25.4. Eine Stammfunktion des Tangens ist

$$\int \tan t\ dt = -\ \ln(\cos x)\,.$$

Also ist

$$x \cdot \arctan x + \ln(\cos(\arctan x))$$

eine Stammfunktion von $\arctan x$.

25.3. **Die Substitutionsregel.**

Satz 25.6. *Sei I ein reelles Intervall und sei*

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Es sei

$$g : [a,b] \longrightarrow I$$

stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\int_a^b f(g(t))g'(t)\,dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(s)\,ds\,.$$

Beweis. Wegen der Stetigkeit von f und der vorausgesetzten stetigen Differenzierbarkeit von g existieren beide Integrale. Es sei F eine Stammfunktion von f, die aufgrund von Korollar 24.5 existiert. Nach der Kettenregel hat die zusammengesetzte Funktion $t \mapsto F(g(t)) = (F \circ g)(t)$ die Ableitung $F'(g(t))g'(t) = f(g(t))g'(t)$. Daher gilt insgesamt

$$\int_a^b f(g(t))g'(t)\,dt \;=\; (F \circ g)|_a^b \;=\; F(g(b)) - F(g(a)) \;=\; F|_{g(a)}^{g(b)} \;=\; \int_{g(a)}^{g(b)} f(s)\,ds.$$

□

Beispiel 25.7. Typische Beispiele, wo man sofort erkennen kann, dass man die Substitutionsregel anwenden kann, sind bspw.

$$\int g^n g'$$

mit der Stammfunktion

$$\frac{1}{n+1} g^{n+1}$$

oder

$$\int \frac{g'}{g}$$

mit der Stammfunktion

$$\ln g\,.$$

Häufig liegt ein bestimmtes Integral nicht in einer Form vor, dass man die vorstehende Regel direkt anwenden könnte. Häufiger kommt die folgende umgekehrte Variante zum Zug.

Korollar 25.8. *Es sei*

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion und es sei

$$\varphi : [c, d] \longrightarrow [a, b],\ s \longmapsto \varphi(s),$$

eine bijektive, stetig differenzierbare Funktion. Dann gilt

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(s)) \cdot \varphi'(s)\,ds$$

Beweis. Nach Satz 25.6 ist

$$\int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(s))\varphi'(s)\,ds \;=\; \int_{\varphi(\varphi^{-1}(a))}^{\varphi(\varphi^{-1}(b))} f(t)\,dt \;=\; \int_a^b f(t)\,dt.$$

□

Bemerkung 25.9. Die Substitution wird folgendermaßen angewendet: Es soll das Integral

$$\int_a^b f(t)\,dt$$

berechnet werden. Man muss dann eine Idee haben, dass durch die Substitution

$$t = \varphi(s)$$

das Integral einfacher wird (und zwar unter Berücksichtigung der Ableitung $\varphi'(t)$ und unter der Bedingung, dass die Umkehrfunktion φ^{-1} berechenbar ist). Mit $c = \varphi^{-1}(a)$ und $d = \varphi^{-1}(b)$ liegt insgesamt die Situation

$$[c, d] \xrightarrow{\varphi} [a, b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

vor. In vielen Fällen kommt man mit gewissen Standardsubstitutionen weiter.

Bei einer Substitution werden drei Operationen durchgeführt.

(1) Ersetze $f(t)$ durch $f(\varphi(s))$.
(2) Ersetze dt durch $\varphi'(s)ds$.
(3) Ersetze die Integrationsgrenzen a und b durch $\varphi^{-1}(a)$ und $\varphi^{-1}(b)$.

Für den zweiten Schritt empfiehlt sich die Merkregel

$$dt \;=\; d\varphi(s) \;=\; \varphi'(s)ds,$$

der man im Rahmen der Theorie der „Differentialformen“ auch eine inhaltliche Bedeutung geben kann.

Beispiel 25.10. Die obere Kreislinie des Einheitskreises ist die Punktmenge

$$\{(x,y)|\, x^2+y^2=1,\; -1\le x\le 1,\; y\ge 0\}\,.$$

Zu gegebenem x, $-1 \le x \le 1$, gibt es genau ein y, das diese Bedingung erfüllt, nämlich $y=\sqrt{1-x^2}$. Daher ist der Flächeninhalt des oberen Einheitskreises gleich der Fläche unter dem Graphen der Funktion $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ über dem Intervall $[-1,1]$, also gleich

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx\,.$$

Mit der Substitution

$$x = \cos t \;\text{ bzw. }\; t = \arccos x$$

(wobei $\cos\;:[0,\pi]\to[-1,1]$ bijektiv ist), erhält man

$$\begin{aligned}
\int_a^b \sqrt{1-x^2}\,dx \;&=\; \int_{\arccos a}^{\arccos b} \sqrt{1-\cos^2 t}\,(-\sin t\,)\,dt\\
&=\; -\int_{\arccos a}^{\arccos b} \sin^2 t\;dt\\
&=\; \frac{1}{2}(\sin t\;\cos t\;-t)|_{\arccos a}^{\arccos b}\,.
\end{aligned}$$

Insbesondere ist

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}(x\cdot\sin(\arccos x\,)-\arccos x\,)\\
=\;&\frac{1}{2}(x\cdot\sqrt{1-x^2}-\arccos x\,)
\end{aligned}$$

eine Stammfunktion zu $\sqrt{1-x^2}$. Daher ist

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx \;=\; \frac{1}{2}(\sin 0\;+\;\sin\pi\;+\pi) \;=\; \pi/2.$$

Beispiel 25.11. Wir bestimmen eine Stammfunktion von $\sqrt{x^2-1}$ unter Verwendung der Hyperbelfunktionen $\sinh t$ und $\cosh t$, für die die Beziehung $\cosh^2 t\;-\;\sinh^2 t\;=1$ gilt. Die Substitution

$$x = \cosh t \;\text{ mit }\; dx = \sinh t\,dt$$

liefert[26]

$$\int_a^b \sqrt{x^2-1}\,dx$$

[26] Die Umkehrfunktion des Kosinus hyperbolicus heißt *Areakosinus hyperbolicus* und wird mit $\operatorname{arcosh} x$ bezeichnet.

$$\begin{aligned} &= \int_{\operatorname{arcosh} a}^{\operatorname{arcosh} b} \sqrt{\cosh^2 t - 1} \cdot \sinh t \, dt \\ &= \int_{\operatorname{arcosh} a}^{\operatorname{arcosh} b} \sinh^2 t \, dt. \end{aligned}$$

Eine Stammfunktion des Sinus hyperbolicus im Quadrat ergibt sich aus

$$\sinh^2 t = \left(\frac{1}{2}(e^t - e^{-t})\right)^2 = \frac{1}{4}(e^{2t} + e^{-2t} - 2).$$

Daher ist

$$\int \sinh^2 u \, du = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}e^{2u} - \frac{1}{2}e^{-2u} - 2u\right) = \frac{1}{4}\sinh 2u - \frac{1}{2}u$$

und somit

$$\begin{aligned} &\int \sqrt{x^2 - 1}\, dx \\ &= \frac{1}{4}\sinh(2 \operatorname{arcosh} x) - \frac{1}{2}\operatorname{arcosh} x\,. \end{aligned}$$

Beispiel 25.12. Wir wollen eine Stammfunktion für die Funktion

$$f(x) = \frac{x^2}{(x\cos x - \sin x)^2}$$

bestimmen. Als Vorüberlegung berechnen wir die Ableitung von

$$\frac{1}{x\cos x - \sin x}\,.$$

Diese ist

$$-\frac{\cos x - x\sin x - \cos x}{(x\cos x - \sin x)^2} = \frac{x\sin x}{(x\cos x - \sin x)^2}\,.$$

Wir schreiben daher f als ein Produkt

$$f(x) = \frac{x\sin x}{(x\cos x - \sin x)^2} \cdot \frac{x}{\sin x}$$

und wenden darauf partielle Integration an, wobei wir den ersten Faktor integrieren und den zweiten Faktor ableiten. Die Ableitung des zweiten Faktors ist

$$\left(\frac{x}{\sin x}\right)' = \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x}.$$

Daher ist

$$\begin{aligned} \int f(x)\, dx &= \frac{1}{x\cos x - \sin x} \cdot \frac{x}{\sin x} \\ &\quad - \int \frac{1}{x\cos x - \sin x} \cdot \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x}\, dx \\ &= \frac{1}{x\cos x - \sin x} \cdot \frac{x}{\sin x} + \int \frac{1}{\sin^2 x}\, dx \\ &= \frac{1}{x\cos x - \sin x} \cdot \frac{x}{\sin x} - \cot x\,. \end{aligned}$$

26. Vorlesung

26.1. **Stammfunktionen zu rationalen Funktionen.**

Wir möchten zeigen, wie man zu einer rationalen Funktion P/Q (gegeben durch zwei Polynome P, Q, $Q \neq 0$) eine Stammfunktion finden kann. Im Allgemeinen gehen bei der Bestimmung einer solchen Stammfunktion verschiedene Techniken ein, die wir im Laufe der Vorlesung kennengelernt haben: die Division mit Rest für Polynome, das Lösen inhomogener linearer Gleichungssysteme und Integrationsregeln.

Wenn das Nennerpolynom $Q = 1$ ist, so handelt es sich einfach um ein Polynom P, das problemlos zu integrieren ist. Für die Funktion $1/x$ ist der natürliche Logarithmus eine Stammfunktion.[27] Damit ist auch eine Funktion vom Typ

$$\frac{1}{ax+b}$$

(mit $a \neq 0$) integrierbar, eine Stammfunktion ist $\frac{1}{a} \ln(ax+b)$. Damit kann man überhaupt beliebige rationale Funktionen der Form

$$\frac{P}{ax+b}$$

integrieren. Die Division mit Rest[28] führt zu einer Darstellung

$$P = H(ax+b) + c\,,$$

mit einem weiteren Polynom H, und wobei das Restpolynom c konstant ist, da sein Grad kleiner als der Grad des linearen Polynoms ist, durch das die Division durchgeführt wird. Aus dieser Gleichung erhält man die Darstellung

$$\frac{P}{ax+b} = H + \frac{c}{ax+b}\,,$$

wobei wir für die beiden Summanden Stammfunktionen angeben können. Die Division mit Rest wird auch im allgemeinen Fall entscheidend sein. Davor betrachten wir aber noch den Fall eines quadratischen Nennerpolynoms mit Zähler 1, also

$$\frac{1}{ax^2+bx+c}$$

mit $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Durch Multiplikation mit a kann man den Koeffizienten vor x^2 zu 1 normieren. Durch quadratisches Ergänzen kann man

$$x^2 + bx + c = (x+d)^2 + e$$

[27] Die Wahl eines geeigneten Definitionsbereichs, um die Aussagen über Stammfunktionen auch in dieser Hinsicht präzise zu machen, überlassen wir dem Leser.

[28] Man kann die Division mit Rest durch ein lineares Polynom $ax+b$ sukzessive fortsetzen und erhält ein Polynom in der „neuen Variablen“ $u = ax + b$. Dies geht nicht mit einem Polynom von höherem Grad.

schreiben. Mit der neuen Variablen $u = x + d$ (bzw. mit der Substitution $u = x+d$) schreibt sich dies als u^2+e. Mit einer weiteren Substitution unter Verwendung der Quadratwurzel von e bzw. von $-e$ gelangt man zu

$$\frac{1}{1+v^2} \text{ oder } \frac{1}{1-v^2}\,.$$

Im ersten Fall gilt

$$\int \frac{1}{1+v^2}dv = \arctan v$$

und im zweiten Fall gilt

$$\int \frac{1}{1-v^2}dv = \frac{1}{2}\ln\frac{1+v}{1-v}\,,$$

wie früher gezeigt wurde. Für die inversen Funktionen zu Potenzen von quadratischen nullstellenfreien Polynomen werden die Stammfunktionen durch folgende Rekursionsformel bestimmt.

Lemma 26.1. *Es sei x^2+bx+c (mit $b, c \in \mathbb{R}$) ein quadratisches Polynom ohne reelle Nullstelle (d.h., dass $\triangle := \frac{b^2-4c}{4} < 0$ ist). Dann ist*[29]

$$\int \frac{1}{x^2+bx+c}dx = \frac{1}{\sqrt{-\triangle}}\arctan\frac{1}{\sqrt{-\triangle}}\left(z+\frac{b}{2}\right)$$

und für $n \geq 1$ gilt die Rekursionsformel

$$\begin{aligned}
&\int \frac{1}{(x^2+bx+c)^{n+1}}dx \\
= \quad & \frac{1}{n(4c-b^2)}\left(\frac{2z+b}{(z^2+bz+c)^n} + (4n-2)\int\frac{1}{(x^2+bx+c)^n}dx\right).
\end{aligned}$$

Beweis. Ableiten ergibt

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{\sqrt{-\triangle}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{-\triangle}}\left(x+\frac{b}{2}\right)\right)\right)' &= \frac{1}{\sqrt{-\triangle}}\cdot\frac{1}{\sqrt{-\triangle}}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{-\triangle}(x+\frac{b}{2})^2} \\
&= \frac{1}{-\triangle+(x+\frac{b}{2})^2} \\
&= \frac{1}{c-\frac{b^2}{4}+x^2+bx+\frac{b^2}{4}} \\
&= \frac{1}{x^2+bx+c}.
\end{aligned}$$

[29]Manchmal wird eine Stammfunktion zu einer Funktion mit einer neuen Variablen angegeben, um die Rollen von Integrationsvariablen und Variable für die Integrationsgrenzen auseinander zu halten. In einem unbestimmten Integral, wo keine Integrationsgrenzen aufgeführt werden, ist das nicht wichtig. Bei einem Integral der Form $\int_0^z f(x)dx$ ist x die Integrationsvariable und z die Grenzvariable. Der Ausdruck hängt aber nicht von x ab, sondern lediglich von z. Deshalb ist $\int_0^z f(x)dx = F(z)$ (auf beiden Seiten steht eine von z abhängige Funktion, und diese stimmen überein) richtig und $\int_0^z f(x)dx = F(x)$ falsch. Eine Formulierung wie $F(x)$ ist eine Stammfunktion von $f(x)$ ist aber korrekt.

Zum Beweis der Rekursionsformel setzen wir $q(x) := x^2 + bx + c$ und leiten ab.

$$\begin{aligned}((2x+b)q^{-n})' &= 2q^{-n} - n(2x+b)q^{-n-1}(2x+b)\\ &= 2q^{-n} - nq^{-n-1}(2x+b)^2\\ &= 2q^{-n} - nq^{-n-1}(4x^2+4xb+b^2)\\ &= 2q^{-n} - nq^{-n-1}(4q-4c+b^2)\\ &= 2q^{-n} - 4nq^{-n} + n(4c-b^2)q^{-n-1}\\ &= (2-4n)q^{-n} + n(4c-b^2)q^{-n-1}.\end{aligned}$$

Division durch $n(4c - b^2)$ und Umstellen ergibt

$$\begin{aligned}&q^{-n-1}\\ = \ &\frac{1}{n(4c-b^2)}((2x+b)q^{-n})' + \frac{4n-2}{n(4c-b^2)}q^{-n}.\end{aligned}$$

Dies ist die Behauptung. □

Bemerkung 26.2. Mit Lemma 26.1 kann man auch rationale Funktionen der Form

$$\frac{rx+s}{(x^2+bx+c)^n}$$

(mit $r, s \in \mathbb{R}$, $r \neq 0$,) integrieren, wo also das Zählerpolynom linear ist und das Nennerpolynom eine Potenz eines quadratischen Polynoms ist. Bei $n = 1$ ist

$$\begin{aligned}&\left(\frac{r}{2}\ln\left(x^2+bx+c\right)\right)'\\ = \ &\frac{r}{2}\cdot\frac{2x+b}{x^2+bx+c}\\ = \ &\frac{rx+\frac{rb}{2}}{x^2+bx+c}.\end{aligned}$$

D.h., dass die Differenz zwischen dieser Ableitung und der zu integrierenden Funktion vom Typ

$$\frac{u}{x^2+bx+c}$$

ist, was wir aufgrund von Lemma 26.1 integrieren können. Bei $n \geq 2$ ist

$$\begin{aligned}&\left(\frac{-r}{2(n-1)}\cdot\frac{1}{(x^2+bx+c)^{n-1}}\right)'\\ = \ &\frac{-r}{2(n-1)}\cdot(-n+1)\cdot(2x+b)\cdot\frac{1}{(x^2+bx+c)^n}\\ = \ &\frac{rx+\frac{rb}{2}}{(x^2+bx+c)^n}\end{aligned}$$

und wieder ist das Integral auf eine schon behandelte Situation zurückgeführt.

Wir möchten für beliebige rationale Funktionen $f = \frac{P}{Q}$ mit $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ Stammfunktionen bestimmen. Dies geht grundsätzlich immer, vorausgesetzt, dass man eine Faktorzerlegung des Nennerpolynoms besitzt. Aufgrund der reellen Version des Fundamentalsatzes der Algebra gibt es eine Faktorzerlegung

$$Q = (X - b_1) \cdots (X - b_r) \cdot q_1 \cdots q_s \,,$$

wobei die q_j quadratische Polynome ohne reelle Nullstellen sind. Das Bestimmen der Stammfunktionen zu rationalen Funktionen beruht auf der *Partialbruchzerlegung* von rationalen Funktionen, die wir zuerst besprechen.

26.2. **Partialbruchzerlegung.**

Die *Partialbruchzerlegung* liefert eine wichtige Darstellungsform für eine rationale Funktion P/Q, bei der die Nenner besonders einfach werden. Wir beginnen mit dem Fall $K = \mathbb{C}$, wo wir den Fundamentalsatz der Algebra zur Verfügung haben.

Satz 26.3. *Es seien $P, Q \in \mathbb{C}[X]$, $Q \neq 0$, Polynome und es sei*

$$Q = (X - a_1)^{r_1} \cdots (X - a_s)^{r_s}$$

mit verschiedenen $a_i \in \mathbb{C}$. Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes Polynom $H \in \mathbb{C}[X]$ und eindeutig bestimmte Koeffizienten $c_{ij} \in \mathbb{C}$, $1 \leq i \leq s$, $1 \leq j \leq r_i$, mit

$$\frac{P}{Q} = H + \frac{c_{11}}{X - a_1} + \frac{c_{12}}{(X - a_1)^2} + \ldots + \frac{c_{1r_1}}{(X - a_1)^{r_1}} + \ldots \\ + \frac{c_{s1}}{X - a_s} + \frac{c_{s2}}{(X - a_s)^2} + \ldots + \frac{c_{sr_s}}{(X - a_s)^{r_s}}.$$

Beweis. Wir verzichten auf den Beweis, obwohl uns die dazu benötigten Methoden zur Verfügung stehen. □

Wir wenden uns nun der reellen Situation zu.

Korollar 26.4. *Es seien $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, $Q \neq 0$, Polynome und es sei*

$$Q = (X - a_1)^{r_1} \cdots (X - a_s)^{r_s} Q_1^{t_1} \cdots Q_u^{t_u}$$

mit verschiedenen $a_i \in \mathbb{R}$ und verschiedenen quadratischen Polynomen Q_k ohne reelle Nullstellen. Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes Polynom $H \in \mathbb{R}[X]$ und eindeutig bestimmte Koeffizienten $c_{ij} \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq s$, $1 \leq j \leq r_i$, und eindeutig bestimmte Polynome $L_{k\ell} = d_{k\ell}X + e_{k\ell}$, $1 \leq k \leq u$, $1 \leq \ell \leq t_k$, mit

$$\begin{aligned} \frac{P}{Q} \quad = \quad & H + \frac{c_{11}}{X - a_1} + \frac{c_{12}}{(X - a_1)^2} + \ldots + \frac{c_{1r_1}}{(X - a_1)^{r_1}} \\ & + \ldots + \frac{c_{s1}}{X - a_s} + \frac{c_{s2}}{(X - a_s)^2} + \ldots + \frac{c_{sr_s}}{(X - a_s)^{r_s}} \end{aligned}$$

$$+\frac{L_{11}}{Q_1}+\frac{L_{12}}{Q_1^2}+\ldots+\frac{L_{1t_1}}{Q_1^{t_1}}$$
$$+\ldots+\frac{L_{u1}}{Q_u}+\frac{L_{u2}}{Q_u^2}+\ldots+\frac{L_{ut_u}}{Q_u^{t_u}}.$$

Beweis. Auch hier verzichten wir auf den Beweis, der auf der komplexen Partialbruchzerlegung beruht. □

Neben dem Umweg über die komplexe Partialbruchzerlegung gibt es weitere Methoden, in Beispielen die reelle Partialbruchzerlegung zu bestimmen. Grundsätzlich bedeutet das Bestimmen der (reellen oder komplexen) Koeffizienten in der Partialbruchzerlegung, ein (inhomogenes) lineares Gleichungssystem zu lösen, wobei man sowohl durch *Koeffizientenvergleich* als auch durch das Einsetzen von bestimmten Zahlen zu hinreichend vielen linearen Gleichungen kommt.

Beispiel 26.5. Wir betrachten die rationale Funktion

$$\frac{1}{X^3-1}=\frac{1}{(X-1)(X^2+X+1)},$$

wobei der Faktor rechts reell nicht weiter zerlegbar ist. Daher muss es eine eindeutige Darstellung

$$\frac{1}{(X^3-1)}=\frac{a}{X-1}+\frac{bX+c}{X^2+X+1}$$

geben. Multiplikation mit dem Nennerpolynom führt auf

$$\begin{aligned}1 &= a(X^2+X+1)+(bX+c)(X-1)\\ &= (a+b)X^2+(a+c-b)X+a-c.\end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich führt auf das inhomogene lineare Gleichungssystem

$$a+b=0 \text{ und } a+c-b=0 \text{ und } a-c=1$$

mit den eindeutigen Lösungen

$$a=\frac{1}{3},\ b=-\frac{1}{3},\ c=-\frac{2}{3}.$$

Die Partialbruchzerlegung ist also

$$\frac{1}{(X^3-1)}=\frac{\frac{1}{3}}{X-1}+\frac{-\frac{1}{3}X-\frac{2}{3}}{X^2+X+1}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{X-1}-\frac{1}{3}\cdot\frac{X+2}{X^2+X+1}.$$

Beispiel 26.6. Wir betrachten die rationale Funktion

$$\frac{X^3-X+5}{X^4+X^2}=\frac{X^3-X+5}{X^2(X^2+1)},$$

wo die Faktorzerlegung des Nennerpolynoms sofort ersichtlich ist. Der Ansatz

$$\frac{X^3-X+5}{X^2(X^2+1)}=\frac{a}{X}+\frac{b}{X^2}+\frac{cX+d}{X^2+1}$$

führt durch Multiplikation mit dem Nennerpolynom auf

$$\begin{aligned} X^3 - X + 5 &= aX(X^2+1) + b(X^2+1) + (cX+d)X^2 \\ &= aX^3 + aX + bX^2 + b + cX^3 + dX^2 \\ &= (a+c)X^3 + (b+d)X^2 + aX + b. \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich führt auf das inhomogene lineare Gleichungssystem

$$a + c = 1 \text{ und } b + d = 0 \text{ und } a = -1 \text{ und } b = 5$$

mit der Lösung

$$b = 5,\ a = -1,\ d = -5,\ c = 2\,.$$

Insgesamt ist die Partialbruchzerlegung also gleich

$$\frac{X^3 - X + 5}{X^2(X^2+1)} = -\frac{1}{X} + \frac{5}{X^2} + \frac{2X-5}{X^2+1}\,.$$

26.3. **Integration rationaler Funktionen.**

Verfahren 26.7. Es sei eine rationale Funktion

$$f = \frac{P}{Q}$$

gegeben, für die eine Stammfunktion gefunden werden soll. Dabei seien P und Q reelle Polynome. Man geht folgendermaßen vor.

(1) Bestimme die reelle Faktorzerlegung des Nennerpolynoms Q.
(2) Finde die Partialbruchzerlegung

$$\frac{P}{Q} = H + \sum_{i=1}^{r} \left(\sum_{j=1}^{s_i} \frac{c_{ij}}{(X-a_i)^j} \right) + \sum_{k=1}^{u} \left(\sum_{j=1}^{t_k} \frac{d_{k\ell}X + e_{k\ell}}{Q_k^\ell} \right)\,.$$

(3) Bestimme für H, für jedes

$$\frac{c_{ij}}{(X-a_i)^j}$$

und für jedes

$$\frac{d_{k\ell}X + e_{k\ell}}{Q_k^\ell}$$

eine Stammfunktion.

Beispiel 26.8. Wir möchten eine Stammfunktion zu

$$f(x) = \frac{1}{x^3-1}$$

bestimmen. Nach Beispiel 26.5 ist die reelle Partialbruchzerlegung gleich

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^3-1} &= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x-1} - \frac{1}{3}\cdot\frac{x+2}{x^2+x+1} \\ &= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x-1} - \frac{1}{6}\cdot\frac{2x+4}{x^2+x+1} \\ &= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x-1} - \frac{1}{6}\cdot\frac{2x+1}{x^2+x+1} - \frac{1}{6}\cdot\frac{3}{x^2+x+1} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x-1} - \frac{1}{6} \cdot \frac{2x+1}{x^2+x+1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2+x+1}.$$

Als Stammfunktion ergibt sich daher

$$\frac{1}{3} \ln (x-1) - \frac{1}{6} \cdot \ln (x^2+x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \arctan \frac{2}{\sqrt{3}} \left(x + \frac{1}{2} \right) ,$$

wobei wir für den rechten Summanden Lemma 26.1 verwendet haben.

Beispiel 26.9. Wir möchten eine Stammfunktion zu

$$f(x) = \frac{x^3 - x + 5}{x^4 + x^2}$$

bestimmen. Nach Beispiel 26.6 ist die reelle Partialbruchzerlegung gleich

$$\frac{x^3 - x + 5}{x^2(x^2+1)} = -\frac{1}{x} + \frac{5}{x^2} + \frac{2x-5}{x^2+1} .$$

Als Stammfunktion ergibt sich daher

$$- \ln x - 5x^{-1} + \ln (x^2+1) - 5 \arctan x .$$

26.4. **Stammfunktionen zu rationalen Funktionen in der Exponentialfunktion.**

Nachdem wir nun rationale Funktionen integrieren können, können wir auch für eine ganze Reihe von Funktionen eine Stammfunktion finden, die wir durch gewisse Standardsubstitution auf eine rationale Funktion zurückführen können. Wir führen dies exemplarisch für Funktionen durch, die sich als rationale Funktionen in der Exponentialfunktion schreiben lassen.

Lemma 26.10. *Es sei f eine rationale Funktion in der Exponentialfunktion, d.h. es gebe Polynome $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, $Q \neq 0$, derart, dass*

$$f(t) = \frac{P(e^t)}{Q(e^t)}$$

gilt. Dann kann man durch die Substitution

$$t = \ln s$$

das Integral $\int f(t)\, dt$ auf das Integral einer rationalen Funktion zurückführen.

Beweis. Bei der Substitution $t = \ln s$ ist

$$dt = \frac{1}{s} ds ,$$

und für die Polynome $P(e^t)$ und $Q(e^t)$ ergeben sich

$$P(e^t) = P(e^{\ln s}) = P(s) \text{ und } Q(e^t) = Q(e^{\ln s}) = Q(s) .$$

Insgesamt ergibt sich also die rationale Funktion $\frac{P(s)}{sQ(s)}$. In deren Stammfunktion muss man dann $s = e^t$ einsetzen. $\square$

Beispiel 26.11. Wir wollen eine Stammfunktion für die Funktion

$$f(t) = \frac{1}{e^t + e^{3t}}$$

finden. Das in Lemma 26.10 beschriebene Verfahren führt auf die rationale Funktion

$$\frac{1}{(s+s^3)s} = \frac{1}{s^2(s^2+1)} = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+1},$$

so dass die Partialbruchzerlegung direkt vorliegt. Die Stammfunktion von dieser rationalen Funktion ist

$$-\frac{1}{s} - \arctan s\,.$$

Die Stammfunktion von f ist daher

$$-\frac{1}{e^t} - \arctan e^t\,.$$

27. Vorlesung

27.1. **Uneigentliche Integrale.**

Beispiel 27.1. Wir knüpfen an Beispiel 24.9 an, d.h., es liegen zwei Massen M und m vor, die untereinander den Abstand R_0 besitzen. Wieviel Energie muss man aufwenden, um die beiden Massen unendlich weit voneinander zu entfernen? In Beispiel 24.9 haben wir die Energie berechnet, um den Abstand von R_0 auf R_1 zu erhöhen, nämlich

$$E(R_1) = \int_{R_0}^{R_1} \gamma \frac{Mm}{r^2}\, dr = \gamma M m \left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R_1} \right).$$

Für $R_1 \to \infty$ ist $\frac{1}{R_1} \to 0$ und daher ist $E(R_1) \to \gamma M m \frac{1}{R_0}$.

Dieses Beispiel zeigt, dass es sinnvoll sein kann, bei bestimmten Integralen die Intervallgrenzen „gegen unendlich laufen zu lassen“. Dies führt zum Begriff der *uneigentlichen Integrale*.

Unter einem Randpunkt eines (ein- oder beidseitig) unbeschränkten Intervalls verstehen wir im Folgenden auch die Symbole ∞ und $-\infty$. Dies heißt nicht, dass diese Symbole zu $\mathbb{R}$ gehören, sondern lediglich, dass man dafür sinnvolle Grenzwertbetrachtungen durchführen kann. Die Definition für den Grenzwert einer Funktion gegen $+\infty$ bzw. $-\infty$ lautet folgendermaßen.

Definition 27.2. Es sei $T = [a, \infty]$ (oder $T = [-\infty, a]$) ein rechtsseitig (bzw. linksseitig) unbeschränktes Intervall und

$$f : T \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Dann heißt $b \in \mathbb{R}$ *Grenzwert* (oder *Limes*) von f für $x \to +\infty$ (bzw. $x \to -\infty$), wenn es für jedes $\epsilon > 0$ ein $x_0 \geq a$ (bzw. $x_0 \geq a$) gibt mit $|f(x) - b| \leq \epsilon$ für alle $x \geq x_0$ (bzw. $x \leq x_0$). In diesem Fall schreibt man

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b$$

(bzw. $\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$).

Die Rechenregeln für diesen Grenzwertbegriff sind weitgehend analog zu den Rechenregeln für den bisherigen Grenzwertbegriff für Funktionen (siehe Lemma 15.10). Sie sind auch analog zu den Rechenregeln für Limiten von Folgen (siehe Lemma 12.10).

Definition 27.3. Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, r ein Randpunkt von I und $a \in I$. Es sei eine stetige Funktion

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

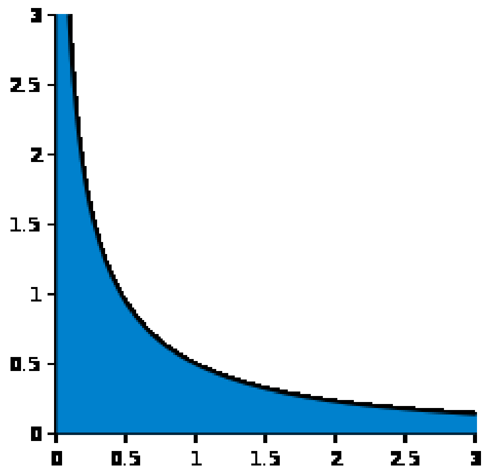
gegeben. Man sagt, dass das *uneigentliche Integral* zu f für $x \to r$ existiert, wenn der Grenzwert

$$\lim_{x \to r} \int_a^x f(t)\, dt$$

existiert. In diesem Fall schreibt man für diesen Grenzwert auch

$$\int_a^r f(t)\, dt$$

und nennt dies das *uneigentliche Integral* von a nach r



Die Funktion $\frac{1}{(x+1)\sqrt{x}}$, der blaue Flächeninhalt repräsentiert das (beidseitig) uneigentliche Integral.

Die Existenz dieses uneigentlichen Integrals hängt nicht von dem gewählten Intervallpunkt $a \in I$ ab, wohl aber der Wert des uneigentlichen Integrals. Die inhaltliche Interpretation des uneigentlichen Integrals ist wiederum der

Flächeninhalt unterhalb des Funktionsgraphen, aber erstreckt über ein nicht notwendigerweise kompaktes Intervall. Wenn für die Funktion f eine Stammfunktion F bekannt ist, so geht es um das Bestimmen des Grenzwertes

$$\lim_{x \to r} \int_a^x f(t)\,dt = \lim_{x \to r} F(x) - F(a)\,.$$

Lemma 27.4. *Es sei I ein reelles Intervall, $a \in I$ und r sei ein Randpunkt von I. Es seien*

$$f, h : I \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

stetige Funktionen mit

$$f(t) \leq h(t) \text{ für alle } t \in I$$

und es sei vorausgesetzt, dass das uneigentliche Integral

$$\int_a^r h(t)\,dt$$

existiert. Dann existiert auch das uneigentliche Integral

$$\int_a^r f(t)\,dt$$

und es gilt

$$\int_a^r f(t)\,dt \leq \int_a^r h(t)\,dt$$

Beweis. Wir behandeln den Fall, wo r die obere Intervallgrenze ist. Für alle $b \in I$ ist

$$\int_a^b f(t)\,dt \leq \int_a^b h(t)\,dt$$

wegen $f(t) \leq h(t)$ für alle $t \in I$. Wegen der Nichtnegativität von h und von f wachsen beide Seite bei $b \to r$, und die rechte Seite ist durch das uneigentliche Integral $\int_a^r h(t)\,dt$ beschränkt. Nach Satz 13.10 existiert der Grenzwert

$$\lim_{b \to r} \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^r f(t)\,dt\,.$$

□

Beispiel 27.5. Sei $f(t) := t^c$ mit $c \in \mathbb{R}$. Wir interessieren uns für die uneigentlichen Integrale zu f für t von 0 bis 1. Dabei ist die Funktion bei der Intervallgrenze 0 (bei negativem c) nicht definiert, das ist also der kritische Randpunkt. Bei $c = -1$ ist $\ln t$ eine Stammfunktion von $1/t$. Daher ist

$$\int_x^1 \frac{1}{t}\,dt \;=\; -\ln x,$$

und der Grenzwert für $x \to 0$ existiert nicht. Das uneigentliche Integral existiert also nicht.

Sei nun $c < -1$. Dann ist $\frac{1}{c+1}t^{c+1}$ eine Stammfunktion zu t^c und daher ist

$$\lim_{x\to 0}\left(\int_x^1 t^c\, dt\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{c+1}t^{c+1}|_x^1\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{c+1} - \frac{x^{c+1}}{c+1}\right).$$

Da es sich rechts um eine negative Potenz von x handelt, ist $\lim_{x\to 0} x^{c+1} = \infty$. Das uneigentliche Integral existiert also nicht. Dies folgt übrigens auch aus Lemma 27.4, da ja $t^{-1} \leq t^c$ für $c < -1$ und $0 < t \leq 1$ gilt.

Sei nun $c > -1$. Dann ist $\frac{1}{c+1}t^{c+1}$ eine Stammfunktion zu t^c und daher ist

$$\lim_{x\to 0}\left(\int_x^1 t^c\, dt\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{c+1}t^{c+1}|_x^1\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{c+1} - \frac{x^{c+1}}{c+1}\right).$$

Da es sich um eine positive Potenz von x handelt, ist $\lim_{x\to 0} x^{c+1} = 0$ (nach Aufgabe 17.10). Das uneigentliche Integral existiert also und besitzt den Wert $\frac{1}{c+1}$.

Beispiel 27.6. Sei $f(t) := t^c$ mit $c \in \mathbb{R}$. Wir interessieren uns für das uneigentliche Integral zu f für t von 1 bis ∞. Der kritische Randpunkt ist also $+\infty$. Bei $c = -1$ ist $\ln t$ eine Stammfunktion von $1/t$. Daher ist

$$\int_1^x \frac{1}{t}\, dt = \ln x,$$

und der Grenzwert für $x \to +\infty$ existiert nicht. Das uneigentliche Integral existiert also nicht.

Sei nun $c < -1$. Dann ist $\frac{1}{c+1}t^{c+1}$ eine Stammfunktion zu t^c und daher ist

$$\lim_{x\to\infty}\left(\int_1^x t^c\, dt\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{c+1}t^{c+1}|_1^x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^{c+1}}{c+1} - \frac{1}{c+1}\right).$$

Da es sich um eine negative Potenz von x handelt, ist $\lim_{x\to\infty} x^{c+1} = 0$. Das uneigentliche Integral existiert also und besitzt den Wert $-\frac{1}{c+1}$.

Bei $c > -1$ ist $t^c \geq t^{-1}$ für $t \geq 1$ und daher kann nach Lemma 27.4 das uneigentliche Integral nicht existieren.

Definition 27.7. Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall mit den beiden Randpunkten r und s von I. Es sei eine stetige Funktion

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

gegeben. Man sagt, dass das (*beidseitig*) *uneigentliche Integral*

$$\int_r^s f(t)\, dt$$

existiert, wenn für ein $a \in I$ die beiden einseitig uneigentlichen Integrale

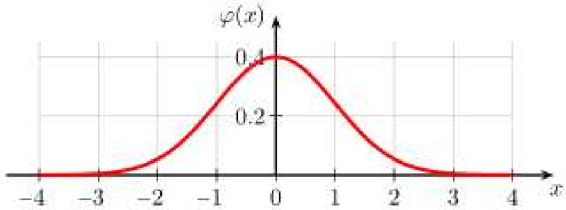
$$\int_r^a f(t)\, dt \text{ und } \int_a^s f(t)\, dt$$

existieren. In diesem Fall setzt man

$$\int_r^s f(t)\,dt := \int_r^a f(t)\,dt + \int_a^s f(t)\,dt$$

und nennt dies das *uneigentliche Integral* zu f von r nach s.

Die Existenz des beidseitig uneigentlichen Integrals hängt nicht von der Wahl des Punktes $a \in I$ ab. Darüberhinaus hängt der Wert dieses Integrals, falls es existiert, ebensowenig von dem gewählten Punkt ab.



Die Funktion $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}$ ist die Dichtefunktion der Gaußschen Normalverteilung. Der Flächeninhalt unterhalb der Kurve ist 1.

Beispiel 27.8. Die Funktion e^{-t^2} ist nicht elementar integrierbar, d.h., man kann keine geschlossene Stammfunktion mit rationalen Funktionen, Exponentialfunktion, trigonometrischen Funktionen und ihren Umkehrfunktionen angeben. Es ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}\,,$$

was wir hier ohne Beweis mitteilen. Durch eine einfache Substitution ergibt sich daraus

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = 1\,.$$

Dieses Integral nennt man *Fehlerintegral*; es spielt in der Stochastik eine wichtige Rolle.

27.2. **Vergleichskriterien mit Reihen.**

Lemma 27.9. *Sei $I = [1,\infty]$ ein rechtsseitig unbeschränktes Intervall und sei*

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige fallende Funktion mit $f(x) \geq 0$ für alle $x \in I$. Dann existiert das uneigentliche Integral

$$\int_1^{\infty} f(t)\,dt$$

genau dann, wenn die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

konvergiert.

Beweis. Wenn das uneigentliche Integral existiert, so betrachten wir die Abschätzung

$$\sum_{n=2}^{k} f(n) \leq \int_1^k f(t)\, dt\,,$$

die darauf beruht, dass die linke Seite das Treppenintegral zu einer unteren Treppenfunktion für f auf $[1,k]$ ist. Da die rechte Seite beschränkt ist, gilt dies auch für die linke Seite, so dass wegen $f(n) \geq 0$ die Reihe konvergiert. Ist umgekehrt die Reihe konvergent, so betrachten wir die Abschätzung

$$\int_1^k f(t)\, dt \leq \sum_{n=1}^{k-1} f(n)\,,$$

die gilt, da die rechte Seite das Treppenintegral zu einer oberen Treppenfunktion ist. Wegen $f(t) \geq 0$ ist die Integralfunktion $x \mapsto \int_1^x f(t)\, dt$ wachsend und beschränkt, da die rechte Seite wegen der Konvergenz der Reihe beschränkt ist. Daher besitzt die Integralfunktion für $x \mapsto \infty$ einen Grenzwert und das uneigentliche Integral existiert. $\square$

Beispiel 27.10. Die Funktion

$$f : [1, \infty] \longrightarrow \mathbb{R},\; t \longmapsto \frac{1}{t},$$

ist streng fallend. Daher ist die Funktion g, die für x mit $k \leq x < k+1$ durch $\frac{1}{k}$ definiert ist, eine Majorante für f, also $g(t) \geq f(t)$. Auf jedem Intervall $[1,n]$ liefert g eine obere Treppenfunktion zu f. Ebenso liefert die durch $\frac{1}{k+1}$ bei $k \leq x < k+1$ definierte Funktion h eine untere Treppenfunktion für f. Daher gelten die Abschätzungen

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \geq \int_1^n \frac{1}{t}\, dt \geq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1}\,.$$

Das Integral in der Mitte besitzt den Wert $\ln n$. Die Differenz zwischen der linken und der rechten Summe ist $1 - \frac{1}{n}$. Daher ist die Differenz

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \ln n$$

für jedes n positiv, mit n wachsend und nach oben beschränkt. Daher existiert für $n \to \infty$ der Limes, und dieser Limes ändert sich nicht, wenn man vorne in der Summe bis n aufsummiert anstatt bis $n-1$. Wir setzen

$$\gamma := \lim_{n \to \infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n \right)$$

und nennen sie die *eulersche Konstante* (oder *Mascheronische Konstante*). Ihr nummerischer Wert ist ungefähr

$$\gamma = 0,5772156649\ldots\,.$$

Es ist ein offenes mathematisches Problem, ob diese Zahl rational ist oder nicht.

28. Vorlesung

28.1. **Die Fakultätsfunktion.**

Die Fakultät einer natürlichen Zahl n ist $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$. Dabei gilt die rekursive Beziehung $n! = n \cdot ((n-1)!)$. Gibt es eine Möglichkeit, diese für die natürlichen Zahlen definierte Funktion auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$ durch eine differenzierbare Funktion f fortzusetzen? Ist es sogar möglich, dass dabei die Beziehung $f(x) = xf(x-1)$ für jedes x gilt? Wir werden mit Hilfe von uneigentlichen Integralen zeigen, dass dies in der Tat möglich ist.

Beispiel 28.1. Sei $x > -1$. Wir betrachten die Funktion

$$\mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R},\, t \longmapsto t^x e^{-t}.$$

Wir behaupten, dass das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty t^x e^{-t}\, dt$$

existiert. Für den rechten Rand (also ∞) betrachten wir eine natürliche Zahl $n \geq x$. Da die Exponentialfunktion schneller wächst als jede Polynomfunktion, gibt es ein $a \in \mathbb{R}_+$ derart, dass $t^n e^{-\frac{t}{2}} \leq 1$ gilt für alle $t \geq a$. Daher ist

$$\begin{aligned} \int_a^b t^x e^{-t}\, dt &\leq \int_a^b t^n e^{-t}\, dt \\ &= \int_a^b t^n e^{-\frac{t}{2}} e^{-\frac{t}{2}}\, dt \\ &\leq \int_a^b e^{-\frac{t}{2}}\, dt \\ &= 2\left(e^{-\frac{a}{2}} - e^{-\frac{b}{2}}\right) \leq 2e^{-\frac{a}{2}}. \end{aligned}$$

Für $b \to \infty$ wächst das linke Integral und ist durch $2e^{-\frac{a}{2}}$ beschränkt, so dass der Grenzwert existiert. Für das Verhalten am linken Rand (das nur bei $-1 < x \leq 0$ problematisch ist) müssen wir wegen $e^{-t} \leq 1$ nach Lemma 27.4 nur $\int_0^1 t^x\, dt$ betrachten. Eine Stammfunktion davon ist $\frac{1}{x+1} t^{x+1}$, deren Exponent positiv ist, so dass der Limes für $t \to 0$ existiert.

Das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty t^x e^{-t}\, dt$$

existiert also für $x \in \mathbb{R},\ x > -1$. Dies ist der Ausgangspunkt für die Definition der Fakultätsfunktion.

Definition 28.2. Für $x \in \mathbb{R}$, $x > -1$, heißt die Funktion

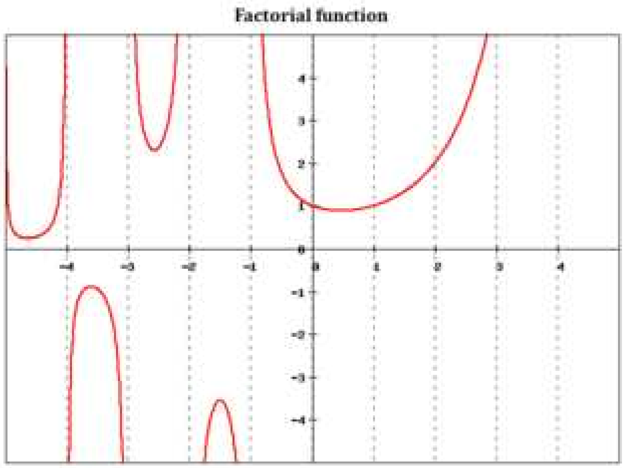
$$x \longmapsto \operatorname{Fak}(x) := \int_0^\infty t^x e^{-t}\, dt$$

die *Fakultätsfunktion*.

Die für $x > 0$ durch

$$\Gamma(x) := \operatorname{Fak}(x-1) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt$$

definierte Funktion heißt *Gammafunktion*, mit der häufiger gearbeitet wird. Mit der Fakultätsfunktion werden aber die Formeln etwas schöner und insbesondere wird der Zusammenhang zur Fakultät, der in der folgenden Aussage aufgezeigt wird, deutlicher.



Satz 28.3. *Die Fakultätsfunktion besitzt die folgenden Eigenschaften.*

(1) *Es ist* $\operatorname{Fak}(x) = x \cdot \operatorname{Fak}(x-1)$ *für* $x > 0$.
(2) *Es ist* $\operatorname{Fak}(0) = 1$.
(3) *Es ist* $\operatorname{Fak}(n) = n!$ *für natürliche Zahlen* $n \in \mathbb{N}$.
(4) *Es ist* $\operatorname{Fak}\left(-\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Beweis. (1) Mittels partieller Integration ergibt sich (für reelle Zahlen $b \geq a > 0$ bei fixiertem $x > 0$)

$$\begin{aligned}\int_a^b t^x e^{-t}\, dt &= -t^x e^{-t}\big|_a^b + \int_a^b x t^{x-1} e^{-t}\, dt \\ &= -b^x e^{-b} + a^x e^{-a} + x \cdot \int_a^b t^{x-1} e^{-t}\, dt.\end{aligned}$$

Für $b \to \infty$ geht $b^x e^{-b} \to 0$ und für $a \to 0$ geht $a^x e^{-a} \to 0$ (da x positiv ist). Wendet man auf beide Seiten diese Grenzwertprozesse an, so erhält man $\operatorname{Fak}(x) = x \cdot \operatorname{Fak}(x-1)$. (2). Es ist

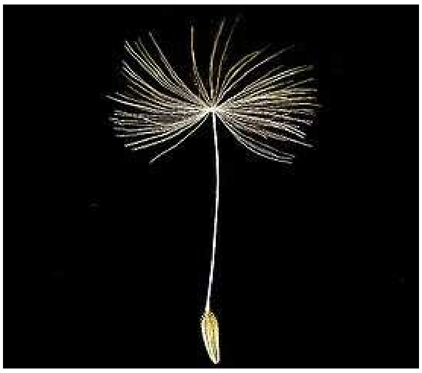
$$\operatorname{Fak}(0) = \int_0^\infty e^{-t}\, dt = -e^{-t}|_0^\infty = 1.$$

(3) folgt aus (1) und (2) durch Induktion. (4). Es ist

$$\operatorname{Fak}\left(-\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}} e^{-t}\, dt = 2\int_0^\infty e^{-s^2}\, ds = \int_{-\infty}^\infty e^{-s^2}\, ds = \sqrt{\pi}.$$

Dies ergibt sich mit der Substitution $t = s^2$ und dem sogenannten Fehlerintegral. $\square$

28.2. **Gewöhnliche Differentialgleichungen.**



Welche Bewegung vollzieht ein Löwenzahnfallschirmchen? Das Fallschirmchen lässt sich zu jedem Zeitpunkt von dem Wind tragen, der an der Stelle herrscht, wo es sich gerade befindet. Der Wind, seine Stärke und seine Richtung, hängt sowohl von der Zeit als auch vom Ort ab. Das bedeutet, dass hier ein gewisser „Rückkopplungsprozess“ vorliegt: Die bisherige Bewegung (also die Vergangenheit) bestimmt, wo sich das Fallschirmchen befindet und damit auch, welcher Wind auf es einwirkt und damit den weiteren Bewegungsablauf. Solche Bewegungsprozesse werden durch Differentialgleichungen beschrieben.

Differentialgleichungen sind ein fundamentaler Bestandteil der Mathematik und der Naturwissenschaften. Sie drücken eine Beziehung zwischen einer abhängigen Größe und der Änderung dieser Größe aus. Viele Gesetzmäßigkeiten in der Natur wie Bewegungsprozesse, Ablauf von chemischen Reaktionen, Wachstumsverhalten von Populationen werden durch Differentialgleichungen beschrieben. Hier besprechen wir nur solche Differentialgleichungen, die durch Integration gelöst werden können.

Definition 28.4. Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ eine Teilmenge und es sei

$$f : U \longrightarrow \mathbb{R},\ (t, y) \longmapsto f(t, y),$$

eine Funktion. Dann nennt man

$$y' = f(t, y)$$

die (gewöhnliche) *Differentialgleichung* zu f (oder zum *Vektorfeld* oder zum *Richtungsfeld* f).

Dabei ist $y' = f(t, y)$ erstmal nur ein formaler Ausdruck, dem wir aber sofort eine inhaltliche Interpretation geben. Das y soll eine Funktion repräsentieren und y' ihre Ableitung. Dies wird präzisiert durch den Begriff der *Lösung einer Differentialgleichung*.

Definition 28.5. Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ eine Teilmenge und es sei

$$f : U \longrightarrow \mathbb{R},\ (t, y) \longmapsto f(t, y),$$

eine Funktion. Zur gewöhnlichen Differentialgleichung

$$y' = f(t, y)$$

heißt eine Funktion

$$y : I \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto y(t),$$

auf einem (mehrpunktigen) Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ eine *Lösung der Differentialgleichung*, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind.

(1) Es ist $(t, y(t)) \in U$ für alle $t \in I$.
(2) Die Funktion y ist differenzierbar.
(3) Es ist $y'(t) = f(t, y(t))$ für alle $t \in I$.

Differentialgleichungen beschreiben häufig physikalische Prozesse, insbesondere Bewegungsprozesse. Daran soll auch die Notation erinnern, es steht t für die Zeit und y für den Ort. Dabei ist hier der Ort eindimensional, d.h. die Bewegung findet nur auf einer Geraden statt. Den Wert $f(t, y)$ sollte man sich als eine zu einem Zeit- und Ortspunkt vorgegebene Richtung auf der Ortsgeraden vorstellen. Eine Lösung ist dann eine Funktion

$$y : I \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto y(t),$$

die differenzierbar ist und deren Ableitung, vorgestellt als Momentangeschwindigkeit, zu jedem Zeitpunkt t mit dem durch $f(t, y(t))$ gegebenen Richtungsvektor übereinstimmt. Später werden wir auch Bewegungen betrachten, die sich in der Ebene oder im Raum abspielen, und die durch ein entsprechendes Richtungsfeld gesteuert werden.

Beispiel 28.6. Wir betrachten die gewöhnliche Differentialgleichung $y' = y$, in der t gar nicht explizit vorkommt (solche Differentialgleichungen nennt man zeitunabhängig). Durch diese Differentialgleichung werden Wachstumsprozesse beschrieben, bei denen beispielsweise der Zuwachs gleich der Bevölkerung ist. Gesucht ist also nach einer Funktion $y(t)$, die differenzierbar ist und die mit ihrer eigenen Ableitung übereinstimmt. Wir wissen bereits, dass die Exponentialfunktion $y(t) = e^t$ diese Eigenschaft besitzt. Ebenso ist jede Funktion ce^t mit einem festen $c \in \mathbb{R}$ eine Lösungsfunktion.

Wenn der Zuwachs zur Bevölkerung proportional ist, so führt dies zur Differentialgleichung $y' = ay$ mit einer festen Zahl a. In diesem Fall sind $y(t) = ce^{at}$ die Lösungen. Bei $a > 0$ spricht man von *exponentiellem Wachstum* und bei $a < 0$ von *exponentiellem Verfall*.

Beispiel 28.7. Wir betrachten die gewöhnliche Differentialgleichung $y' = yt$. Gesucht ist also nach einer Funktion $y(t)$, die differenzierbar ist und deren Ableitung die Gestalt $y(t)t$ besitzt. Hier ist nicht unmittelbar klar, wie eine Lösung aussieht und wie man sie findet. Durch Probieren findet man die Lösung $y(t) = e^{\frac{1}{2}t^2}$.

Definition 28.8. Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ eine Teilmenge und es sei

$$f : U \longrightarrow \mathbb{R},\ (t, y) \longmapsto f(t, y),$$

eine Funktion. Es sei $(t_0, y_0) \in U$ vorgegeben. Dann nennt man

$$y' = f(t, y) \text{ und } y(t_0) = y_0$$

das *Anfangswertproblem* zur gewöhnlichen Differentialgleichung $y' = f(t, y)$ mit der *Anfangsbedingung* $y(t_0) = y_0$.

Definition 28.9. Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ eine Teilmenge und es sei

$$f : U \longrightarrow \mathbb{R},\ (t, y) \longmapsto f(t, y),$$

eine Funktion. Es sei $(t_0, y_0) \in U$ vorgegeben. Dann nennt man eine Funktion

$$y : I \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto y(t),$$

auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ eine *Lösung des Anfangswertproblems*

$$y' = f(t, y) \text{ und } y(t_0) = y_0\,,$$

wenn y eine Lösung der Differentialgleichung ist und wenn zusätzlich

$$y(t_0) = y_0$$

gilt.

Es gibt kein allgemeines Verfahren eine Differentialgleichung bzw. ein Anfangswertproblem explizit zu lösen. Die Lösbarkeit hängt wesentlich von der gegebenen Funktion $f(t, y)$ ab.

Das eine Differentialgleichung beschreibende Vektorfeld $f(t, y)$ hängt im Allgemeinen von beiden Variablen t und y ab. Einfache, aber keineswegs triviale Spezialfälle von Differentialgleichungen liegen vor, wenn das Vektorfeld nur von einer der beiden Variablen abhängt.

Definition 28.10. Eine gewöhnliche Differentialgleichung

$$y' = f(t, y)$$

heißt *ortsunabhängig*, wenn die Funktion f nicht von y abhängt, wenn also $f(t, y) = g(t)$ gilt mit einer Funktion g in der einen Variablen t.

Eine ortsunabhängige gewöhnliche Differentialgleichung

$$y' = g(t)$$

zu einer stetigen Funktion g ist nichts anderes als das Problem, eine Stammfunktion $G(t)$ von g zu finden; eine Lösung y der Differentialgleichung ist ja genau durch die Bedingung ausgezeichnet, dass $y'(t) = g(t)$ ist. Da eine Stammfunktion nur bis auf die Integrationskonstante bestimmt ist, besitzt ein ortsunabhängiges Anfangswertproblem eine eindeutige Lösung.

Beispiel 28.11. Wir betrachten das ortsunabhängige Anfangswertproblem

$$y' = \frac{1}{t^2 - 1} \text{ mit der Anfangsbedingung } y(5) = 3\,.$$

Die Funktion $\frac{1}{t^2-1}$ besitzt die Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{t^2 - 1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t - 1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t + 1},$$

daher sind die Stammfunktionen (wir beschränken uns auf $t > 1$) gleich

$$y(t) = \frac{1}{2} \cdot \ln(t - 1) - \frac{1}{2} \cdot \ln(t + 1) + c\,.$$

Die Anfangsbedingung $y(5) = 3$ führt auf

$$\frac{1}{2} \cdot \ln 4 - \frac{1}{2} \cdot \ln 6 + c = 3\,,$$

also ist

$$c = 3 - \frac{1}{2} \cdot \ln 4 + \frac{1}{2} \cdot \ln 6$$

und die Lösungsfunktion des Anfangswertproblems ist

$$y(t) = \frac{1}{2} \cdot \ln(t - 1) - \frac{1}{2} \cdot \ln(t + 1) + 3 - \frac{1}{2} \cdot \ln 4 + \frac{1}{2} \cdot \ln 6\,.$$

Definition 28.12. Eine gewöhnliche Differentialgleichung

$$y' = f(t, y)$$

heißt *zeitunabhängig*, wenn die Funktion f nicht von t abhängt, wenn also $f(t, y) = h(y)$ gilt mit einer Funktion h in der einen Variablen y.

Bei einer zeitunabhängigen Differentialgleichung hängt nur das zugrunde liegende Vektorfeld nicht von der Zeit ab, die Lösungskurven sind hingegen im Allgemeinen zeitabhängig.

29. Vorlesung

29.1. **Homogene lineare gewöhnliche Differentialgleichungen.**

Definition 29.1. Eine Differentialgleichung der Form

$$y' = g(t)y$$

mit einer Funktion (I reelles Intervall)

$$g : I \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto g(t),$$

heißt *lineare Differentialgleichung* bzw. genauer *gewöhnliche homogene lineare Differentialgleichung.*

Linear bedeutet hierbei, dass in $f(t, y) = g(t)y$ der Ort y linear eingeht, d.h. zu jedem fixierten Zeitpunkt t_0 ist $f(t_0, y)$ eine lineare Funktion in y.

Die folgende Aussage zeigt, dass solche Differentialgleichungen durch Integration gelöst werden können. Die Nullfunktion ist natürlich immer eine Lösung, interessant sind daher die Lösungen, die noch zusätzliche Eigenschaften (typischerweise eine Anfangsbedingung) erfüllen.

Satz 29.2. *Es sei*

$$y' = g(t)y$$

eine homogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung mit einer stetigen Funktion

$$g : I \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto g(t),$$

die auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ definiert sei. Es sei G eine Stammfunktion zu g auf I. Dann sind die Lösungen der Differentialgleichung gleich

$$y(t) = c \cdot \exp(G(t)) \text{ mit } c \in \mathbb{R}\,.$$

Das Anfangswertproblem

$$y' = g(t)y \text{ und } y(t_0) = y_0$$

(mit $t_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}$) besitzt eine eindeutige Lösung.

Beweis. Zunächst gibt es eine Stammfunktion G von g aufgrund von Korollar 24.5, so dass die angegebenen Funktionen existieren. Durch Ableiten bestätigt man direkt, dass diese Funktionen wirklich Lösungen sind. Es sei y eine beliebige Lösungsfunktion. Wir betrachten den Quotienten

$$\begin{aligned}\left(\frac{y(t)}{\exp G(t)}\right)' &= \frac{y'(t)\exp G(t) - y(t)\cdot(\exp(G(t))\cdot g(t))}{\exp^2 G(t)}\\ &= \frac{y(t)g(t)\exp G(t) - y(t)\cdot(\exp(G(t))\cdot g(t))}{\exp^2 G(t)}\\ &= 0,\end{aligned}$$

so dass aufgrund von Lemma 24.6 der Quotient $\frac{y(t)}{\exp G(t)}$ konstant sein muss, woraus die Behauptung folgt. Die Bedingung $y(t_0) = y_0$ legt den Skalar $c = \frac{y_0}{\exp(G(t_0))}$ eindeutig fest. $\square$

Beispiel 29.3. Die homogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung

$$y' = 0$$

besitzt genau die konstanten Lösungen

$$y(t) = c \text{ mit } c \in \mathbb{R}\,.$$

Dies folgt direkt aus Lemma 24.6, aber auch aus Satz 29.2.

Beispiel 29.4. Die homogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung

$$y' = y$$

besitzt genau die Lösungen

$$y(t) = ce^t \text{ mit } c \in \mathbb{R}\,.$$

Beispiel 29.5. Sei $a \in \mathbb{R}$. Die homogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung

$$y' = ay$$

besitzt nach Satz 29.2 die Lösungen

$$y(t) = ce^{at} \text{ mit } c \in \mathbb{R}\,.$$

In den bisherigen Beispielen war die Funktion $g(t)$ konstant, und es war besonders einfach, die Lösungen anzugeben. Man spricht von einer *homogenen linearen gewöhnlichen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten.* Die folgenden Beispiele besitzen keine konstanten Koeffizienten, sondern variable Koeffizienten. Diese Differentialgleichungen sind sowohl orts- als auch zeitabhängig.

Beispiel 29.6. Wir betrachten die homogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung

$$y' = \frac{y}{t}\,.$$

Eine Stammfunktion zu $g(t) = \frac{1}{t}$ ist der natürliche Logarithmus. Die Lösungen dieser Differentialgleichung sind daher nach Satz 29.2 gleich

$$c \cdot \exp(\ln t) = ct$$

mit $c \in \mathbb{R}$.

Beispiel 29.7. Wir betrachten die homogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung $(t > 1)$

$$y' = \frac{y}{t^2 - 1}\,.$$

Um die Lösungen zu bestimmen brauchen wir eine Stammfunktion zu

$$g(t) = \frac{1}{t^2-1} = \frac{1}{(t-1)(t+1)} = \frac{1/2}{t-1} - \frac{1/2}{t+1}.$$

Aus der Partialbruchzerlegung gelangt man zur Stammfunktion

$$G(t) = \frac{1}{2}\ln(t-1) - \frac{1}{2}\ln(t+1)\,.$$

Daher sind die Lösungen gleich

$$c \cdot \exp left(\frac{1}{2} \ln (t-1) - \frac{1}{2} \ln (t+1) right) = c \cdot \frac{\sqrt{t-1}}{\sqrt{t+1}} .$$

Beispiel 29.8. Wir betrachten die homogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung

$$y' = \frac{y}{t^2+1} .$$

Um die Lösungen zu bestimmen brauchen wir eine Stammfunktion zu

$$g(t) \;=\; \frac{1}{t^2+1},$$

eine solche ist durch

$$G(t) = \text{ arctan } t$$

gegeben. Daher sind die Lösungen gleich

$$c \cdot \exp (\text{ arctan } t) .$$

29.2. **Inhomogene lineare gewöhnliche Differentialgleichungen.**

Es gibt homogene lineare Gleichungsysteme, bei denen es darum geht, den Kern einer linearen Abbildung zu bestimmen, und es gibt inhomogene lineare Gleichungssysteme, wo man das Urbild zu einem Vektor (Störvektor) unter einer linearen Abbildung bestimmen soll. Auch zu den linearen Differentialgleichungen gibt es eine inhomogene Variante, bei der eine *Störfunktion* die Sache verkompliziert. Wie bei linearen Gleichungssystemen ist es auch hier wichtig, zuerst die zugehörige homogene Gleichung zu lösen.

Definition 29.9. Eine Differentialgleichung der Form

$$y' = g(t)y + h(t)$$

mit zwei auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ definierten Funktionen $t \mapsto g(t)$ und $t \mapsto h(t)$ heißt *inhomogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung.*

Die folgende Aussage zeigt, dass solche Differentialgleichungen durch Integration gelöst werden können.

Satz 29.10. *Es sei*

$$y' = g(t)y + h(t)$$

eine inhomogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung mit stetigen Funktionen $g, h : I \to \mathbb{R}$. Es sei G eine Stammfunktion von g und es sei

$$a(t) = \exp (G(t))$$

eine Lösung der zugehörigen homogenen linearen Differentialgleichung. Dann sind die Lösungen (auf I) der inhomogenen Differentialgleichung genau die Funktionen

$$y(t) = c(t)a(t) ,$$

wobei $c(t)$ eine Stammfunktion zu $\frac{h(t)}{a(t)}$ ist. Das Anfangswertproblem

$$y' = g(t)y + h(t) \text{ und } y(t_0) = y_0$$

(mit $t_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}$) besitzt eine eindeutige Lösung.

Beweis. Da $a(t)$ keine Nullstelle besitzt, kann man jede (differenzierbare) Funktion

$$y : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

als

$$y(t) = c(t)a(t)$$

mit einer unbekannten (differenzierbaren) Funktion $c(t)$ ansetzen. Dabei ist (für eine differenzierbare Funktion y)

$$y'(t) = c'(t)a(t) + c(t)a'(t)\,.$$

Daher kann man die Lösungsbedingung

$$y'(t) = g(t)y(t) + h(t)$$

als

$$c'(t)a(t) + c(t)a'(t) = g(t)c(t)a(t) + h(t)$$

schreiben, und diese gilt wegen $a'(t) = g(t)a(t)$ genau dann, wenn

$$c'(t)a(t) = h(t)$$

bzw.

$$c'(t) = \frac{h(t)}{a(t)}$$

gilt. D.h. $c(t)$ muss eine Stammfunktion zu $\frac{h(t)}{a(t)}$ sein. Es sei nun noch die Anfangsbedingung $y(t_0) = y_0$ vorgegeben. Mit c ist auch $c(t) + c_0$ für jedes $c_0 \in \mathbb{R}$ eine Stammfunktion zu $\frac{h(t)}{a(t)}$. Die Bedingung

$$y_0 = (c(t_0) + c_0)a(t_0)$$

legt dann c_0 eindeutig fest. $\square$

Die in diesem Satz verwendete Methode heißt *Variation der Konstanten.* Man ersetzt dabei die Lösungsfunktionen der zugehörigen homogenen Gleichung, also $ca(t)$ mit konstantem $c \in \mathbb{R}$, durch eine variable Funktion $c(t)$.

Beispiel 29.11. Wir betrachten die inhomogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung

$$y' = ay + b$$

mit Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$. Die Funktion $z(t) = e^{at}$ ist eine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung. Nach Satz 29.10 müssen wir daher eine Stammfunktion zu be^{-at} bestimmen. Diese sind durch $-\frac{b}{a}e^{-at} + c$ gegeben. Also haben die Lösungen der inhomogenen Differentialgleichung die Form

$$\left(-\frac{b}{a}e^{-at} + c\right) \cdot e^{at} \;=\; c \cdot e^{at} - \frac{b}{a}.$$

Lieber den Kaffee trinken, bevor er gemäß einer inhomogenen linearen gewöhnlichen Differentialgleichung die Außentemperatur angenommen hat.

Eine solche Differentialgleichung tritt bei Abkühlungsprozessen auf. Wenn ein (heißer) Körper (beispielsweise eine Tasse Kaffee) sich in einem umgebenden Medium (beispielsweise in einem Straßencafé) mit konstanter Temperatur A befindet, so wird die Temperaturentwicklung $y(t)$ des Körpers nach dem Newtonschen Abkühlungsgesetz durch die Differentialgleichung

$$y'(t) = -d(y(t) - A)$$

beschrieben. Dieses Gesetz besagt, dass die Abkühlung proportional zur Differenz zwischen Außentemperatur und Körpertemperatur ist (der Proportionalitätsfaktor $d > 0$ hängt vom Körper ab). Die Lösungen sind

$$y(t) = ce^{-dt} + A\,.$$

Dabei ist das c durch eine Anfangsbedingung bestimmt, also typischerweise durch die Anfangstemperatur des Körpers zum Zeitpunkt 0. Für $t \to +\infty$ nimmt der Körper die Außentemperatur A an.

Beispiel 29.12. Wir betrachten die inhomogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung

$$y' = y + t^2$$

mit der Anfangsbedingung $y(3) = 4$. Die Exponentialfunktion $a(t) = e^t$ ist eine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung. Nach Satz 29.10 müssen wir daher eine Stammfunktion zu

$$\frac{t^2}{e^t} \,=\, t^2 \cdot e^{-t}$$

finden. Mit zweifacher partieller Integration findet man die Stammfunktion

$$(-t^2 - 2t - 2)e^{-t}\,.$$

Also haben die Lösungen der inhomogenen Differentialgleichung die Form

$$e^t((-t^2 - 2t - 2)e^{-t} + c) \,=\, -t^2 - 2t - 2 + ce^t.$$

Wenn wir noch die Anfangsbedingung $y(3) = 4$ berücksichtigen, so ergibt sich die Bedingung

$$-9 - 6 - 2 + ce^3 \,=\, -17 + ce^3 \,=\, 4,$$

also $c = \frac{21}{e^3}$. Die Lösung des Anfangswertproblems ist also

$$y(t) = -t^2 - 2t - 2 + \frac{21}{e^3} e^t \,.$$

Beispiel 29.13. Wir betrachten für $t > 1$ die inhomogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung

$$y' = \frac{y}{t^2 - 1} + t - 1$$

mit der Anfangsbedingung $y(2) = 5$. Hier ist also $h(t) = t - 1$ die Störfunktion und

$$y' = \frac{y}{t^2 - 1}$$

ist die zugehörige homogene lineare Differentialgleichung. Eine Stammfunktion von $\frac{1}{t^2-1}$ ist

$$G(t) \;=\; \frac{1}{2} \ln (t-1) - \frac{1}{2} \ln (t+1) \;=\; \frac{1}{2} \ln \left(\frac{t-1}{t+1} \right) \;=\; \ln \left(\frac{\sqrt{t-1}}{\sqrt{t+1}} \right).$$

Daher ist nach Satz 29.2 (bzw. nach Beispiel 29.7)

$$a(t) = \frac{\sqrt{t-1}}{\sqrt{t+1}}$$

eine Lösung zur homogenen Differentialgleichung. Zur Lösung der inhomogenen Differentialgleichung brauchen wir eine Stammfunktion zu

$$\frac{h(t)}{a(t)} \;=\; \frac{\sqrt{t+1}}{\sqrt{t-1}} \cdot (t-1) \;=\; \sqrt{t+1} \cdot \sqrt{t-1} \;=\; \sqrt{t^2-1}.$$

Eine Stammfunktion dazu ist

$$c(t) = \frac{1}{2} (t\sqrt{t^2-1} - \operatorname{arcosh} t \,) \,.$$

Die Lösungen der inhomogenen Differentialgleichung haben also die Gestalt

$$\sqrt{\frac{t-1}{t+1}} \cdot \left(\frac{1}{2} (t\sqrt{t^2-1} - \operatorname{arcosh} t \,) + c \right)$$

Die Anfangsbedingung führt zu

$$5 \;=\; \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \left(\frac{1}{2} (2\sqrt{3} - \operatorname{arcosh} 2 \,) + c_0 \right) \;=\; 1 - \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arcosh} 2 \,+ c_0 \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Also ist

$$c_0 \;=\; 4\sqrt{3} + \frac{1}{2} \operatorname{arcosh} 2$$

und die Lösung des Anfangswertproblems ist

$$\begin{aligned} & y(t) \\ = \; & \sqrt{\frac{t-1}{t+1}} \cdot \left(\frac{1}{2} (t\sqrt{t^2-1} - \operatorname{arcosh} t \,) + 4\sqrt{3} + \frac{1}{2} \operatorname{arcosh} 2 \right). \end{aligned}$$

30. Vorlesung

30.1. **Gewöhnliche Differentialgleichungen mit getrennten Variablen.**

Definition 30.1. Eine Differentialgleichung der Form

$$y' = g(t) \cdot h(y)$$

mit zwei Funktionen (dabei sind I und J reelle Intervalle)

$$g : I \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto g(t),$$

und

$$h : J \longrightarrow \mathbb{R},\ y \longmapsto h(y),$$

heißt *gewöhnliche Differentialgleichung mit getrennten Variablen.*

Eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen ist auf der Produktmenge $U = I \times J$ definiert. Eine homogene lineare Differentialgleichung besitzt offenbar getrennte Variablen (mit $h(y) = y$), dagegen besitzt eine inhomogene lineare Differentialgleichung im Allgemeinen keine getrennten Variablen. Die Differentialgleichungen mit getrennten Variablen lassen sich durch Integrieren lösen. Wenn $h(y_0) = 0$ ist, so bestätigt man direkt die konstante Lösung $y(t) = y_0$. Daher beschränken wir uns im Folgenden auf die Situation, dass h keine Nullstelle besitzt.

Satz 30.2. *Es sei*

$$y' = g(t) \cdot h(y)$$

eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen mit zwei stetigen Funktionen

$$g : I \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto g(t),$$

und

$$h : J \longrightarrow \mathbb{R},\ y \longmapsto h(y),$$

wobei h keine Nullstelle besitze. Es sei G eine Stammfunktion von g und H eine Stammfunktion von $\frac{1}{h}$. Weiter sei $I' \subseteq I$ ein Teilintervall mit $G(I') \subseteq H(J)$. Dann ist H eine bijektive Funktion und die Lösungen dieser Differentialgleichung haben die Form

$$y(t) = H^{-1}(G(t)) \,.$$

Wenn zusätzlich die Anfangsbedingung

$$y(t_0) = y_0 \text{ mit } (t_0, y_0) \in I \times J$$

gegeben ist, und wenn die Stammfunktionen die zusätzlichen Eigenschaften $G(t_0) = 0$ und $H(y_0) = 0$ erfüllen, so ist

$$y(t) = H^{-1}(G(t))$$

die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems.

Beweis. Da h stetig ist und keine Nullstelle besitzt, ist h bzw. $\frac{1}{h}$ entweder stets positiv oder stets negativ, so dass H streng monoton und daher injektiv (also bijektiv auf sein Bild) ist. Sei $y(t) = H^{-1}(G(t))$ wie angegeben. Dann ist

$$\begin{aligned} y'(t) &= \frac{G'(t)}{H'(H^{-1}(G(t)))} \\ &= \frac{g(t)}{1/h(H^{-1}(G(t)))} \\ &= g(t) \cdot h(H^{-1}(G(t))) \\ &= g(t) \cdot h(y(t)), \end{aligned}$$

so dass in der Tat eine Lösung vorliegt. Es sei nun $y(t)$ eine differenzierbare Funktion, die die Differentialgleichung erfüllt. Daraus folgt

$$\int_{t_1}^{t_2} g(t)\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{y'(t)}{h(y(t))}\, dt = \int_{y(t_1)}^{y(t_2)} \frac{1}{h(z)}\, dz,$$

wobei wir die Substitution $z = y(t)$ angewendet haben. Für die zugehörigen Stammfunktionen (mit den unteren Integralgrenzen t_1 bzw. $y(t_1)$) bedeutet dies $G(t) = H(y(t))$, also ist $y(t) = H^{-1}(G(t))$. Um die Anfangsbedingung zu erfüllen muss man t_0 bzw. y_0 als untere Integralgrenze wählen. Wir zeigen, dass dies die einzige Lösung ist. Seien also H und $\tilde{H}$ zwei Stammfunktionen zu $\frac{1}{h}$ und G und $\tilde{G}$ zwei Stammfunktionen zu g derart, dass sowohl $y(t) = H^{-1}(G(t))$ als auch $\tilde{y}(t) = \tilde{H}^{-1}(\tilde{G}(t))$ die Anfangsbedingung erfüllen. D.h. die beiden Funktionen stimmen zum Zeitpunkt t_0 überein. Da sich Stammfunktionen nur um eine Konstante unterscheiden, können wir $\tilde{H} = H + c$ und $\tilde{G} = G + d$ mit zwei Konstanten $c, d \in \mathbb{R}$ ansetzen. Es gilt also einerseits $H(y(t)) = G(t)$ und andererseits $H(\tilde{y}(t)) + c = \tilde{H}(\tilde{y}(t)) = \tilde{G}(t) = G(t) + d$, so dass $H(\tilde{y}(t)) - H(y(t)) = d - c$ gilt, woraus wegen $\tilde{y}(t_0) = y(t_0)$ sofort $c = d$ folgt. Also ist $H(\tilde{y}(t)) = G(t) = H(y(t))$ und somit wegen der Injektivität von H auch $\tilde{y}(t) = y(t)$ für alle t. □

Durch einen Übergang von G nach $G + c$ mit einer geeigneten Konstanten c kann man erreichen, dass es ein (echtes) Intervall I' gibt mit $G(I') \subseteq H(J)$. Sowohl orts- als auch zeitunabhängige Differentialgleichungen kann man als Differentialgleichung mit getrennten Variablen auffassen. Für zeitunabhängige Differentialgleichungen erhält man den folgenden Lösungsansatz.

Korollar 30.3. *Es sei*

$$y' = h(y)$$

eine zeitunabhängige Differentialgleichung mit einer stetigen Funktion

$$h : J \longrightarrow \mathbb{R},\ y \longmapsto h(y),$$

ohne Nullstelle. Es sei H eine Stammfunktion von $\frac{1}{h}$ mit der Umkehrfunktion

$$H^{-1} : J' \longrightarrow J.$$

Dann sind die Funktionen

$$y(t) = H^{-1}(t+c) \text{ mit } c \in \mathbb{R}$$

die Lösungen dieser Differentialgleichung auf dem Intervall[30] $H(J) - c$.

Beweis. Dies folgt direkt aus Satz 30.2. □

Korollar 30.4. *Eine Differentialgleichung der Form*

$$y' = g(t) \cdot y^2$$

mit $y > 0$ *und einer stetigen Funktion*

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto g(t),$$

besitzt auf $I' \subseteq \mathbb{R}$ *die Lösungen*

$$y(t) = -\frac{1}{G(t)},$$

wobei G *eine Stammfunktion zu* g *mit* $G(I') \subseteq \mathbb{R}_+$ *sei.*

Beweis. Siehe Aufgabe 30.11. □

Beispiel 30.5. Wir betrachten die zeitunabhängige Differentialgleichung

$$y' = \sin y$$

für $y \in J =]0, \pi[$. Nach Korollar 30.3 müssen wir also $\frac{1}{\sin y}$ integrieren, eine Stammfunktion dazu ist nach Beispiel 35.5 (Mathematik (Osnabrück 2009-2011)) die Funktion

$$H : J \longrightarrow J' = \mathbb{R},\ y \longmapsto H(y) = \ln\left(\tan\frac{y}{2}\right).$$

Die Umkehrfunktion H^{-1} berechnet sich über $u = \ln\left(\tan\frac{y}{2}\right)$ zu

$$H^{-1}(y) = 2\arctan\left(e^u\right).$$

Also haben die Lösungskurven die Gestalt

$$y(t) = 2\arctan\left(e^{t+c}\right)$$

mit einem $c \in \mathbb{R}$.

Beispiel 30.6. Wir betrachten die zeitunabhängige Differentialgleichung

$$y' = \frac{1}{y}$$

für $y > 0$. Es ist also $h(y) = \frac{1}{y}$ und damit müssen wir nach Korollar 30.3 y integrieren, eine Stammfunktion dazu ist

$$H(y) = \frac{1}{2}y^2.$$

[30] Mit $I+c$ ist das um c verschobene Intervall gemeint. Es ist also $I+c = \{x \in \mathbb{R} \mid x-c \in I\}$. Bei $I = [a,b]$ ist also $I+c = [a+c, b+c]$, bei $I = \mathbb{R}$ ist $\mathbb{R}+c = \mathbb{R}$.

Die Umkehrfunktion berechnet sich aus dem Ansatz $z = \frac{1}{2}y^2$ zu $y = \sqrt{2z} = H^{-1}(z)$. Also haben die Lösungskurven die Gestalt

$$y(t) = \sqrt{2(t+c)}$$

mit $c \in \mathbb{R}$.

Beispiel 30.7. Wir betrachten die Differentialgleichung mit getrennten Variablen

$$y' = t \cdot y^3$$

für $y > 0$. Eine Stammfunktion zu $\frac{1}{y^3}$ ist $H(y) = -\frac{1}{2}y^{-2} = z$ (z ist also negativ) mit der Umkehrfunktion

$$y = H^{-1}(z) = \sqrt{-\frac{1}{2}z^{-1}}\,.$$

Die Stammfunktionen zu $g(t) = t$ sind $\frac{1}{2}t^2 + c$. Daher sind die Lösungen der Differentialgleichung von der Form

$$y(t) \;=\; \sqrt{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}t^2 + c\right)^{-1}} \;=\; \sqrt{\frac{-1}{t^2 + 2c}}.$$

Hierbei muss c negativ gewählt werden, damit diese Lösung einen nichtleeren Definitionsbereich besitzt. Der Definitionsbereich ist dann das Intervall $]-\sqrt{-2c}, \sqrt{-2c}[$. Insbesondere sind die Lösungen nur auf einem beschränkten offenen Intervall definiert. An den Intervallgrenzen strebt $y(t)$ gegen $+\infty$, d.h. die Lösung „entweicht“.

Beispiel 30.8. Wir betrachten die Differentialgleichung mit getrennten Variablen

$$y' = -t \cdot y^3$$

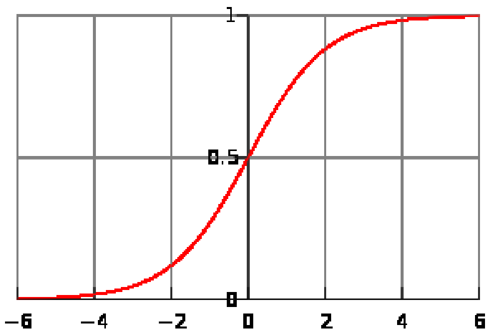
für $y > 0$. Eine Stammfunktion zu $\frac{1}{y^3}$ ist $H(y) = -\frac{1}{2}y^{-2} = z$ (z ist also negativ) mit der Umkehrfunktion

$$y = H^{-1}(z) = \sqrt{-\frac{1}{2}z^{-1}}\,.$$

Die Stammfunktionen zu $g(t) = -t$ sind $-\frac{1}{2}t^2 + c$. Daher sind die Lösungen der Differentialgleichung von der Form

$$y(t) \;=\; \sqrt{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}t^2 + c\right)^{-1}} \;=\; \sqrt{\frac{1}{t^2 - 2c}}.$$

Insbesondere erhält man bei $c = 0$ die auf $\mathbb{R}_+$ definierte Lösung $g(t) = \frac{1}{t}$.



Eine logistische Funktion

Beispiel 30.9. Es sei $p(t)$ die Größe einer Population zu einem Zeitpunkt t. Wie setzen voraus, dass die Populationsentwicklung differenzierbar ist; die Ableitung $p'(t)$ repräsentiert dann das (infinitesimale) Bevölkerungswachstum zum Zeitpunkt t. Den Quotienten

$$r(t) = \frac{p'(t)}{p(t)}$$

nennt man die *Wachstumsrate* zum Zeitpunkt t. Wir fragen uns, inwiefern man den Populationsverlauf aus der Wachstumsrate rekonstruieren kann. Die Wachstumsrate kann von der Zeit (Jahreszeit, Nahrungsvorkommen, Entwicklung von anderen Populationen etc.) abhängen, aber auch von der aktuellen Populationsgröße p. Die Zeitabhängigkeit der Wachstumsrate beruht auf äußeren Einflüssen, während die Abhängigkeit von der aktuellen Populationsgröße eine innere Dynamik ausdrückt. Sie beruht darauf, dass eine große Population sich hemmend auf die Fortpflanzung auswirkt.

Wir beschränken uns auf eine Situation, wo die Wachstumsrate nur von der Populationsgröße abhängt, nicht aber von sonstigen Einflüssen. Dann wird die Wachstumsrate durch eine Funktion $w(p)$ beschrieben, und die Wachstumsrate zum Zeitpunkt t ist demnach durch $r(t) = w(p(t))$ gegeben. Die Wachstumsrate wirkt sich aber natürlich auf die Populationsentwicklung aus. Gemäß des oben formulierten Zusammenhanges gilt

$$p'(t) = p(t) \cdot r(t) = p(t) \cdot w(p(t))\,.$$

Es liegt also eine Differentialgleichung der Form

$$p' = p \cdot w(p)$$

vor, die zeitunabhängig ist, so dass insbesondere getrennte Variablen vorliegen (mit der Funktion $h(p) = p \cdot w(p)$). Bei *konstanter Wachstumsrate* $w(p) = a$ liegt die Differentialgleichung $p' = ap$ vor, deren Lösungen die Funktionen ce^{at} sind. Das bedeutet *exponentielles Wachstum*. Wenn wir die Wachstumsrate so ansetzen, dass es bei einer gewissen Populationsgröße g kein Wachstum mehr gibt, und bei sehr kleiner Bevölkerung die Wachstumsrate maximal gleich s ist, und dazwischen die Wachstumsrate linear von p

abhängt, so erhält man die Wachstumsrate

$$w(p) = s\left(1 - \frac{1}{g}p\right)$$

und die Differentialgleichung

$$p' = sp\left(1 - \frac{1}{g}p\right) = sp - \frac{s}{g}p^2.$$

Eine solche Differentialgleichung nennt man *logistische Differentialgleichung*. Gemäß dem Lösungsansatz für Differentialgleichungen mit getrennten Variablen müssen wir eine Stammfunktion zu

$$\begin{aligned} \frac{1}{sp\left(1 - \frac{1}{g}p\right)} &= \frac{g}{s} \cdot \frac{1}{p(g-p)} \\ &= \frac{1}{s}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{g-p}\right) \end{aligned}$$

finden. Eine solche Stammfunktion ist

$$H(p) = \frac{1}{s}(\ln p - \ln(g-p)) = \frac{1}{s} \ln \frac{p}{g-p}.$$

Zur Berechnung der Umkehrfunktion H^{-1} lösen wir die Gleichung

$$u = \frac{1}{s} \ln \frac{p}{g-p}$$

nach p auf. Es ergibt sich

$$\exp(su) = \frac{p}{g-p}$$

und daraus

$$g \cdot \exp(su) = p + p \cdot \exp(su)$$

und damit

$$p = \frac{g \cdot \exp(su)}{1 + \exp(su)} = \frac{g}{1 + \exp(-su)}.$$

Da die Differentialgleichung zeitunabhängig ist, ist

$$p(t) = \frac{g}{1 + \exp(-st)}$$

eine Lösung. Bei $t = 0$ ist $p(0) = \frac{g}{2}$, für $t \to +\infty$ strebt die Lösung gegen g (die Grenzbevölkerung) und für $t \to -\infty$ gegen 0.

Arbeitsblätter

1. Arbeitsblatt

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 1.1. Es seien A, B und C drei Mengen. Man beweise die folgenden Identitäten.

(1) $A \cap \emptyset = \emptyset$,
(2) $A \cup \emptyset = A$,
(3) $A \cap B = B \cap A$,
(4) $A \cup B = B \cup A$,
(5) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$,
(6) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$,
(7) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,
(8) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,
(9) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

Aufgabe 1.2. Beweise die mengentheoretischen Fassungen einiger aristotelischer Syllogismen. Dabei bezeichnen A, B, C Mengen.

(1) Modus Barbara: Aus $B \subseteq A$ und $C \subseteq B$ folgt $C \subseteq A$.
(2) Modus Celarent: Aus $B \cap A = \emptyset$ und $C \subseteq B$ folgt $C \cap A = \emptyset$.
(3) Modus Darii: Aus $B \subseteq A$ und $C \cap B \neq \emptyset$ folgt $C \cap A \neq \emptyset$.
(4) Modus Ferio: Aus $B \cap A = \emptyset$ und $C \cap B \neq \emptyset$ folgt $C \not\subseteq A$.
(5) Modus Baroco: Aus $B \subseteq A$ und $B \not\subseteq C$ folgt $A \not\subseteq C$.

Aufgabe 1.3. Beweise durch Induktion die folgenden Formeln.

(1)
$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \, ,$$

(2)
$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \, ,$$

(3)
$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 .$$

Aufgabe 1.4. Zeige, dass mit der einzigen Ausnahme $n = 3$ die Beziehung

$$2^n \geq n^2$$

gilt.

Aufgabe 1.5.*

Zeige durch vollständige Induktion, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Zahl

$$6^{n+2} + 7^{2n+1}$$

ein Vielfaches von 43 ist.

Aufgabe 1.6. Beweise durch Induktion die Abschätzung

$$1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdots n^n \leq n^{\frac{n(n+1)}{2}} .$$

Aufgabe 1.7.*

Beweise durch Induktion für alle $n \in \mathbb{N}_+$ die Formel

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} k^2 = (-1)^{n+1} \frac{n(n+1)}{2} .$$

Aufgabe 1.8. Die Städte $S_1, \ldots, S_n$ seien untereinander durch Straßen verbunden und zwischen zwei Städten gibt es immer genau eine Straße. Wegen Bauarbeiten sind zur Zeit alle Straßen nur in einer Richtung befahrbar. Zeige, dass es trotzdem mindestens eine Stadt gibt, von der aus alle anderen Städte erreichbar sind.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 1.9. (4 Punkte)

Es seien A und B zwei Mengen. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(1) $A \subseteq B$,
(2) $A \cap B = A$,
(3) $A \cup B = B$,
(4) $A \setminus B = \emptyset$,
(5) Es gibt eine Menge C mit $B = A \cup C$,
(6) Es gibt eine Menge D mit $A = B \cap D$.

Aufgabe 1.10. (3 Punkte)

Beweise durch Induktion, dass die Summe von aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen (beginnend bei 1) stets eine Quadratzahl ist.

Aufgabe 1.11. (3 Punkte)

Sei $m \in \mathbb{N}$. Zeige durch Induktion die Gleichheit

$$(2m+1)\prod_{i=1}^{m}(2i-1)^2 = \prod_{k=1}^{m}(4k^2-1)\,.$$

Aufgabe 1.12. (4 Punkte)

Eine n-Schokolade ist ein rechteckiges Raster, das durch $a-1$ Längsrillen und $b-1$ Querrillen in $n = a \cdot b$ $(a, b \in \mathbb{N}_+)$ mundgerechte kleinere Rechtecke eingeteilt ist. Ein Teilungsschritt an einer Schokolade ist das vollständige Durchtrennen einer Schokolade längs einer Längs- oder Querrille. Eine vollständige Aufteilung einer Schokolade ist eine Folge von Teilungsschritten (an der Ausgangsschokolade oder an einer zuvor erhaltenen Zwischenschokolade), deren Endprodukt aus den einzelnen Mundgerechtecken besteht. Zeige durch Induktion, dass jede vollständige Aufteilung einer n-Schokolade aus genau $n-1$ Teilungsschritten besteht.

2. Arbeitsblatt

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 2.1. Es seien x, y, z, w Elemente in einem Körper, wobei z und w nicht null seien. Beweise die folgenden Bruchrechenregeln.

(1)
$$\frac{x}{1} = x\,,$$

(2)
$$\frac{1}{-1} = -1\,,$$

(3)
$$\frac{0}{z} = 0\,,$$

(4)
$$\frac{z}{z} = 1\,,$$

(5)
$$\frac{x}{z} = \frac{xw}{zw}\,,$$

(6)
$$\frac{x}{z} \cdot \frac{y}{w} = \frac{xy}{zw},$$
(7)
$$\frac{x}{z} + \frac{y}{w} = \frac{xw + yz}{zw}.$$

Gilt die zu (7) analoge Formel, die entsteht, wenn man Addition mit Multiplikation (und Subtraktion mit Division) vertauscht, also
$$(x - z) \cdot (y - w) = (x + w) \cdot (y + z) - (z + w)\,?$$
Zeige, dass die „beliebte Formel"
$$\frac{x}{z} + \frac{y}{w} = \frac{x + y}{z + w}$$
nicht gilt.

Aufgabe 2.2.*
Bestimme, welche der beiden rationalen Zahlen p und q größer ist:
$$p = \frac{573}{-1234} \text{ und } q = \frac{-2007}{4322}.$$

Aufgabe 2.3.*
a) Man gebe ein Beispiel für rationale Zahlen $a, b, c \in]0, 1[$ mit
$$a^2 + b^2 = c^2.$$

b) Man gebe ein Beispiel für rationale Zahlen $a, b, c \in]0, 1[$ mit
$$a^2 + b^2 \neq c^2.$$

c) Man gebe ein Beispiel für irrationale Zahlen $a, b \in]0, 1[$ und eine rationale Zahl $c \in]0, 1[$ mit
$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Die folgende Aufgabe soll allein unter Bezug auf die Anordnungsaxiome der reellen Zahlen gezeigt werden.

Aufgabe 2.4. Zeige, dass für reelle Zahlen die folgenden Eigenschaften gelten.

(1) $1 > 0$.
(2) Aus $a \geq b$ und $c \geq 0$ folgt $ac \geq bc$.
(3) Aus $a \geq b$ und $c \leq 0$ folgt $ac \leq bc$.
(4) Es ist $a^2 \geq 0$.
(5) Aus $a \geq b \geq 0$ folgt $a^n \geq b^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
(6) Aus $a \geq 1$ folgt $a^n \geq a^m$ für ganze Zahlen $n \geq m$.

(7) Aus $a > 0$ folgt $\frac{1}{a} > 0$.
(8) Aus $a > b > 0$ folgt $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

Aufgabe 2.5.*
Zeige, dass für reelle Zahlen $x \geq 3$ die Beziehung

$$x^2 + (x+1)^2 \geq (x+2)^2$$

gilt.

Aufgabe 2.6. Es seien $x < y$ reelle Zahlen. Zeige, dass für das arithmetische Mittel $\frac{x+y}{2}$ die Beziehung

$$x < \frac{x+y}{2} < y$$

gilt.

Aufgabe 2.7. Beweise die folgenden Eigenschaften für die Betragsfunktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto |x|\,,$$

(dabei seien x, y beliebige reelle Zahlen).

(1) $|x| \geq 0$.
(2) $|x| = 0$ genau dann, wenn $x = 0$ ist.
(3) $|x| = |y|$ genau dann, wenn $x = y$ oder $x = -y$ ist.
(4) $|y - x| = |x - y|$.
(5) $|xy| = |x|\,|y|$.
(6) Für $x \neq 0$ ist $|x^{-1}| = |x|^{-1}$.
(7) Es ist $|x + y| \leq |x| + |y|$ (*Dreiecksungleichung für den Betrag*).

Aufgabe 2.8. Skizziere die folgenden Teilmengen im $\mathbb{R}^2$.

(1) $\{(x, y) | \, x = 5\}$,
(2) $\{(x, y) | \, x \geq 4 \text{ und } y = 3\}$,
(3) $\{(x, y) | \, y^2 \geq 2\}$,
(4) $\{(x, y) | \, |x| = 3 \text{ und } |y| \leq 2\}$,
(5) $\{(x, y) | \, 3x \geq y \text{ und } 5x \leq 2y\}$,
(6) $\{(x, y) | \, xy = 0\}$,
(7) $\{(x, y) | \, xy = 1\}$,
(8) $\{(x, y) | \, xy \geq 1 \text{ und } y \geq x^3\}$,
(9) $\{(x, y) | \, 0 = 0\}$,
(10) $\{(x, y) | \, 0 = 1\}$.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 2.9. (2 Punkte)

Es seien $x_1, \ldots, x_n$ reelle Zahlen. Zeige durch Induktion die Abschätzung

$$\left| \sum_{i=1}^{n} x_i \right| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| \ .$$

Aufgabe 2.10. (5 Punkte)

Beweise das allgemeine Distributivgesetz für einen Körper.

Aufgabe 2.11. (3 Punkte)

Skizziere die folgenden Teilmengen im $\mathbb{R}^2$.

(1) $\{(x, y) | \, x + y = 3\}$,
(2) $\{(x, y) | \, x + y \leq 3\}$,
(3) $\{(x, y) | \, (x + y)^2 \geq 4\}$,
(4) $\{(x, y) | \, |x + 2| \geq 5 \text{ und } |y - 2| \leq 3\}$,
(5) $\{(x, y) | \, |x| = 0 \text{ und } |y^4 - 2y^3 + 7y - 5| \geq -1\}$,
(6) $\{(x, y) | \, -1 \leq x \leq 3 \text{ und } 0 \leq y \leq x^3\}$.

Aufgabe 2.12. (5 Punkte)

Aus einem Taschenbuch wurde ein Blatt herausgerissen. Die verbliebenen Seitenzahlen addieren sich zu 65000. Wie viele Seiten hatte das Buch?

Hinweis: Zeige, dass es nicht das letzte Blatt sein kann. Aus den beiden Aussagen „Es fehlt ein Blatt“ und „Das letzte Blatt fehlt nicht“ lassen sich zwei Ungleichungen aufstellen, die (sinnvolle) obere und untere Abschätzungen für die Anzahl der Seiten liefern.

3. Arbeitsblatt

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 3.1. Zeige, dass die Binomialkoeffizienten die rekursive Bedingung

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

erfüllen.

Aufgabe 3.2. Zeige, dass die Binomialkoeffizienten natürliche Zahlen sind.

Aufgabe 3.3. Beweise die Formel

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.$$

Aufgabe 3.4. Beweise durch Induktion, dass für $n \geq 10$ die Abschätzung

$$3^n \geq n^4$$

gilt.

Bei den Rechenaufgaben zu den komplexen Zahlen muss das Ergebnis immer in der Form $a + bi$ mit reellen Zahlen a, b angegeben werden, wobei diese so einfach wie möglich sein sollen.

Aufgabe 3.5. Berechne die folgenden Ausdrücke innerhalb der komplexen Zahlen.

(1) $(5 + 4i)(3 - 2i)$.
(2) $(2 + 3i)(2 - 4i) + 3(1 - i)$.
(3) $(2i + 3)^2$.
(4) i^{1011}.
(5) $(-2 + 5i)^{-1}$.
(6) $\frac{4-3i}{2+i}$.

Aufgabe 3.6. Zeige, dass die komplexen Zahlen einen Körper bilden.

Aufgabe 3.7. Beweise die folgenden Aussagen zu Real- und Imaginärteil von komplexen Zahlen.

(1) $z = \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z)i$.
(2) $\operatorname{Re}(z + w) = \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Re}(w)$.
(3) $\operatorname{Im}(z + w) = \operatorname{Im}(z) + \operatorname{Im}(w)$.
(4) Für $r \in \mathbb{R}$ ist

$$\operatorname{Re}(rz) = r \operatorname{Re}(z) \text{ und } \operatorname{Im}(rz) = r \operatorname{Im}(z).$$

(5) $z = \operatorname{Re}(z)$ genau dann, wenn $z \in \mathbb{R}$ ist, und dies ist genau dann der Fall, wenn $\operatorname{Im}(z) = 0$ ist.

Aufgabe 3.8. Zeige, dass innerhalb der komplexen Zahlen folgende Rechenregeln gelten.

(1) $|z| = \sqrt{z\,\overline{z}}$.

(2) $\mathrm{Re}\,(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}$.
(3) $\mathrm{Im}\,(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i}$.
(4) $\overline{z} = \mathrm{Re}\,(z) - i\,\mathrm{Im}\,(z)$.
(5) Für $z \neq 0$ ist $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$.

Aufgabe 3.9. Zeige die folgenden Regeln für den Betrag von komplexen Zahlen.

(1) Für reelles z stimmen reeller und komplexer Betrag überein.
(2) Es ist $|z| = 0$ genau dann, wenn $z = 0$ ist.
(3) $|z| = |\overline{z}|$.
(4) $|zw| = |z|\,|w|$.
(5) $\mathrm{Re}\,(z), \mathrm{Im}\,(z) \leq |z|$.
(6) Für $z \neq 0$ ist $|1/z| = 1/\,|z|$.

Aufgabe 3.10. Bestätige die in Beispiel 3.15 angegebene Formel für die Quadratwurzel einer komplexen Zahl $z = a + bi$ im Fall $b < 0$.

Aufgabe 3.11. Man bestimme die zwei komplexen Lösungen der Gleichung

$$z^2 + 5iz - 3 = 0\,.$$

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 3.12. (3 Punkte)

Beweise die Formel

$$n2^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}\,.$$

Aufgabe 3.13. (3 Punkte)

Berechne die komplexen Zahlen

$$(1+i)^n$$

für $n = 1, 2, 3, 4, 5$.

Aufgabe 3.14. (3 Punkte)

Zeige, dass für die komplexe Konjugation die folgenden Rechenregeln gelten

(1) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$.
(2) $\overline{-z} = -\overline{z}$.

(3) $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$.
(4) Für $z \neq 0$ ist $\overline{1/z} = 1/\overline{z}$.
(5) $\overline{\overline{z}} = z$.
(6) $\overline{z} = z$ genau dann, wenn $z \in \mathbb{R}$ ist.

Aufgabe 3.15. (2 Punkte)

Seien $a, b, c \in \mathbb{C}$ mit $a \neq 0$. Zeige, dass es für die Gleichung

$$az^2 + bz + c = 0$$

mindestens eine komplexe Lösung z gibt.

Aufgabe 3.16. (3 Punkte)

Berechne die Quadratwurzeln, die vierten Wurzeln und die achten Wurzeln von i.

Aufgabe 3.17. (4 Punkte)

Man finde alle drei komplexen Zahlen z, die die Bedingung

$$z^3 = 1$$

erfüllen.

4. Arbeitsblatt

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 4.1. Untersuche für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Funktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^n,$$

auf Injektivität und Surjektivität.

Aufgabe 4.2. Man beschreibe eine Bijektion zwischen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$.

Aufgabe 4.3. Man gebe Beispiele für Abbildungen

$$\varphi, \psi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$

derart, dass φ injektiv, aber nicht surjektiv ist, und dass ψ surjektiv, aber nicht injektiv ist.

Aufgabe 4.4. Es seien L und M Mengen und es sei

$$F : L \longrightarrow M$$

eine Abbildung. Es sei

$$G : M \longrightarrow L$$

eine Abbildung, die $F \circ G = \mathrm{id}_M$ und $G \circ F = \mathrm{id}_L$ erfüllt. Zeige, dass dann G die Umkehrabbildung von F ist.

Aufgabe 4.5. Bestimme die Hintereinanderschaltungen

$$\varphi \circ \psi \text{ und } \psi \circ \varphi$$

für die Abbildungen $\varphi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die durch

$$\varphi(x) = x^4 + 3x^2 - 2x + 5 \text{ und } \psi(x) = 2x^3 - x^2 + 6x - 1$$

definiert sind.

Aufgabe 4.6.*

Es seien L, M, N und P Mengen und es seien

$$F : L \longrightarrow M,\ x \longmapsto F(x),$$

$$G : M \longrightarrow N,\ y \longmapsto G(y),$$

und

$$H : N \longrightarrow P,\ z \longmapsto H(z),$$

Abbildungen. Zeige, dass dann

$$H \circ (G \circ F) = (H \circ G) \circ F\,.$$

gilt.

Aufgabe 4.7.*

Seien L, M, N Mengen und

$$f : L \longrightarrow M \text{ und } g : M \longrightarrow N$$

Abbildungen mit der Hintereinanderschaltung

$$g \circ f : L \longrightarrow N,\ x \longmapsto g(f(x)).$$

Zeige: Wenn $g \circ f$ injektiv ist, so ist auch f injektiv.

Aufgabe 4.8. Es seien

$$f_1, \ldots, f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Funktionen, die wachsend oder fallend seien, und sei $f = f_n \circ \cdots \circ f_1$ ihre Hintereinanderschaltung. Es sei k die Anzahl der fallenden Funktionen unter den f_i. Zeige, dass bei k gerade f wachsend und bei k ungerade f fallend ist.

Aufgabe 4.9. Berechne im Polynomring $\mathbb{C}[X]$ das Produkt

$$((4+i)X^2 - 3X + 9i) \cdot ((-3+7i)X^2 + (2+2i)X - 1 + 6i)\,.$$

Aufgabe 4.10. Sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K. Zeige, dass der Grad folgende Eigenschaften erfüllt.

(1) $\operatorname{grad}(P+Q) \leq \max\{\operatorname{grad}(P), \operatorname{grad}(Q)\}$.
(2) $\operatorname{grad}(P \cdot Q) = \operatorname{grad}(P) + \operatorname{grad}(Q)$.

Aufgabe 4.11. Zeige, dass in einem Polynomring über einem Körper K gilt: Wenn $P, Q \in K[X]$ beide ungleich null sind, so ist auch $PQ \neq 0$.

Aufgabe 4.12. Sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K. Es sei $a \in K$. Zeige, dass die Einsetzungsabbildung, also die Zuordnung

$$\psi : K[X] \longrightarrow K,\ P \longmapsto P(a),$$

folgende Eigenschaften erfüllt (dabei seien $P, Q \in K[X]$).

(1) $(P+Q)(a) = P(a) + Q(a)$.
(2) $(P \cdot Q)(a) = P(a) \cdot Q(a)$.
(3) $1(a) = 1$.

Aufgabe 4.13. Berechne das Ergebnis, wenn man im Polynom

$$2X^3 - 5X^2 - 4X + 7$$

die Variable X durch die komplexe Zahl $2 - 5i$ ersetzt.

Aufgabe 4.14. Führe in $\mathbb{Q}[X]$ die Division mit Rest „P durch T“ für die beiden Polynome $P = 3X^4 + 7X^2 - 2X + 5$ und $T = 2X^2 + 3X - 1$ durch.

Aufgabe 4.15. Sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K. Zeige, dass jedes Polynom $P \in K[X]$, $P \neq 0$, eine Produktzerlegung

$$P = (X - \lambda_1)^{\mu_1} \cdots (X - \lambda_k)^{\mu_k} \cdot Q$$

mit $\mu_j \geq 1$ und einem nullstellenfreien Polynom Q besitzt, wobei die auftretenden verschiedenen Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ und die zugehörigen Exponenten $\mu_1, \ldots, \mu_k$ bis auf die Reihenfolge eindeutig bestimmt sind.

Aufgabe 4.16. Es sei $F \in \mathbb{C}[X]$ ein nichtkonstantes Polynom. Zeige, dass F in Linearfaktoren zerfällt.

Aufgabe 4.17. Bestimme die kleinste reelle Zahl, für die die Bernoullische Ungleichung zum Exponenten $n = 3$ gilt.

Aufgabe 4.18. Skizziere die Graphen der folgenden rationalen Funktionen

$$f = g/h : U \longrightarrow \mathbb{R},$$

wobei U jeweils das Komplement der Nullstellenmenge des Nennerpolynoms h sei.

(1) $1/x$,
(2) $1/x^2$,
(3) $1/(x^2 + 1)$,
(4) $x/(x^2 + 1)$,
(5) $x^2/(x^2 + 1)$,
(6) $x^3/(x^2 + 1)$,
(7) $(x - 2)(x + 2)(x + 4)/(x - 1)x(x + 1)$.

Aufgabe 4.19. Es sei $P \in \mathbb{R}[X]$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten und $z \in \mathbb{C}$ sei eine Nullstelle von P. Zeige, dass dann auch die konjugiert-komplexe Zahl $\overline{z}$ eine Nullstelle von P ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 4.20. (3 Punkte)

Betrachte auf der Menge $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ die Abbildung

$$\varphi : M \longrightarrow M,\ x \longmapsto \varphi(x),$$

die durch die Wertetabelle

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$\varphi(x)$	2	5	6	1	4	3	7	7

gegeben ist. Berechne φ^{1003}, also die 1003-te Hintereinanderschaltung (oder *Iteration*) von φ mit sich selbst.

Aufgabe 4.21. (2 Punkte)

Zeige, dass eine streng wachsende Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

injektiv ist.

Aufgabe 4.22. (3 Punkte)

Seien L, M, N Mengen und

$$f : L \longrightarrow M \text{ und } g : M \longrightarrow N$$

Abbildungen mit der Hintereinanderschaltung

$$g \circ f : L \longrightarrow N,\ x \longmapsto g(f(x)).$$

Zeige: Wenn $g \circ f$ surjektiv ist, so ist auch g surjektiv.

Aufgabe 4.23. (3 Punkte)

Berechne im Polynomring $\mathbb{C}[X]$ das Produkt
$((4+i)X^3 - iX^2 + 2X + 3 + 2i) \cdot ((2-i)X^3 + (3-5i)X^2 + (2+i)X + 1 + 5i)$.

Aufgabe 4.24. (3 Punkte)

Führe in $\mathbb{C}[X]$ die Division mit Rest „P durch T“ für die beiden Polynome $P = (5+i)X^4 + iX^2 + (3-2i)X - 1$ und $T = X^2 + iX + 3 - i$ durch.

Aufgabe 4.25. (5 Punkte)

Es sei $P \in \mathbb{R}[X]$ ein nichtkonstantes Polynom mit reellen Koeffizienten. Zeige, dass man P als ein Produkt von reellen Polynomen vom Grad 1 oder 2 schreiben kann.

5. Arbeitsblatt

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 5.1. In einer Familie leben M, P, S und T. Dabei ist M dreimal so alt wie S und T zusammen, M ist älter als P und S ist älter als T, wobei der Altersunterschied von S zu T doppelt so groß wie der von M zu P ist. Ferner ist P siebenmal so alt wie T und die Summe aller Familienmitglieder ist so alt wie die Großmutter väterlicherseits, nämlich 83.

a) Stelle ein lineares Gleichungssystem auf, dass die beschriebenen Verhältnisse ausdrückt.

b) Löse dieses Gleichungssystem.

Aufgabe 5.2. Kevin zahlt für einen Winterblumenstrauß mit 3 Schneeglöckchen und 4 Mistelzweigen $2,50$ € und Jennifer zahlt für einen Strauß aus 5 Schneeglöckchen und 2 Mistelzweigen $2,30$ €. Wieviel kostet ein Strauß mit einem Schneeglöckchen und 11 Mistelzweigen.

Aufgabe 5.3. Wir betrachten eine Uhr mit Stunden- und Minutenzeiger. Es ist jetzt 6 Uhr, so dass die beiden Zeiger direkt gegenüber stehen. Um wieviel Uhr stehen die beiden Zeiger zum nächsten Mal direkt gegenüber?

Aufgabe 5.4. Man finde ein Polynom

$$f = a + bX + cX^2$$

mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ derart, dass die folgenden Bedingungen erfüllt werden.

$$f(-1) = 2,\ f(1) = 0,\ f(3) = 5\,.$$

Aufgabe 5.5. Man finde ein Polynom

$$f = a + bX + cX^2 + dX^3$$

mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ derart, dass die folgenden Bedingungen erfüllt werden.

$$f(0) = 1,\ f(1) = 2,\ f(2) = 0,\ f(-1) = 1\,.$$

Aufgabe 5.6. Erstelle eine Geradengleichung für die Gerade im $\mathbb{R}^2$, die durch die beiden Punkte $(2, 3)$ und $(5, -7)$ läuft.

Vor der nächsten Aufgabe erinnern wir an den Begriff der Sekante.

Zu einer auf einer Teilmenge $T \subseteq \mathbb{R}$ definierten Funktion

$$f : T \longrightarrow \mathbb{R}$$

und zwei verschiedenen Punkten $a, b \in T$ heißt die Gerade durch $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ die *Sekante* von f an a und b.

Aufgabe 5.7. Bestimme eine Geradengleichung der Sekante der Funktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto -x^3 + x^2 + 2,$$

zu den Stellen 3 und 4.

Aufgabe 5.8. Bestimme eine Ebenengleichung für die Ebene im $\mathbb{R}^3$, auf der die drei Punkte

$$(1, 0, 0), (0, 1, 2) \text{ und } (2, 3, 4)$$

liegen.

Aufgabe 5.9. Finde zu einer komplexen Zahl $z = a + bi \neq 0$ die inverse komplexe Zahl mit Hilfe eines reellen linearen Gleichungssystems mit zwei Variablen und zwei Gleichungen.

Aufgabe 5.10. Löse über den komplexen Zahlen das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccc} ix & +y & +(2-i)z & = & 2 \\ & 7y & +2iz & = & -1+3i \\ & & (2-5i)z & = & 1\,. \end{array}$$

Aufgabe 5.11. Es sei K der in Beispiel 2.3 eingeführte Körper mit zwei Elementen. Löse in K das inhomogene Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccc} x & +y & & = & 1 \\ & y & +z & = & 0 \\ x & +y & +z & = & 0\,. \end{array}$$

Aufgabe 5.12. Zeige durch ein Beispiel, dass das durch die drei Gleichungen I,II,III gegebene lineare Gleichungssystem nicht zu dem durch die drei Gleichungen I-II, I-III, II-III gegebenen linearen Gleichungssystem äquivalent sein muss.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 5.13. (4 Punkte)

Löse das inhomogene Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccc} x+2y+3z+4w & = & 1 \\ 2x+3y+4z+5w & = & 7 \\ x \quad +z & = & 9 \\ x+5y+5z+w & = & 0\,. \end{array}$$

Aufgabe 5.14. (3 Punkte)

Betrachte im $\mathbb{R}^3$ die beiden Ebenen

$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | \, 3x+4y+5z = 2\}$ und $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | \, 2x-y+3z = -1\}$.

Bestimme die Schnittgerade $E \cap F$.

Aufgabe 5.15. (3 Punkte)

Bestimme eine Ebenengleichung für die Ebene im $\mathbb{R}^3$, auf der die drei Punkte

$$(1,0,2), (4,-3,2) \text{ und } (2,1,-1)$$

liegen.

Aufgabe 5.16. (3 Punkte)

Man finde ein Polynom
$$f = a + bX + cX^2$$
mit $a, b, c \in \mathbb{C}$ derart, dass die folgenden Bedingungen erfüllt werden.
$$f(i) = 1,\ f(1) = 1 + i,\ f(1 - 2i) = -i\,.$$

Aufgabe 5.17. (4 Punkte)

Wir betrachten das lineare Gleichungssystem
$$\begin{array}{cccccc} 2x & -ay & & = & -2 \\ ax & & +3z & = & 3 \\ -\frac{1}{3}x & +y & +z & = & 2 \end{array}$$
über den reellen Zahlen in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$. Für welche a besitzt das Gleichungssystem keine Lösung, eine Lösung oder unendlich viele Lösungen?

6. Arbeitsblatt

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 6.1. Berechne das Matrizenprodukt
$$\begin{pmatrix} Z & E & I & L & E \\ R & E & I & H & E \\ H & O & R & I & Z \\ O & N & T & A & L \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} S & E & I \\ P & V & K \\ A & E & A \\ L & R & A \\ T & T & L \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 6.2.*

Berechne über den komplexen Zahlen das Matrizenprodukt
$$\begin{pmatrix} 2-i & -1-3i & -1 \\ i & 0 & 4-2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+i \\ 1-i \\ 2+5i \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 6.3. Bestimme das Matrizenprodukt
$$e_i \circ e_j\,,$$
wobei links der i-te Standardvektor (der Länge n) als Zeilenvektor und rechts der j-te Standardvektor (ebenfalls der Länge n) als Spaltenvektor aufgefasst wird.

Aufgabe 6.4. Es sei M eine $m \times n$-Matrix. Zeige, dass das Matrizenprodukt Me_j mit dem j-ten Standardvektor (als Spaltenvektor aufgefasst) die j-te Spalte von M ergibt. Was ist $e_i M$, wobei e_i der i-te Standardvektor (als Zeilenvektor aufgefasst) ist?

Aufgabe 6.5. Berechne das Matrizenprodukt

$$\begin{pmatrix} 2+i & 1-\frac{1}{2}i & 4i \\ -5+7i & \sqrt{2}+i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5+4i & 3-2i \\ \sqrt{2}-i & e+\pi i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+i \\ 2-3i \end{pmatrix}$$

gemäß den beiden möglichen Klammerungen.

Für die folgende Aussage wird sich bald ein einfacher Beweis über die Beziehung zwischen Matrizen und linearen Abbildungen ergeben.

Aufgabe 6.6. Zeige, dass die Matrizenmultiplikation assoziativ ist.

Genauer: Es sei K ein Körper und es sei A eine $m \times n$-Matrix, B eine $n \times p$-Matrix und C eine $p \times r$-Matrix über K. Zeige, dass $(AB)C = A(BC)$ ist.

Zu einer Matrix M bezeichnet man mit M^n die n-fache Verknüpfung (Matrizenmultiplikation) mit sich selbst. Man spricht dann auch von n-ten *Potenzen* der Matrix.

Aufgabe 6.7. Berechne zur Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

die Potenzen

$$M^i,\ i = 1, \ldots, 4.$$

Aufgabe 6.8. Es sei K ein Körper und es seien V und W Vektorräume über K. Zeige, dass auch das Produkt

$$V \times W$$

ein K-Vektorraum ist.

Aufgabe 6.9. Es sei K ein Körper und I eine Indexmenge. Zeige, dass

$$K^I = \operatorname{Abb}(I, K)$$

mit stellenweiser Addition und skalarer Multiplikation ein K-Vektorraum ist.

Aufgabe 6.10. Es sei K ein Körper und

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & 0 \end{array}$$

ein lineares Gleichungssystem über K. Zeige, dass die Menge aller Lösungen des Gleichungssystems ein Untervektorraum des K^n ist. Wie verhält sich dieser Lösungsraum zu den Lösungsräumen der einzelnen Gleichungen?

Aufgabe 6.11. Man mache sich klar, dass sich die Addition und die skalare Multiplikation auf einen Untervektorraum einschränken lässt und dass dieser mit den von V geerbten Strukturen selbst ein Vektorraum ist.

Aufgabe 6.12. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Es seien $U, W \subseteq V$ Untervektorräume. Zeige, dass die Vereinigung $U \cup W$ nur dann ein Untervektorraum ist, wenn $U \subseteq W$ oder $W \subseteq U$ gilt.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 6.13. (3 Punkte)

Berechne über den komplexen Zahlen das Matrizenprodukt

$$\begin{pmatrix} 3-2i & 1+5i & 0 \\ 7i & 2+i & 4-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-2i & -i \\ 3-4i & 2+3i \\ 5-7i & 2-i \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 6.14. (4 Punkte)

Wir betrachten die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & d & e \\ 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

über einem Körper K. Zeige, dass die vierte Potenz von M gleich 0 ist, also

$$M^4 = MMMM = 0\,.$$

Aufgabe 6.15. (3 Punkte)

Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Zeige, dass die folgenden Eigenschaften gelten (dabei sei $\lambda \in K$ und $v \in V$).

(1) Es ist $0v = 0$.
(2) Es ist $\lambda 0 = 0$.
(3) Es ist $(-1)v = -v$.
(4) Aus $\lambda \neq 0$ und $v \neq 0$ folgt $\lambda v \neq 0$.

Aufgabe 6.16. (3 Punkte)

Man gebe ein Beispiel für einen Vektorraum V und von drei Teilmengen in V an, die jeweils zwei der Unterraumaxiome erfüllen, aber nicht das dritte.

7. Arbeitsblatt

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 7.1. Drücke in $\mathbb{Q}^2$ den Vektor

$$(2, -7)$$

als Linearkombination der Vektoren

$$(5, -3) \text{ und } (-11, 4)$$

aus.

Aufgabe 7.2. Drücke in $\mathbb{C}^2$ den Vektor

$$(1, 0)$$

als Linearkombination der Vektoren

$$(3 + 5i, -3 + 2i) \text{ und } (1 - 6i, 4 - i)$$

aus.

Aufgabe 7.3. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Es sei v_i, $i \in I$, eine Familie von Vektoren in V und $w \in V$ ein weiterer Vektor. Es sei vorausgesetzt, dass die Familie

$$w, v_i, i \in I\,,$$

ein Erzeugendensystem von V ist und dass sich w als Linearkombination der v_i, $i \in I$, darstellen lässt. Zeige, dass dann schon v_i, $i \in I$, ein Erzeugendensystem von V ist.

Aufgabe 7.4. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Beweise folgende Aussagen.

(1) Sei U_j, $j \in J$, eine Familie von Untervektorräumen von V. Dann ist auch der Durchschnitt
$$U = \bigcap_{j \in J} U_j$$
ein Untervektorraum.

(2) Zu einer Familie v_i, $i \in I$, von Elementen in V ist der erzeugte Unterraum ein Unterraum.

(3) Die Familie v_i, $i \in I$, ist genau dann ein Erzeugendensystem von V, wenn
$$\langle v_i,\, i \in I \rangle = V$$
ist.

Aufgabe 7.5. Zeige, dass die drei Vektoren
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$
im $\mathbb{R}^4$ linear unabhängig sind.

Aufgabe 7.6. Man gebe im $\mathbb{R}^3$ drei Vektoren an, so dass je zwei von ihnen linear unabhängig sind, aber alle drei zusammen linear abhängig.

Aufgabe 7.7. Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und v_i, $i \in I$, eine Familie von Vektoren in V. Beweise die folgenden Aussagen.

(1) Wenn die Familie linear unabhängig ist, so ist auch zu jeder Teilmenge $J \subseteq I$ die Familie v_i , $i \in J$, linear unabhängig.

(2) Die leere Familie ist linear unabhängig.

(3) Wenn die Familie den Nullvektor enthält, so ist sie nicht linear unabhängig.

(4) Wenn in der Familie ein Vektor mehrfach vorkommt, so ist sie nicht linear unabhängig.

(5) Ein Vektor v ist genau dann linear unabhängig, wenn $v \neq 0$ ist.

(6) Zwei Vektoren v und u sind genau dann linear unabhängig, wenn weder u ein skalares Vielfaches von v ist noch umgekehrt.

Aufgabe 7.8. Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und sei v_i, $i \in I$, eine Familie von Vektoren in V. Es sei λ_i, $i \in I$, eine Familie von Elementen $\neq 0$ aus K. Zeige, dass die Familie v_i, $i \in I$, genau dann linear unabhängig (ein Erzeugendensystem von V, eine Basis von V) ist, wenn dies für die Familie $\lambda_i v_i$, $i \in I$, gilt.

Aufgabe 7.9. Bestimme eine Basis für den Lösungsraum der linearen Gleichung

$$3x + 4y - 2z + 5w = 0\,.$$

Aufgabe 7.10. Bestimme eine Basis für den Lösungsraum des linearen Gleichungssystems

$$-2x + 3y - z + 4w = 0 \text{ und } 3z - 2w = 0\,.$$

Aufgabe 7.11. Zeige, dass im $\mathbb{R}^3$ die drei Vektoren

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

eine Basis bilden.

Aufgabe 7.12. Bestimme, ob im $\mathbb{C}^2$ die zwei Vektoren

$$\begin{pmatrix} 2+7i \\ 3-i \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 15+26i \\ 13-7i \end{pmatrix}$$

eine Basis bilden.

Aufgabe 7.13. Es sei K ein Körper. Man finde ein lineares Gleichungssystem in drei Variablen, dessen Lösungsraum genau

$$\{\lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \mid \lambda \in K\}$$

ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 7.14. (3 Punkte)

Drücke in $\mathbb{Q}^3$ den Vektor

$$(2, 5, -3)$$

als Linearkombination der Vektoren

$$(1, 2, 3), (0, 1, 1) \text{ und } (-1, 2, 4)$$

aus. Zeige, dass man ihn nicht als Linearkombination von zweien der drei Vektoren ausdrücken kann.

Aufgabe 7.15. (2 Punkte)

Bestimme, ob im $\mathbb{R}^3$ die drei Vektoren

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

eine Basis bilden.

Aufgabe 7.16. (2 Punkte)

Bestimme, ob im $\mathbb{C}^2$ die zwei Vektoren

$$\begin{pmatrix} 2-7i \\ -3+2i \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 5+6i \\ 3-17i \end{pmatrix}$$

eine Basis bilden.

Aufgabe 7.17. (4 Punkte)

Es sei $\mathbb{Q}^n$ der n-dimensionale Standardraum über $\mathbb{Q}$ und sei $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{Q}^n$ eine Familie von Vektoren. Zeige, dass diese Familie genau dann eine $\mathbb{Q}$-Basis des $\mathbb{Q}^n$ ist, wenn diese Familie aufgefasst im $\mathbb{R}^n$ eine $\mathbb{R}$-Basis des $\mathbb{R}^n$ bildet.

Aufgabe 7.18. (3 Punkte)

Es sei K ein Körper und sei

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in K^n$$

ein von 0 verschiedener Vektor. Man finde ein lineares Gleichungssystem in n Variablen mit $n-1$ Gleichungen, dessen Lösungsraum genau

$$\{\lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \mid \lambda \in K\}$$

ist.

8. Arbeitsblatt

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 8.1. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum mit endlicher Dimension $n = \dim(V)$. Es seien n Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ in V gegeben. Zeige, dass die folgenden Eigenschaften äquivalent sind.

(1) $v_1, \ldots, v_n$ bilden eine Basis von V.
(2) $v_1, \ldots, v_n$ bilden ein Erzeugendensystem von V.
(3) $v_1, \ldots, v_n$ sind linear unabhängig.

Aufgabe 8.2. Es sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K. Sei $d \in \mathbb{N}$. Zeige, dass die Menge aller Polynome vom Grad $\leq d$ ein endlichdimensionaler Untervektorraum von $K[X]$ ist. Was ist seine Dimension?

Aufgabe 8.3. Zeige, dass die Menge aller reellen Polynome vom Grad ≤ 4, für die -2 und 3 Nullstellen sind, ein endlichdimensionaler Untervektorraum in $\mathbb{R}[X]$ ist. Bestimme die Dimension von diesem Vektorraum.

Aufgabe 8.4.*

Es sei K ein Körper und es seien V und W endlichdimensionale K-Vektorräume mit $\dim(V) = n$ und $\dim(W) = m$. Welche Dimension besitzt der Produktraum $V \times W$?

Aufgabe 8.5. Es sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über den komplexen Zahlen, und sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V. Zeige, dass die Vektorenfamilie

$$v_1, \ldots, v_n \text{ und } iv_1, \ldots, iv_n$$

eine Basis von V, aufgefasst als reeller Vektorraum, ist.

Aufgabe 8.6. Es sei die Standardbasis e_1, e_2, e_3, e_4 im $\mathbb{R}^4$ gegeben und die drei Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} -4 \\ 9 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Zeige, dass diese Vektoren linear unabhängig sind und ergänze sie mit einem geeigneten Standardvektor gemäß Satz 8.2 zu einer Basis. Kann man jeden Standardvektor nehmen?

Aufgabe 8.7. Bestimme die Übergangsmatrizen $M_{\mathfrak{v}}^{\mathfrak{u}}$ und $M_{\mathfrak{u}}^{\mathfrak{v}}$ für die Standardbasis $\mathfrak{u}$ und die durch die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gegebene Basis $\mathfrak{v}$ im $\mathbb{R}^4$.

Aufgabe 8.8. Bestimme die Übergangsmatrizen $M_{\mathfrak{v}}^{\mathfrak{u}}$ und $M_{\mathfrak{u}}^{\mathfrak{v}}$ für die Standardbasis $\mathfrak{u}$ und die durch die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 3+5i \\ 1-i \end{pmatrix} \text{ und } v_2 = \begin{pmatrix} 2+3i \\ 4+i \end{pmatrix},$$

gegebene Basis $\mathfrak{v}$ im $\mathbb{C}^2$.

Aufgabe 8.9. Wir betrachten die Vektorenfamilien

$$\mathfrak{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \mathfrak{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

im $\mathbb{R}^2$.

a) Zeige, dass sowohl $\mathfrak{v}$ als auch $\mathfrak{u}$ eine Basis des $\mathbb{R}^2$ ist.

b) Es sei $P \in \mathbb{R}^2$ derjenige Punkt, der bezüglich der Basis $\mathfrak{v}$ die Koordinaten $(-2, 5)$ besitze. Welche Koordinaten besitzt der Punkt bezüglich der Basis $\mathfrak{u}$.

c) Bestimme die Übergangsmatrix, die den Basiswechsel von $\mathfrak{v}$ nach $\mathfrak{u}$ beschreibt.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 8.10. (4 Punkte)

Zeige, dass die Menge aller reellen Polynome vom Grad ≤ 6, für die -1, 0 und 1 Nullstellen sind, ein endlichdimensionaler Untervektorraum in $\mathbb{R}[X]$ ist. Bestimme die Dimension von diesem Vektorraum.

Aufgabe 8.11. (3 Punkte)

Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Es sei $v_1, \ldots, v_m$ eine Familie von Vektoren in V und sei

$$U = \langle v_i,\, i = 1, \ldots, m \rangle$$

der davon aufgespannte Untervektorraum. Zeige, dass die Familie genau dann linear unabhängig ist, wenn die Dimension von U gleich m ist.

Aufgabe 8.12. (4 Punkte)

Bestimme die Übergangsmatrizen $M_{\mathfrak{v}}^{\mathfrak{u}}$ und $M_{\mathfrak{u}}^{\mathfrak{v}}$ für die Standardbasis $\mathfrak{u}$ und die durch die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -8 \end{pmatrix} \text{ und } v_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}$$

gegebene Basis $\mathfrak{v}$ im $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 8.13. (6 Punkte)

Wir betrachten die Vektorenfamilien

$$\mathfrak{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ und } \mathfrak{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

im $\mathbb{R}^3$.

a) Zeige, dass sowohl $\mathfrak{v}$ als auch $\mathfrak{u}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist.

b) Es sei $P \in \mathbb{R}^3$ derjenige Punkt, der bezüglich der Basis $\mathfrak{v}$ die Koordinaten $(2, 5, 4)$ besitze. Welche Koordinaten besitzt der Punkt bezüglich der Basis $\mathfrak{u}$.

c) Bestimme die Übergangsmatrix, die den Basiswechsel von $\mathfrak{v}$ nach $\mathfrak{u}$ beschreibt.

9. Arbeitsblatt

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 9.1. Es sei K ein Körper und es seien V und W zwei K-Vektorräume. Es sei

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

eine K-lineare Abbildung. Zeige, dass für beliebige Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in V$ und Koeffizienten $s_1, \ldots, s_n \in K$ die Beziehung

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} s_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} s_i \varphi(v_i)$$

gilt.

Aufgabe 9.2. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Zeige, dass zu $a \in K$ die Abbildung

$$V \longrightarrow V,\, v \longmapsto av,$$

linear ist.[31]

Aufgabe 9.3. Interpretiere die folgenden physikalischen Gesetze als lineare Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Was sind die messbaren Größen, was ist der Proportionalitätsfaktor und wodurch ist dieser festgelegt?

(1) Masse ist Volumen mal Dichte.
(2) Energie ist Masse mal Brennwert.

[31] Eine solche Abbildung heißt *Homothetie* oder *Streckung* mit dem Streckungsfaktor a.

(3) Die zurückgelegte Strecke ist Geschwindigkeit mal Zeit.
(4) Kraft ist Masse mal Beschleunigung.
(5) Energie ist Kraft mal Weg.
(6) Energie ist Leistung mal Zeit.
(7) Spannung ist Widerstand mal Stromstärke.
(8) Ladung ist Stromstärke mal Zeit.

Aufgabe 9.4. Um die Erde wird entlang des Äquators ein Band gelegt. Das Band ist jedoch einen Meter zu lang, so dass es ringsherum gleichmäßig angehoben wird, um straff zu werden. Welche der folgenden Lebewesen können drunter durch laufen/schwimmen/fliegen/tanzen?

(1) Eine Amöbe.
(2) Eine Ameise.
(3) Eine Meise.
(4) Eine Flunder.
(5) Eine Boa constrictor.
(6) Ein Meerschweinchen.
(7) Eine Boa constrictor, die ein Meerschweinchen verschluckt hat.
(8) Ein sehr guter Limbotänzer.

Aufgabe 9.5. Es sei eine lineare Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit

$$\varphi \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 5 \text{ und } \varphi \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = 4$$

gegeben. Berechne

$$\varphi \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 9.6. Ergänze den Beweis zu Satz 9.5 um die Verträglichkeit mit der skalaren Multiplikation.

Aufgabe 9.7. Es sei K ein Körper und seien U, V, W Vektorräume über K. Es seien

$$\varphi : U \to V \text{ und } \psi : V \to W$$

lineare Abbildungen. Zeige, dass dann auch die Verknüpfung

$$\psi \circ \varphi : U \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung ist.

Aufgabe 9.8. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Es sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Familie von Vektoren in V. Zeige, dass für die Abbildung

$$\varphi : K^n \longrightarrow V,\ (s_1, \ldots, s_n) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} s_i v_i,$$

die folgenden Beziehungen gelten.

(1) φ ist injektiv genau dann, wenn $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig sind.
(2) φ ist surjektiv genau dann, wenn $v_1, \ldots, v_n$ ein Erzeugendensystem von V ist.
(3) φ ist bijektiv genau dann, wenn $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis ist.

Aufgabe 9.9. Zeige, dass die Abbildungen

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R},\ z \longmapsto \operatorname{Re}(z),$$

und

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R},\ z \longmapsto \operatorname{Im}(z),$$

$\mathbb{R}$-lineare Abbildungen sind. Zeige ferner, dass die komplexe Konjugation $\mathbb{R}$-linear, aber nicht $\mathbb{C}$-linear ist. Ist der Betrag

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R},\ z \longmapsto |z|,$$

$\mathbb{R}$-linear?

Aufgabe 9.10. Es sei K ein Körper und es seien V und W zwei K-Vektorräume. Es sei

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

eine K-lineare Abbildung. Zeige, dass die folgenden Aussagen gelten.

(1) Für einen Untervektorraum $S \subseteq V$ ist auch das Bild $\varphi(S)$ ein Unterraum von W.
(2) Insbesondere ist das Bild bild $\varphi = \varphi(V)$ der Abbildung ein Unterraum von W.
(3) Für einen Unterraum $T \subseteq W$ ist das Urbild $\varphi^{-1}(T)$ ein Unterraum von V.
(4) Insbesondere ist $\varphi^{-1}(0)$ ein Unterraum von V.

Aufgabe 9.11.*

Bestimme den Kern der linearen Abbildung

$$\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 2 \\ 3 & -2 & 7 & -1 \\ 2 & -1 & -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 9.12.*

Bestimme den Kern der durch die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

gegebenen linearen Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2.$$

Aufgabe 9.13. Finde mittels elementar-geometrischer Überlegungen eine Matrix, die eine Drehung um 45 Grad gegen den Uhrzeigersinn in der Ebene beschreibt.

Aufgabe 9.14. Betrachte die Abbildung

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

die eine rationale Zahl $q \in \mathbb{Q}$ auf q schickt und die alle irrationalen Zahlen auf 0 schickt. Ist dies eine $\mathbb{Q}$-lineare Abbildung? Ist sie mit Skalierung verträglich?

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 9.15. (3 Punkte)

Es sei eine lineare Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

mit

$$\varphi \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}, \varphi \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \varphi \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gegeben. Berechne

$$\varphi \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 9.16. (3 Punkte)

Finde mittels elementar-geometrischer Überlegungen eine Matrix, die eine Drehung um 30 Grad gegen den Uhrzeigersinn in der Ebene beschreibt.

Aufgabe 9.17. (3 Punkte)

Bestimme das Bild und den Kern der linearen Abbildung

$$f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -1 \\ 2 & 5 & 7 & -1 \\ -1 & 2 & 3 & -2 \\ -2 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 9.18. (3 Punkte)

Es sei $E \subset \mathbb{R}^3$ die durch die lineare Gleichung $5x + 7y - 4z = 0$ gegebene Ebene. Bestimme eine lineare Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

derart, dass das Bild von φ gleich E ist.

Aufgabe 9.19. (3 Punkte)

Auf dem reellen Vektorraum $G = \mathbb{R}^4$ der Glühweine betrachten wir die beiden linearen Abbildungen

$$\pi : G \longrightarrow \mathbb{R}, \begin{pmatrix} z \\ n \\ r \\ s \end{pmatrix} \longmapsto 8z + 9n + 5r + s,$$

und

$$\kappa : G \longrightarrow \mathbb{R}, \begin{pmatrix} z \\ n \\ r \\ s \end{pmatrix} \longmapsto 2z + n + 4r + 8s.$$

Wir stellen uns π als Preisfunktion und κ als Kalorienfunktion vor. Man bestimme Basen für $\operatorname{kern} \pi$, für $\operatorname{kern} \kappa$ und für $\operatorname{kern}(\pi \times \kappa)$.[32]

[32]Man störe sich nicht daran, dass hier negative Zahlen vorkommen können. In einem trinkbaren Glühwein kommen natürlich die Zutaten nicht mit einem negativen Koeffizienten vor. Wenn man sich aber beispielsweise überlegen möchte, auf wie viele Arten man eine bestimmte Rezeptur ändern kann, ohne dass sich der Gesamtpreis oder die Energiemenge ändert, so ergeben auch negative Einträge einen Sinn.

10. Arbeitsblatt

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 10.1. Die Telefonanbieter A, B und C kämpfen um einen Markt, wobei die Marktaufteilung im Jahr j durch das Kundentupel $K_j = (a_j, b_j, c_j)$ ausgedrückt wird (dabei steht a_j für die Anzahl der Kunden von A im Jahr j u.s.w.). Es sind regelmäßig folgende Kundenbewegungen innerhalb eines Jahres zu beobachten.

(1) Die Kunden von A bleiben zu 80% bei A und wechseln zu je 10% zu B bzw. zu C.
(2) Die Kunden von B bleiben zu 70% bei B und wechseln zu 10% zu A und zu 20% zu C.
(3) Die Kunden von C bleiben zu 50% bei C und wechseln zu 20% zu A und zu 30% zu B.

a) Bestimme die lineare Abbildung (bzw. die Matrix), die das Kundentupel K_{j+1} aus K_j berechnet.

b) Welches Kundentupel entsteht aus dem Kundentupel $(12000, 10000, 8000)$ innerhalb eines Jahres?

c) Welches Kundentupel entsteht aus dem Kundentupel $(10000, 0, 0)$ in vier Jahren?

Aufgabe 10.2. Es sei K ein Körper und es seien V und W Vektorräume über K der Dimension n bzw. m. Es sei

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung, die bezüglich zweier Basen durch die Matrix $M \in \operatorname{Mat}_{m \times n}(K)$ beschrieben werde. Zeige, dass φ genau dann surjektiv ist, wenn die Spalten der Matrix ein Erzeugendensystem von K^m bilden.

Aufgabe 10.3. Es sei K ein Körper und es seien V und W zwei K- Vektorräume. Es sei

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

eine bijektive lineare Abbildung. Zeige, dass dann auch die Umkehrabbildung

$$\varphi^{-1} : W \longrightarrow V$$

linear ist.

Aufgabe 10.4. Bestimme die inverse Matrix zu

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -4 & 9 \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 10.5. Bestimme die inverse Matrix zu

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 10.6. Bestimme die inverse Matrix zur komplexen Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 2+3i & 1-i \\ 5-4i & 6-2i \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 10.7.*

a) Bestimme, ob die komplexe Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 2+5i & 1-2i \\ 3-4i & 6-2i \end{pmatrix}$$

invertierbar ist.

b) Finde eine Lösung für das inhomogene lineare Gleichungssystem

$$M \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 54+72i \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 10.8. Zeige, dass die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & k+2 & k+1 \\ 0 & 0 & k+1 & k \\ -k & k+1 & 0 & 0 \\ k+1 & -(k+2) & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

für jedes k zu sich selbst invers ist.

Aufgabe 10.9. Wir betrachten die lineare Abbildung

$$\varphi : K^3 \longrightarrow K^2, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} .$$

Es sei $U \subseteq K^3$ der durch die lineare Gleichung $2x + 3y + 4z = 0$ definierte Untervektorraum von K^3, und ψ sei die Einschränkung von φ auf U. Zu U gehören Vektoren der Form

$$u = (0,1,a),\ v = (1,0,b) \text{ und } w = (1,c,0) .$$

Berechne die Übergangsmatrizen zwischen den Basen

$$\mathfrak{b}_1 = v, w,\ \mathfrak{b}_2 = u, w \text{ und } \mathfrak{b}_3 = u, v$$

von U sowie die beschreibenden Matrizen für ψ bzgl. dieser drei Basen (und der Standardbasis auf K^2).

Aufgabe 10.10. Zeige, dass die Elementarmatrizen invertierbar sind. Wie sehen zu den Elementarmatrizen die inversen Matrizen aus?

Aufgabe 10.11. Es sei K ein Körper und M eine $n \times n$-Matrix mit Einträgen in K. Zeige, dass die Multiplikation mit den Elementarmatrizen von links mit M folgende Wirkung haben.

(1) $V_{ij} \circ M =$ Vertauschen der i-ten und der j-ten Zeile von M.
(2) $(S_k(s)) \circ M =$ Multiplikation der k-ten Zeile von M mit s.
(3) $(A_{ij}(a)) \circ M =$ Addition des a-fachen der j-ten Zeile von M zur i-ten Zeile $(i \neq j)$.

Aufgabe 10.12. Beschreibe die Wirkungsweise, wenn man eine Matrix mit einer Elementarmatrix von rechts multipliziert.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 10.13. (3 Punkte)

Bestimme die inverse Matrix zu

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 10.14. (3 Punkte)

Führe das Invertierungsverfahren für die Matrix

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

unter der Voraussetzung $ad - bc \neq 0$ durch.

Aufgabe 10.15. (6 (3+1+2) Punkte)

Eine Tierpopulation besteht aus Traglingen (erstes Lebensjahr), Frischlingen (zweites Lebensjahr), Halbstarken (drittes Lebensjahr), Reifen (viertes Lebensjahr) und alten Hasen (fünftes Lebensjahr), älter können diese Tiere nicht werden. Der Gesamtbestand dieser Tiere in einem bestimmten Jahr j wird daher durch ein 5-Tupel $B_j = (b_{1,j}, b_{2,j}, b_{3,j}, b_{4,j}, b_{5,j})$ angegeben.

Von den Traglingen erreichen 7/8-tel das Frischlingsalter, von den Frischlingen erreichen 9/10-tel das Halbstarkenalter, von den Halbstarken erreichen 5/6-tel das reife Alter und von den Reifen erreichen 2/3-tel das fünfte Jahr.

Traglinge und Frischlinge können sich noch nicht vermehren, dann setzt die Geschlechtsreife ein und 10 Halbstarke zeugen 5 Nachkommen und 10 Reife zeugen 8 Nachkommen, wobei die Nachkommen ein Jahr später geboren werden.

a) Bestimme die lineare Abbildung (bzw. die Matrix), die den Gesamtbestand B_{j+1} aus dem Bestand B_j berechnet.

b) Was wird aus dem Bestand $(200, 150, 100, 100, 50)$ im Folgejahr?

c) Was wird aus dem Bestand $(0, 0, 100, 0, 0)$ in fünf Jahren?

Aufgabe 10.16. (3 Punkte)

Es sei $z \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl und es sei

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ w \longmapsto zw,$$

die dadurch definierte Multiplikation, die eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung ist. Wie sieht die Matrix zu dieser Abbildung bezüglich der reellen Basis 1 und i aus? Zeige, dass zu zwei komplexen Zahlen z_1 und z_2 mit den zwei reellen Matrizen M_1 und M_2 die Produktmatrix $M_2 \circ M_1$ die beschreibende Matrix zu $z_1 z_2$ ist.

11. Arbeitsblatt

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 11.1. Bestimme explizit den Spaltenrang und den Zeilenrang der Matrix

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 4 & 1 & 5 \\ 6 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Beschreibe lineare Abhängigkeiten (falls solche existieren) zwischen den Zeilen als auch zwischen den Spalten der Matrix.

Aufgabe 11.2. Zeige, dass sich bei elementaren Zeilenumformungen der Spaltenrang nicht ändert.

Aufgabe 11.3. Berechne die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1+3i & 5-i \\ 3-2i & 4+i \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 11.4. Berechne die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \\ 8 & 7 & 4 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 11.5. Zeige durch Induktion, dass bei einer oberen Dreiecksmatrix die Determinante gleich dem Produkt der Diagonalelemente ist.

Aufgabe 11.6. Überprüfe die Multilinearität und die Eigenschaft, alternierend zu sein, direkt für die Determinante von 3×3-Matrizen.

Aufgabe 11.7. Es sei M eine quadratische Matrix, die man als

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

mit quadratischen Matrizen A und D schreiben kann. Zeige $\det M = \det A \cdot \det D$.

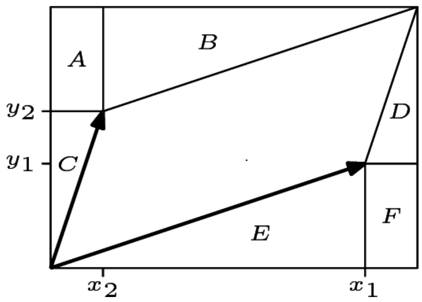
Aufgabe 11.8.*

Bestimme, für welche $x \in \mathbb{C}$ die Matrix

$$\begin{pmatrix} x^2+x & -x \\ -x^3+2x^2+5x-1 & x^2-x \end{pmatrix}$$

invertierbar ist.

Aufgabe 11.9. Man mache sich anhand des Bildes klar, dass zu zwei Vektoren (x_1, y_1) und (x_2, y_2) die Determinante der durch die Vektoren definierten 2×2-Matrix mit dem Flächeninhalt des von den beiden Vektoren aufgespannten *Parallelogramms* (bis auf das Vorzeichen) übereinstimmt.



Aufgabe 11.10. Zeige, dass man die Determinante nach jeder Zeile und nach jeder Spalte entwickeln kann.

Aufgabe 11.11. Es sei K ein Körper und $m, n, p \in \mathbb{N}$. Zeige, dass das Transponieren von Matrizen folgende Eigenschaften besitzt (dabei seien $A, B \in \mathrm{Mat}_{m \times n}(K)$, $C \in \mathrm{Mat}_{n \times p}(K)$ und $s \in K$).

(1) $(A^{tr})^{tr} = A$.
(2) $(A + B)^{tr} = A^{tr} + B^{tr}$.
(3) $(sA)^{tr} = s \cdot A^{tr}$.
(4) $(A \circ C)^{tr} = C^{tr} \circ A^{tr}$.

Aufgabe 11.12. Man berechne die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 7 \\ 1 & 4 & 5 \\ 6 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

indem man die Matrix nach allen Spalten und nach allen Zeilen entwickle.

Aufgabe 11.13. Berechne die Determinanten aller 3×3-Matrizen, bei denen in jeder Spalte und in jeder Zeile genau einmal 1 und zweimal 0 steht.

Aufgabe 11.14. Sei $z \in \mathbb{C}$ und

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ w \longmapsto zw,$$

die zugehörige Multiplikation. Bestimme die Determinante dieser Abbildung, wenn man sie als reell-lineare Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ auffasst.

Die nächsten Aufgaben verwenden die folgende Definition.

Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Zu $a \in K$ heißt die lineare Abbildung

$$\varphi : V \longrightarrow V,\ v \longmapsto av,$$

die *Streckung* (oder *Homothetie*) zum *Streckungsfaktor* a.

Aufgabe 11.15. Was ist die Determinante einer Streckung?

Aufgabe 11.16. Bestätige den Determinantenmultiplikationssatz für zwei Streckungen auf einem endlichdimensionalen Vektorraum.

Aufgabe 11.17. Bestätige den Determinantenmultiplikationssatz für die beiden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 11.18. (4 Punkte)

Es sei K ein Körper und es seien V und W Vektorräume über K der Dimension n bzw. m. Es sei

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung, die bezüglich zweier Basen durch die Matrix $M \in \operatorname{Mat}_{m \times n}(K)$ beschrieben werde. Zeige, dass

$$\operatorname{rang} \varphi = \operatorname{rang} M$$

gilt.

Aufgabe 11.19. (3 Punkte)

Berechne die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1+i & 3-2i & 5 \\ i & 1 & 3-i \\ 2i & -4-i & 2+i \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 11.20. (4 Punkte)

Berechne die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 4 & -3 \\ 2 & -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 11.21. (2 Punkte)

Berechne die Determinanten der Elementarmatrizen.

Aufgabe 11.22. (5 Punkte)

Bestätige den Determinantenmultiplikationssatz für die beiden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

12. Arbeitsblatt

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 12.1. Zeige, dass es in $\mathbb{Q}$ kein Element x mit $x^2 = 2$ gibt.

Aufgabe 12.2. Berechne von Hand die Approximationen x_1, x_2, x_3, x_4 im Heron-Verfahren für die Quadratwurzel von 5 zum Startwert $x_0 = 2$.

Aufgabe 12.3. Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge. Zeige, dass die Folge genau dann gegen x konvergiert, wenn es für jedes $k \in \mathbb{N}_+$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt derart, dass für alle $n \geq n_0$ die Abschätzung $|x_n - x| \leq \frac{1}{k}$ gilt.

Aufgabe 12.4. Untersuche die durch

$$x_n = \frac{1}{n^2}$$

gegebene Folge ($n \geq 1$) auf Konvergenz.

Aufgabe 12.5. Es seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei konvergente reelle Folgen mit $x_n \geq y_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass dann $\lim_{n\to\infty} x_n \geq \lim_{n\to\infty} y_n$ gilt.

Aufgabe 12.6. Es seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ drei reelle Folgen. Es gelte $x_n \leq y_n \leq z_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren beide gegen den gleichen Grenzwert a. Zeige, dass dann auch $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen diesen Grenzwert a konvergiert.

Aufgabe 12.7. Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge reeller Zahlen mit Grenzwert x. Zeige, dass dann auch die Folge

$$(|x_n|)_{n\in\mathbb{N}}$$

konvergiert, und zwar gegen $|x|$.

In den beiden folgenden Aufgaben geht es um die Folge der Fibonacci-Zahlen.

Die Folge der *Fibonacci-Zahlen* f_n ist rekursiv definiert durch

$$f_1 := 1\,, f_2 := 1 \text{ und } f_{n+2} := f_{n+1} + f_n\,.$$

Aufgabe 12.8. Beweise durch Induktion die *Simpson-Formel* oder Simpson-Identität für die Fibonacci-Zahlen f_n. Sie besagt ($n \geq 2$)

$$f_{n+1}f_{n-1} - f_n^2 = (-1)^n\,.$$

Aufgabe 12.9. Beweise durch Induktion die *Binet-Formel* für die Fibonacci-Zahlen. Diese besagt, dass

$$f_n = \frac{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n}{\sqrt{5}}$$

gilt ($n \geq 1$).

Aufgabe 12.10. Man untersuche die folgenden Teilmengen $M \subseteq \mathbb{R}$ auf die Begriffe obere Schranke, untere Schranke, Supremum, Infimum, Maximum und Minimum.

(1) $\{2, -3, -4, 5, 6, -1, 1\}$,
(2) $\left\{\frac{1}{2}, \frac{-3}{7}, \frac{-4}{9}, \frac{5}{9}, \frac{6}{13}, \frac{-1}{3}, \frac{1}{4}\right\}$,
(3) $]-5, 2]$,
(4) $\left\{\frac{1}{n} \middle|\, n \in \mathbb{N}_+\right\}$,
(5) $\left\{\frac{1}{n} \middle|\, n \in \mathbb{N}_+\right\} \cup \{0\}$,
(6) $\mathbb{Q}_-$,
(7) $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 2\}$,
(8) $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 4\}$,
(9) $\{x^2 \mid x \in \mathbb{Z}\}$.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 12.11. (3 Punkte)

Untersuche die durch
$$x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$$
gegebene Folge ($n \geq 1$) auf Konvergenz.

Aufgabe 12.12. (3 Punkte)

Bestimme den Grenzwert der durch
$$x_n = \frac{7n^3 - 3n^2 + 2n - 11}{13n^3 - 5n + 4}$$
definierten reellen Folge.

Aufgabe 12.13. (4 Punkte)

Zeige, dass die reelle Folge
$$\left(\frac{n}{2^n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$$
gegen 0 konvergiert.

Aufgabe 12.14. (6 Punkte)

Untersuche die durch
$$x_n = \frac{\sqrt{n}^n}{n!}$$
gegebene Folge auf Konvergenz.

Aufgabe 12.15. (5 Punkte)

Seien $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folgen reeller Zahlen und sei die Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definiert durch $z_{2n-1} := x_n$ und $z_{2n} := y_n$. Zeige, dass $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ genau dann konvergiert, wenn $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen den gleichen Grenzwert konvergieren.

Aufgabe 12.16. (3 Punkte)

Bestimme den Grenzwert der durch
$$x_n = \frac{2n + 5\sqrt{n} + 7}{-5n + 3\sqrt{n} - 4}$$
definierten reellen Folge.

13. Arbeitsblatt

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 13.1. Beweise die Aussagen (1), (3) und (5) von Lemma 13.1.

Aufgabe 13.2. Sei $k \in \mathbb{N}_+$. Zeige, dass die Folge $\left(\frac{1}{n^k}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen 0 konvergiert.

Aufgabe 13.3. Man gebe ein Beispiel für eine Cauchy-Folge in $\mathbb{Q}$, die (in $\mathbb{Q}$) nicht konvergiert.

Aufgabe 13.4. Man gebe ein Beispiel für eine reelle Folge, die nicht konvergiert, aber eine konvergente Teilfolge enthält.

Aufgabe 13.5. Sei $a \in \mathbb{R}$ eine nichtnegative reelle Zahl und $c \in \mathbb{R}_+$. Zeige, dass die rekursiv definierte Folge mit $x_0 = c$ und

$$x_{n+1} := \frac{x_n + a/x_n}{2}$$

gegen $\sqrt{a}$ konvergiert.

Aufgabe 13.6. Es sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Folge der Fibonacci-Zahlen und

$$x_n := \frac{f_n}{f_{n-1}}\,.$$

Zeige, dass diese Folge in $\mathbb{R}$ konvergiert und dass der Grenzwert x die Bedingung

$$x = 1 + x^{-1}$$

erfüllt. Berechne daraus x.

Tipp: Zeige zuerst mit Hilfe der Simpson-Formel, dass man mit diesen Brüchen eine Intervallschachtelung basteln kann.

Vor der nächsten Aufgabe erinnern wir an die beiden folgenden Definitionen.

Zu zwei reellen Zahlen x und y heißt

$$\frac{x+y}{2}$$

das *arithmetische Mittel*.

Zu zwei nichtnegativen reellen Zahlen x und y heißt

$$\sqrt{x \cdot y}$$

das *geometrische Mittel*.

Aufgabe 13.7. Es seien x und y zwei nichtnegative reelle Zahlen. Zeige, dass das arithmetische Mittel der beiden Zahlen mindestens so groß wie ihr geometrisches Mittel ist.

Aufgabe 13.8. Es sei I_n, $n \in \mathbb{N}$, eine Intervallschachtelung in $\mathbb{R}$. Zeige, dass der Durchschnitt

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$$

aus genau einem Punkt $x \in \mathbb{R}$ besteht.

Aufgabe 13.9. Sei $x > 1$ eine reelle Zahl. Zeige, dass die Folge x^n, $n \in \mathbb{N}$, bestimmt divergent gegen $+\infty$ ist.

Aufgabe 13.10. Man gebe ein Beispiel einer reellen Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, für die es sowohl eine bestimmt gegen $+\infty$ als auch eine bestimmt gegen $-\infty$ divergente Teilfolge gibt.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 13.11. (3 Punkte)

Man gebe Beispiele für konvergente reelle Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, und mit $\lim_{n \to \infty} x_n = 0$ derart, dass die Folge

$$\left(\frac{y_n}{x_n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

(1) gegen 0 konvergiert,
(2) gegen 1 konvergiert,
(3) divergiert.

Aufgabe 13.12. (5 Punkte)

Es seien $P = \sum_{i=0}^{d} a_i x^i$ und $Q = \sum_{i=0}^{e} b_i x^i$ Polynome mit $a_d, b_e \neq 0$. Man bestimme in Abhängigkeit von d und e, ob die durch

$$z_n = \frac{P(n)}{Q(n)}$$

(für n hinreichend groß) definierte Folge konvergiert oder nicht, und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

Aufgabe 13.13. (4 Punkte)

Es sei I_n, $n \in \mathbb{N}$, eine Intervallschachtelung in $\mathbb{R}$ und sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge mit $x_n \in I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass diese Folge gegen die durch die Intervallschachtelung bestimmte Zahl konvergiert.

Aufgabe 13.14. (6 Punkte)

Es seien $b > a > 0$ positive reelle Zahlen. Wir definieren rekursiv zwei Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch $x_0 = a$, $y_0 = b$ und durch

$$x_{n+1} = \text{ geometrisches Mittel von } x_n \text{ und } y_n\,,$$

$$y_{n+1} = \text{ arithmetisches Mittel von } x_n \text{ und } y_n\,.$$

Zeige, dass $[x_n, y_n]$ eine Intervallschachtelung ist.

Aufgabe 13.15. (2 Punkte)

Zeige, dass die Folge $(\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$ bestimmt divergent gegen ∞ ist.

Aufgabe 13.16. (3 Punkte)

Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge mit $x_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass die Folge genau dann bestimmt divergent gegen $+\infty$ ist, wenn $\left(\frac{1}{x_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 0 konvergiert.

Weihnachtsaufgabe

Die folgende Aufgabe soll bis zum 4.1.2012 (getrennt von den anderen Aufgaben) abgegeben werden. Die erreichten Punkte fließen zusätzlich auf Ihr Punktekonto.

Aufgabe 13.17. (10 Punkte)

In einem weihnachtlich geschmückten Raum befinden sich $n \geq 4$ Personen, die wichteln wollen. D.h. für jede Person A muss eine weitere Person $B \neq A$ bestimmt werden, für die A ein Geschenk besorgen soll.[33] Jede Person darf nur wissen (und weiß), wen sie beschenken soll, und keine Person darf mehr wissen.[34] Die Personen bleiben die ganze Zeit im Raum, sie schauen nicht weg oder Ähnliches. Es stehen allein Papier und Stifte zur Verfügung. Mischen ist erlaubt, d.h. man darf „zufällige“ Permutationen von optisch gleichen

[33] Dabei soll jede Person genau ein Geschenk bekommen.

[34] Dies soll auch bedeuten, dass für jede Person alle anderen Personen mit der gleichen Wahrscheinlichkeit als Schenker in Frage kommen.

Objekten vornehmen, und diese sind nicht rekonstruierbar. Es darf gelost werden und dabei darf eine gezogene Information verdeckt gelesen werden. Zettel dürfen (auch heimlich) beschrieben werden.

Entwerfe ein einmalig durchzuführendes Verteilungsverfahren, das all diese Bedingungen erfüllt.

14. Arbeitsblatt

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 14.1. Sei x eine reelle Zahl, $x \neq 1$. Beweise für $n \in \mathbb{N}$ die Beziehung

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}.$$

Aufgabe 14.2. Berechne die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{125} + \frac{1}{625} + \dots .$$

Aufgabe 14.3. Zeige, dass die beiden Reihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \text{ und } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+2}$$

divergieren.

Aufgabe 14.4. Seien $a, b \in \mathbb{R}_+$. Zeige, dass die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{ak+b}$$

divergiert.

Aufgabe 14.5. Zeige, dass die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

divergiert.

Aufgabe 14.6. Beweise das Cauchy-Kriterium für Reihen reeller Zahlen.

Aufgabe 14.7. Zeige, dass bei einer reellen Folge die Änderung von endlich vielen Folgengliedern weder die Konvergenz noch den Grenzwert ändert, und dass bei Reihen die Änderung von endlich vielen Reihengliedern zwar die Konvergenz nicht ändert, wohl aber die Summe.

Aufgabe 14.8. Es seien

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ und } \sum_{k=0}^{\infty} b_k$$

konvergente Reihen von reellen Zahlen mit den Summen s und t. Beweise die folgenden Aussagen.

(1) Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ mit $c_k = a_k + b_k$ ist ebenfalls konvergent mit der Summe $s + t$.
(2) Für $r \in \mathbb{R}$ ist auch die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} d_k$ mit $d_k = r a_k$ konvergent mit der Summe rs.

Aufgabe 14.9. In einer Studenten-WG bereitet Studi 1 Kaffee zu, und füllt die Menge x_1 Kaffee in den Kaffeefilter. Dies sieht entsetzt Studi 2 und sagt: „willst Du, dass wir alle schon total wach werden?“ und nimmt die Kaffeemenge $x_2 < x_1$ wieder aus dem Filter heraus. Danach kommt Studi 3 und sagt: „Bin ich hier in einer Weicheier-WG gelandet?“ und kippt wieder eine Kaffeemenge $x_3 < x_2$ dazu. So geht es unendlich weiter, wobei sich Kaffeerausnehmer und Kaffeenachfüller abwechseln. Wie kann man charakterisieren, ob die Kaffeemenge im Filter konvergiert?

Aufgabe 14.10. Nachdem der Kaffee am Vortag für die Befürworter eines starken Kaffees zu schwach geworden ist, entwickeln sie eine neue Strategie: Sie wollen etwas früher aufstehen, so dass am Tagesanfang und zwischen je zwei Kaffeereduzierern immer zwei Kaffeeauffüller zum Zuge kommen. Dabei bleibt die interne Reihenfolge der beiden Lager als auch die hinzuzufügende bzw. wegzunehmende Kaffeemenge einer Person unverändert. Können sie mit dieser Strategie den Kaffee stärker machen?

Aufgabe 14.11. Zwei Personen, A und B, sitzen in der Kneipe. A will nach Hause gehen, aber B will noch ein Bier trinken. „Na gut, dann trinken wir eben noch ein Bier, das ist aber das allerletzte“ sagt A. Danach möchte B immer noch Bier, aber da das vorhergehende Bier definitiv das letzte war, einigen sie sich auf ein allerletztes halbes Bier. Danach trinken sie noch ein allerletztes Viertelbier, danach noch ein allerletztes Achtelbier, u.s.w. Wieviel „allerletztes Bier“ trinken sie insgesamt?

Aufgabe 14.12. Sei $k \geq 2$. Zeige, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$$

konvergiert.

Aufgabe 14.13. Beweise das folgende *Minorantenkriterium*.

Es seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ zwei Reihen von nichtnegativen reellen Zahlen. Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ sei divergent und es gelte $a_k \geq b_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Dann ist auch die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ divergent.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 14.14. (2 Punkte)

Sei $z \in \mathbb{R}$, $|z| < 1$. Bestimme und beweise eine Formel für die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^k \, .$$

Aufgabe 14.15. (3 Punkte)

Berechne die Summe

$$\sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \, .$$

Aufgabe 14.16. (4 Punkte)

Es sei $g \in \mathbb{N}$, $g \geq 2$. Eine *Ziffernfolge*, die durch

$$z_i \in \{0, 1, \ldots, g-1\} \text{ für } i \in \mathbb{Z},\ i \leq k \, ,$$

(wobei $k \in \mathbb{N}$ ist) gegeben ist, definiert eine reelle Reihe[35]

$$\sum_{i=k}^{-\infty} z_i g^i \, .$$

Zeige, dass eine solche Reihe gegen eine eindeutig bestimmte nichtnegative reelle Zahl konvergiert.

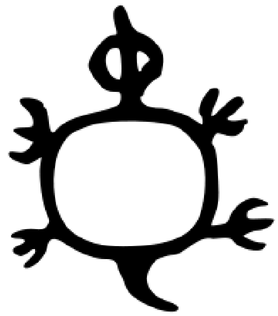
[35]Hier läuft also der Index in die umgekehrte Richtung.

Aufgabe 14.17. (6 Punkte)

Zeige, dass die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$$

konvergiert.



Aufgabe 14.18. (5 Punkte)

Die Situation im Schildkröten-Paradoxon von Zenon von Elea ist folgendermaßen: Eine langsame Schildkröte (mit der Kriechgeschwindigkeit $v > 0$) hat einen Vorsprung $s > 0$ gegenüber dem schnelleren Achilles (mit der Geschwindigkeit $w > v$ und dem Startpunkt 0). Sie starten gleichzeitig. Achilles kann die Schildkröte nicht einholen: Wenn er beim Ausgangspunkt der Schildkröte $s_0 = s$ ankommt, so ist die Schildkröte nicht mehr dort, sondern ein Stück weiter, sagen wir an der Stelle $s_1 > s_0$. Wenn Achilles an der Stelle s_1 ankommt, so ist die Schildkröte wieder ein Stück weiter, an der Stelle $s_2 > s_1$, u.s.w.

Berechne die Folgenglieder s_n, die zugehörigen Zeitpunkte t_n, sowie die jeweiligen Grenzwerte. Vergleiche diese Grenzwerte mit den direkt berechneten Überholungsdaten.

15. Arbeitsblatt

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 15.1. Zeige, dass eine lineare Funktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto ax,$$

stetig ist.

Aufgabe 15.2. Zeige, dass die Funktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto |x|\,,$$

stetig ist.

Aufgabe 15.3. Zeige, dass die Funktion

$$\mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0},\, x \longmapsto \sqrt{x},$$

stetig ist.

Aufgabe 15.4. Sei $T \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge und sei

$$f : T \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Es sei $x \in T$ ein Punkt mit $f(x) > 0$. Zeige, dass dann auch $f(y) > 0$ gilt für alle y aus einem nichtleeren offenen Intervall $]x - a, x + a[$.

Aufgabe 15.5. Es seien $a < b < c$ reelle Zahlen und es seien

$$g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

und

$$h : [b, c] \longrightarrow \mathbb{R}$$

stetige Funktionen mit $g(b) = h(b)$. Zeige, dass dann die Funktion

$$f : [a, c] \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit

$$f(t) = g(t) \text{ für } t \leq b \text{ und } f(t) = h(t) \text{ für } t > b$$

ebenfalls stetig ist.

Aufgabe 15.6. Berechne den Grenzwert der Folge

$$x_n = 5\left(\frac{2n+1}{n}\right)^3 - 4\left(\frac{2n+1}{n}\right)^2 + 2\left(\frac{2n+1}{n}\right) - 3$$

für $n \to \infty$.

Aufgabe 15.7. Es sei

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion, die nur endlich viele Werte annimmt. Zeige, dass f konstant ist.

Aufgabe 15.8. Man gebe ein Beispiel einer stetigen Funktion

$$f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R},$$

die genau zwei Werte annimmt.

Aufgabe 15.9.*

Zeige, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{falls } x \in \mathbb{Q}\,, \\ 0, & \text{sonst}\,, \end{cases}$$

nur im Nullpunkt 0 stetig ist.

Aufgabe 15.10. Es sei $T \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge und sei $a \in \mathbb{R}$ ein Punkt. Es sei $f : T \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $b \in \mathbb{R}$. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(1) Es ist
$$\lim_{x \to a} f(x) = b\,.$$
(2) Für jedes $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ derart, dass für alle $x \in T$ mit $d(x, a) \leq \delta$ die Abschätzung $d(f(x), b) \leq \epsilon$ folgt.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 15.11. (4 Punkte)

Bestimme, für welche Punkte $x \in \mathbb{R}$ die durch

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ für } x \leq -1 \\ x^2 \text{ für } -1 < x < 2 \\ -2x + 7 \text{ für } x \geq 2 \end{cases}$$

definierte Funktion stetig ist.

Aufgabe 15.12. (4 Punkte)

Bestimme den Grenzwert der durch

$$b_n = 2a_n^4 - 6a_n^3 + a_n^2 - 5a_n + 3\,,$$

definierten Folge, wobei

$$a_n = \frac{3n^3 - 5n^2 + 7}{4n^3 + 2n - 1}$$

ist.

Aufgabe 15.13. (3 Punkte)
Zeige, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in \mathbb{Q}\,, \\ 0 & \text{sonst}\,, \end{cases}$$

in keinem Punkt $x \in \mathbb{R}$ stetig ist.

Aufgabe 15.14. (3 Punkte)
Entscheide, ob die Folge

$$a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

konvergiert, und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

Aufgabe 15.15. (4 Punkte)
Bestimme den Grenzwert der rationalen Funktion

$$\frac{2x^3 + 3x^2 - 1}{x^3 - x^2 + x + 3}$$

im Punkt $a = -1$.

16. Arbeitsblatt

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 16.1. Finde für die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) = x^2 + x - 1,$$

eine Nullstelle im Intervall $[0, 1]$ mit Hilfe der Intervallhalbierungsmethode mit einem Fehler von maximal $1/100$.

Aufgabe 16.2. Es sei

$$f : [0, 1] \longrightarrow [0, 1[$$

eine stetige Funktion. Zeige, dass f nicht surjektiv ist.

Aufgabe 16.3. Man gebe ein Beispiel eines beschränkten Intervalls $I \subseteq \mathbb{R}$ und einer stetigen Funktion

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

derart, dass das Bild von f beschränkt ist, die Funktion aber kein Maximum annimmt.

Aufgabe 16.4. Es sei
$$f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$
eine stetige Funktion. Zeige, dass es eine stetige Fortsetzung
$$\tilde{f}:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
von f gibt.

Aufgabe 16.5. Es sei
$$f:I \longrightarrow \mathbb{R}$$
eine stetige Funktion auf einem reellen Intervall. Die Funktion habe in den Punkten $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$, lokale Maxima. Zeige, dass die Funktion zwischen x_1 und x_2 mindestens ein lokales Minimum besitzt.

Aufgabe 16.6. Bestimme direkt, für welche $n \in \mathbb{N}$ die Potenzfunktionen
$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^n,$$
ein Extremum im Nullpunkt besitzen.

Aufgabe 16.7.*

Zeige, dass der Zwischenwertsatz nicht für stetige Funktionen von $\mathbb{Q}$ nach $\mathbb{Q}$ gelten muss.

Aufgabe 16.8. Bestimme den Grenzwert der Folge
$$x_n = \sqrt{\frac{7n^2 - 4}{3n^2 - 5n + 2}},\ n \in \mathbb{N}\,.$$

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 16.9. (2 Punkte)

Bestimme das Minimum der Funktion
$$f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^2 + 3x - 5.$$

Aufgabe 16.10. (4 Punkte)

Finde für die Funktion
$$f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) = x^3 - 3x + 1,$$
eine Nullstelle im Intervall $[0,1]$ mit Hilfe der Intervallhalbierungsmethode mit einem Fehler von maximal $1/200$.

Aufgabe 16.11. (2 Punkte)

Bestimme den Grenzwert der Folge

$$x_n = \sqrt[3]{\frac{27n^3 + 13n^2 + n}{8n^3 - 7n + 10}},\ n \in \mathbb{N}\,.$$

Die nächste Aufgabe verwendet den Begriff der geraden und der ungeraden Funktion.

Eine Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

heißt *gerade*, wenn für alle $x \in \mathbb{R}$ die Gleichheit

$$f(x) = f(-x)$$

gilt.

Eine Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

heißt *ungerade*, wenn für alle $x \in \mathbb{R}$ die Gleichheit

$$f(x) = -f(-x)$$

gilt.

Aufgabe 16.12. (4 Punkte)

Zeige, dass man jede stetige Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

als

$$f = g + h$$

mit einer stetigen geraden Funktion g und einer stetigen ungeraden Funktion h schreiben kann.

Die nächste Aufgabe verwendet den Begriff des Fixpunktes.

Es sei M eine Menge und

$$f : M \longrightarrow M$$

eine Abbildung. Ein Element $x \in M$ mit $f(x) = x$ heißt *Fixpunkt* der Abbildung.

Aufgabe 16.13. (4 Punkte)

Es sei

$$f : [a, b] \longrightarrow [a, b]$$

eine stetige Funktion des Intervalls $[a, b]$ in sich. Zeige, dass f einen Fixpunkt besitzt.

17. Arbeitsblatt

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 17.1. Berechne die ersten fünf Glieder des Cauchy-Produkts der beiden konvergenten Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ und } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} .$$

Aufgabe 17.2. Man mache sich klar, dass die Partialsummen des Cauchy-Produkts von zwei Reihen nicht das Produkt der Partialsummen der beiden Reihen sind.

Aufgabe 17.3. Es seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ zwei absolut konvergente Potenzreihen in $x \in \mathbb{R}$. Zeige, dass das Cauchy-Produkt der beiden Reihen durch

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \text{ mit } c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$$

gegeben ist.

Aufgabe 17.4. Sei $x \in \mathbb{R}$, $|x| < 1$. Bestimme (in Abhängigkeit von x) die Summen der beiden Reihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^{2k} \text{ und } \sum_{k=0}^{\infty} x^{2k+1} .$$

Aufgabe 17.5. Es sei

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

eine absolut konvergente Potenzreihe. Bestimme die Koeffizienten zu den Potenzen x^0, x^1, x^2, x^3, x^4 in der dritten Potenz

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)^3 .$$

Aufgabe 17.6. Zeige, dass die durch die Exponentialreihe definierte reelle Funktion
$$\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \exp x,$$
nicht nach oben beschränkt ist und dass 0 das Infimum (aber nicht das Minimum) der Bildmenge ist.[36]

Aufgabe 17.7. Zeige, dass für die Exponentialfunktionen
$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto a^x,$$
die folgenden Rechenregeln gelten (dabei seien $a, b \in \mathbb{R}_+$ und $x, y \in \mathbb{R}$).

(1) $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$.
(2) $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$.
(3) $(a^x)^y = a^{xy}$.
(4) $(ab)^x = a^x b^x$.

Aufgabe 17.8. Zeige, dass die Logarithmen zur Basis b die folgenden Rechenregeln erfüllen.

(1) Es ist $\log_b(b^x) = x$ und $b^{\log_b(y)} = y$, das heißt der Logarithmus zur Basis b ist die Umkehrfunktion zur Exponentialfunktion zur Basis b.
(2) Es gilt $\log_b(y \cdot z) = \log_b y + \log_b z$
(3) Es gilt $\log_b y^u = u \cdot \log_b y$ für $u \in \mathbb{R}$.
(4) Es gilt
$$\log_a y \;=\; \log_a(b^{\log_b y}) \;=\; \log_b y \cdot \log_a b.$$

Aufgabe 17.9. Eine Währungsgemeinschaft habe eine Inflation von jährlich 2%. Nach welchem Zeitraum (in Jahren und Tagen) haben sich die Preise verdoppelt?

Aufgabe 17.10. Seien $b, d > 0$. Zeige
$$\lim_{b \to 0} b^d = 0\,.$$

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 17.11. (3 Punkte)

Berechne die Koeffizienten $c_0, c_1, \ldots, c_5$ der Potenzreihe $\sum_{n=0}^\infty c_n x^n$, die das Cauchy-Produkt der geometrischen Reihe mit der Exponentialreihe ist.

[36] Aus der Stetigkeit folgt daraus, dass $\mathbb{R}_+$ das Bild der reellen Exponentialfunktion ist.

Aufgabe 17.12. (4 Punkte)

Es sei

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

eine absolut konvergente Potenzreihe. Bestimme die Koeffizienten zu den Potenzen $x^0, x^1, x^2, x^3, x^4, x^5$ in der vierten Potenz

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)^4 .$$

Aufgabe 17.13. (5 Punkte)

Für $N \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$ sei

$$R_{N+1}(x) = \exp x - \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

das *Restglied* der Exponentialreihe. Zeige, dass für $|x| \leq 1 + \frac{1}{2}N$ die *Restgliedabschätzung*

$$|R_{N+1}(x)| \leq \frac{2}{(N+1)!} |x|^{N+1}$$

gilt.

Aufgabe 17.14. (3 Punkte)

Berechne von Hand die ersten 4 Nachkommastellen im Zehnersystem von

$$\exp 1 .$$

Aufgabe 17.15. (4 Punkte)

Zeige, dass die durch die Exponentialreihe definierte reelle Exponentialfunktion die Eigenschaft besitzt, dass für jedes $d \in \mathbb{N}$ die Folge

$$\left(\frac{\exp n}{n^d} \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

bestimmt divergent gegen $+\infty$ ist.[37]

[37]Man sagt daher, dass die Exponentialfunktion *schneller wächst* als jede Polynomfunktion.

Aufgabe 17.16. (6 Punkte)

Es sei

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion $\neq 0$, die die Gleichung

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$ erfüllt. Zeige, dass f eine Exponentialfunktion ist, d.h. dass es ein $b > 0$ gibt mit $f(x) = b^x$.

18. Arbeitsblatt

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 18.1. Zeige die folgenden Eigenschaften von Sinus hyperbolicus und Kosinus hyperbolicus

(1)
$$\cosh x + \sinh x = e^x .$$

(2)
$$\cosh x - \sinh x = e^{-x} .$$

(3)
$$(\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 = 1 .$$

Aufgabe 18.2. Zeige, dass der Sinus hyperbolicus auf $\mathbb{R}$ streng wachsend ist.

Aufgabe 18.3. Zeige, dass der Tangens hyperbolicus die Abschätzungen

$$-1 \leq \tanh x \leq 1 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}$$

erfüllt.

Aufgabe 18.4. Beweise elementargeometrisch den Sinussatz, also die Aussage, dass in einem Dreieck die Gleichheiten

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}$$

gelten, wobei a, b, c die Seitenlängen gegenüber den Ecken mit den Winkeln α, β, γ sind.

Aufgabe 18.5. Bestimme die Determinanten von ebenen und von räumlichen Drehungen.

Aufgabe 18.6. Beweise die Additionstheoreme für den Sinus und den Kosinus unter Verwendung von Drehmatrizen.

Aufgabe 18.7. Wir betrachten eine Uhr mit Minuten- und Sekundenzeiger, die sich beide kontinuierlich bewegen. Bestimme eine Formel, die aus der Winkelstellung des Minutenzeigers die Winkelstellung des Sekundenzeigers (jeweils ausgehend von der 12-Uhr-Stellung im Uhrzeigersinn gemessen) berechnet.

Aufgabe 18.8.*

Zeige, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$$

konvergiert.

Aufgabe 18.9. Bestimme die Koeffizienten bis zu z^6 in der Produktreihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ aus der Sinusreihe und der Kosinusreihe.

Die nächste Aufgabe verwendet die Definition einer *periodischen Funktion.*

Eine Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

heißt *periodisch* mit *Periode* $L > 0$, wenn für alle $x \in \mathbb{R}$ die Gleichheit

$$f(x) = f(x + L)$$

gilt.

Aufgabe 18.10. Es sei

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine periodische Funktion und

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine beliebige Funktion.

a) Zeige, dass die Hintereinanderschaltung $g \circ f$ wieder periodisch ist.

b) Zeige, dass die Hintereinanderschaltung $f \circ g$ nicht periodisch sein muss.

Aufgabe 18.11. Es sei

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige periodische Funktion. Zeige, dass f beschränkt ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 18.12. (3 Punkte)

Zeige, dass in der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ des Kosinus hyperbolicus die Koeffizienten c_n gleich 0 sind für ungerades n.

Aufgabe 18.13. (6 Punkte)

Zeige, dass der Kosinus hyperbolicus auf $\mathbb{R}_{\leq 0}$ streng fallend und auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$ streng wachsend ist.

Aufgabe 18.14. (4 Punkte)

Es sei

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

die Drehung des Raumes um die z-Achse um 45 Grad gegen den Uhrzeigersinn. Wie sieht die beschreibende Matrix bezüglich der Basis

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$$

aus?

Aufgabe 18.15. (5 Punkte)

Beweise das Additionstheorem

$$\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$$

für den Sinus unter Bezug auf die definierenden Potenzreihen.

Aufgabe 18.16. (4 Punkte)

Es seien

$$f_1, f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

periodische Funktionen mit den Periodenlängen L_1 bzw. L_2. Der Quotient L_1/L_2 sei eine rationale Zahl. Zeige, dass auch $f_1 + f_2$ eine periodische Funktion ist.

Aufgabe 18.17. (5 Punkte)

Es seien n komplexe Zahlen $z_1, z_2, \ldots, z_n$ in der Kreisscheibe B mit Mittelpunkt $(0,0)$ und Radius 1, also in $B = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$, gegeben. Zeige, dass es einen Punkt $w \in B$ mit der Eigenschaft

$$\sum_{i=1}^{n} |z_i - w| \geq n$$

gibt.

19. Arbeitsblatt

Aufwärmaufgaben

Die folgende Aufgabe löse man sowohl direkt als auch mittels der Ableitungsregeln.

Aufgabe 19.1. Bestimme die Ableitung der Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) = x^n,$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 19.2. Bestimme die Ableitung der Funktion

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) = x^n$$

für jedes $n \in \mathbb{Z}$.

Aufgabe 19.3. Bestimme die Ableitung der Funktion

$$f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) = x^{\frac{1}{n}},$$

für jedes $n \in \mathbb{N}_+$.

Aufgabe 19.4.*

Bestimme direkt (ohne Verwendung von Ableitungsregeln) die Ableitung der Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x + 3,$$

in einem beliebigen Punkt $a \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 19.5. Zeige, dass die reelle Betragsfunktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto |x|,$$

im Nullpunkt nicht differenzierbar ist.

Aufgabe 19.6. Bestimme die Ableitung der Funktion

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) = \frac{x^2+1}{x^3}.$$

Aufgabe 19.7. Zeige, dass die Ableitung einer rationalen Funktion wieder eine rationale Funktion ist.

Aufgabe 19.8. Es sei $f(x) = x^3 + 4x^2 - 1$ und $g(y) = y^2 - y + 2$. Bestimme die Ableitung der Hintereinanderschaltung $h(x) = g(f(x))$ direkt und mittels der Kettenregel.

Aufgabe 19.9. Zeige, dass ein Polynom $P \in \mathbb{R}[X]$ genau dann einen Grad $\leq d$ besitzt (oder $P = 0$ ist), wenn die $(d+1)$-te Ableitung von P das Nullpolynom ist.

Aufgabe 19.10.*

Es seien

$$f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

zwei differenzierbare Funktionen und sei

$$h(x) = (g(f(x)))^2 f(g(x))\,.$$

a) Drücke die Ableitung h' mit den Ableitungen von f und g aus.

b) Sei nun

$$f(x) = x^2 - 1 \text{ und } g(x) = x + 2\,.$$

Berechne $h'(x)$ auf zwei verschiedene Arten, einerseits über $h(x)$ und andererseits über die Formel aus Teil a).

Bei der „linearen Approximation“ von differenzierbaren Abbildungen kommen sogenannte affin-lineare Abbildungen vor.

Es sei K ein Körper und es seien V und W Vektorräume über K. Eine Abbildung

$$\alpha : V \longrightarrow W,\, v \longmapsto \alpha(v) = \varphi(v) + w,$$

wobei φ eine lineare Abbildung und $w \in W$ ein Vektor ist, heißt *affin-linear*.

Aufgabe 19.11. Es sei K ein Körper und W ein K-Vektorraum. Zeige, dass es zu zwei Vektoren $u, v \in W$ genau eine affin-lineare Abbildung

$$\alpha : K \longrightarrow W$$

gibt mit $\alpha(0) = u$ und $\alpha(1) = v$.

Aufgabe 19.12. Bestimme die affin-lineare Abbildung

$$\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

mit $\alpha(0) = (2, 3, 4)$ und $\alpha(1) = (5, -2, -1)$.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 19.13. (3 Punkte)

Bestimme die Ableitung der Funktion

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x^3 - x + 2},$$

wobei D die Menge sei, auf der das Nennerpolynom nicht verschwindet.

Aufgabe 19.14. (4 Punkte)

Bestimme die Tangenten an den Graphen zur Funktion $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$, die parallel zu $y = x$ sind.

Aufgabe 19.15. (4 Punkte)

Es sei $f(x) = \frac{x^2+5x-2}{x+1}$ und $g(y) = \frac{y-2}{y^2+3}$. Bestimme die Ableitung der Hintereinanderschaltung $h(x) = g(f(x))$ direkt und mittels der Kettenregel.

Aufgabe 19.16. (2 Punkte)

Bestimme die affin-lineare Abbildung

$$\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

deren Graph durch die beiden Punkte $(-2, 3)$ und $(5, -7)$ verläuft.

Aufgabe 19.17. (3 Punkte)

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge und seien

$$f_i : D \longrightarrow \mathbb{R},\ i = 1, \ldots, n,$$

differenzierbare Funktionen. Beweise die Formel

$$(f_1 \cdots f_n)' = \sum_{i=1}^{n} f_1 \cdots f_{i-1} f_i' f_{i+1} \cdots f_n .$$

20. Arbeitsblatt

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 20.1. Zeige, dass die Funktion
$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto x\,|x|\,,$$
differenzierbar ist, aber nicht zweimal differenzierbar.

Aufgabe 20.2. Betrachte die Funktion
$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$
die durch
$$f(x) = \begin{cases} x - \lfloor x \rfloor, & \text{falls } \lfloor x \rfloor \text{ gerade,} \\ \lfloor x \rfloor - x + 1, & \text{falls } \lfloor x \rfloor \text{ ungerade,} \end{cases}$$
definiert ist. Untersuche f in Hinblick auf Stetigkeit, Differenzierbarkeit und Extrema.

Aufgabe 20.3. Bestimme die lokalen und die globalen Extrema der Funktion
$$f\colon [-2,5] \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1.$$

Aufgabe 20.4. Bestimme die lokalen und die globalen Extrema der Funktion
$$f\colon [-4,4] \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) = 3x^3 - 7x^2 + 6x - 3.$$

Aufgabe 20.5. Betrachte die Funktion
$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) = 4x^3 + 3x^2 - x + 2.$$
Finde die Punkte $a \in [-3,3]$ derart, dass die Steigung der Funktion in a gleich der Gesamtsteigung zwischen -3 und 3 ist.

Aufgabe 20.6. Zeige, dass eine reelle Polynomfunktion
$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
vom Grad $d \geq 1$ maximal $d-1$ Extrema besitzt, und die reellen Zahlen sich in maximal d Abschnitte unterteilen lassen, auf denen f streng wachsend oder streng fallend ist.

Aufgabe 20.7. Bestimme den Grenzwert

$$\lim_{x\to 2} \frac{3x^2-5x-2}{x^3-4x^2+x+6}$$

mittels Polynomdivision (vergleiche Beispiel 20.11).

Aufgabe 20.8. Bestimme den Grenzwert der rationalen Funktion

$$\frac{x^3-2x^2+x+4}{x^2+x}$$

im Punkt $a=-1$.

Aufgabe 20.9. An einen geradlinigen Fluss soll ein rechteckiges Areal der Fläche $1000m^2$ angelegt werden, dessen eine Seite der Fluss ist. Für die drei anderen Seiten braucht man einen Zaun. Mit welcher Zaunlänge kann man minimal auskommen?

Aufgabe 20.10. Diskutiere den Funktionsverlauf der rationalen Funktion

$$f: D \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) = \frac{2x-3}{5x^2-3x+4},$$

hinsichtlich Definitionsbereich, Nullstellen, Wachstumsverhalten, (lokale) Extrema. Skizziere den Funktionsgraph.

Aufgabe 20.11.*

Es sei

$$f(x) = x^3 + x - 1\,.$$

a) Zeige, dass die Funktion f im rellen Intervall $[0,1]$ genau eine Nullstelle besitzt.

b) Berechne die erste Nachkommastelle im Zehnersystem dieser Nullstelle.

c) Man gebe eine rationale Zahl $q \in [0,1]$ derart an, dass $|f(q)| \leq \frac{1}{10}$ ist.

Aufgabe 20.12.*

Bestimme den Grenzwert von

$$\frac{x^2-3x+2}{x^3-2x+1}$$

im Punkt $x=1$, und zwar

a) mittels Polynomdivision,

b) mittels der Regel von l'Hospital.

Aufgabe 20.13. Es sei $P \in \mathbb{R}[X]$ ein Polynom, $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass P genau dann ein Vielfaches von $(X-a)^n$ ist, wenn a eine Nullstelle sämtlicher Ableitungen $P, P', P'', \ldots, P^{(n-1)}$ ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 20.14. (5 Punkte)

Aus einem Blatt Papier der Seitenlängen 20 cm und 30 cm soll eine Schachtel (ohne Deckel) mit möglichst großem Volumen gebastelt werden, indem ringsherum ein Rand hochgefaltet wird (die überlappenden Eckränder werden verklebt). Mit welcher Randbreite (=Schachtelhöhe) erreicht man das maximale Volumen?

Aufgabe 20.15. (4 Punkte)

Diskutiere den Funktionsverlauf der rationalen Funktion

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) = \frac{3x^2 - 2x + 1}{x - 4},$$

hinsichtlich Definitionsbereich, Nullstellen, Wachstumsverhalten, (lokale) Extrema. Skizziere den Funktionsgraph.

Aufgabe 20.16. (5 Punkte)

Zeige, dass eine nichtkonstante rationale Funktion der Form

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$$

(mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}, a, c \neq 0$), keine lokalen Extrema besitzt.

Aufgabe 20.17. (3 Punkte)

Bestimme den Grenzwert der rationalen Funktion

$$\frac{x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4}{2x^3 - x^2 - 4x + 3}$$

im Punkt $a = 1$.

Aufgabe 20.18. (5 Punkte)

Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und

$$F : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine rationale Funktion. Zeige, dass F genau dann ein Polynom ist, wenn es eine höhere Ableitung gibt mit $F^{(n)} = 0$.

21. Arbeitsblatt

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 21.1. Bestimme die Ableitungen von Sinus hyperbolicus und Kosinus hyperbolicus.

Aufgabe 21.2. Bestimme die Ableitung der Funktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto x^2 \cdot \exp(x^3 - 4x).$$

Aufgabe 21.3. Bestimme die Ableitung der Funktion

$$\ln : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Aufgabe 21.4. Bestimme die Ableitung der Sinus- und der Kosinusfunktion unter Verwendung von Satz 21.1.

Aufgabe 21.5. Bestimme die 1034871-te Ableitung der Sinusfunktion.

Aufgabe 21.6. Bestimme für die folgenden Funktionen, ob der Funktionslimes existiert und welchen Wert er gegebenenfalls annimmt.

(1) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$,
(2) $\lim_{x \to 0} \frac{(\sin x)^2}{x}$,
(3) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x^2}$,
(4) $\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{\ln x}$.

Aufgabe 21.7. Bestimme für die folgenden Funktionen, ob der Funktionslimes für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $x \to 0$, existiert und welchen Wert er gegebenenfalls annimmt.

(1) $\sin \frac{1}{x}$,
(2) $x \cdot \sin \frac{1}{x}$,
(3) $\frac{1}{x} \cdot \sin \frac{1}{x}$.

Aufgabe 21.8. Bestimme die Ableitung der Funktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto \sin(\cos x).$$

Aufgabe 21.9. Bestimme die Ableitung der Funktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto (\sin x)(\cos x).$$

Aufgabe 21.10. Bestimme für $n \in \mathbb{N}$ die Ableitung der Funktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto (\sin x)^n.$$

Aufgabe 21.11. Bestimme die Ableitung der Funktion

$$D \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Aufgabe 21.12. Zeige, dass die reelle Sinusfunktion eine bijektive, streng wachsende Funktion

$$[-\pi/2, \pi/2] \longrightarrow [-1, 1]$$

induziert, und dass die reelle Kosinusfunktion eine bijektive, streng fallende Funktion

$$[0, \pi] \longrightarrow [-1, 1]$$

induziert.

Aufgabe 21.13.*

Bestimme den Grenzwert der Folge

$$\frac{\sin n}{n},\ n \in \mathbb{N}_+ .$$

Aufgabe 21.14. Bestimme die Ableitungen von Arcus-Sinus und Arcus-Kosinus.

Aufgabe 21.15.*

Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) = 1 + \ln x - \frac{1}{x}.$$

a) Zeige, dass f eine stetige Bijektion zwischen $\mathbb{R}_+$ und $\mathbb{R}$ definiert.

b) Bestimme das Urbild u von 0 unter f sowie $f'(u)$ und $(f^{-1})'(0)$. Fertige eine grobe Skizze für die Umkehrfunktion f^{-1} an.

Aufgabe 21.16.*
Es seien
$$f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
zwei differenzierbare Funktionen. Es sei $a \in \mathbb{R}$. Es gelte
$$f(a) \geq g(a) \text{ und } f'(x) \geq g'(x) \text{ für alle } x \geq a\,.$$
Zeige, dass
$$f(x) \geq g(x) \text{ für alle } x \geq a \text{ gilt}\,.$$

Aufgabe 21.17.*
Wir betrachten die Funktion
$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) = e^{-\frac{1}{x}}.$$

a) Untersuche das Monotonieverhalten dieser Funktion.

b) Zeige, dass diese Funktion injektiv ist.

c) Bestimme das Bild von f.

d) Man gebe die Umkehrfunktion auf dem Bild zu dieser Funktion an.

e) Skizziere den Funktionsgraphen von f.

Aufgabe 21.18.*
Betrachte die Funktion
$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) = (2x+3)e^{-x^2}.$$
Bestimme die Nullstellen und die lokalen (globalen) Extrema von f. Fertige eine grobe Skizze für den Funktionsverlauf an.

Aufgabe 21.19. Diskutiere den Funktionsverlauf von
$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) = e^{-2x} - 2e^{-x}.$$
Bestimme insbesondere das Monotonieverhalten, Extrema von f, $\lim_{x \to \infty} f(x)$ und ebenso für die Ableitung f'.

Aufgabe 21.20. Zeige, dass die Funktion
$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} \text{ für } x \in]0,1], \\ 0 \text{ für } x = 0, \end{cases}$$
stetig ist und unendlich viele Nullstellen besitzt.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 21.21. (3 Punkte)

Bestimme die linearen Funktionen, die tangential zur Exponentialfunktion sind.

Aufgabe 21.22. (3 Punkte)

Bestimme die Ableitung der Funktion

$$\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto x^x .$$

Die folgende Aufgabe soll ohne Bezug auf die zweite Ableitung gelöst werden.

Aufgabe 21.23. (4 Punkte)

Bestimme die Extrema der Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) = \sin x + \cos x \,.$$

Aufgabe 21.24. (6 Punkte)

Es sei

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Polynomfunktion vom Grad $d \geq 1$. Es sei m die Anzahl der lokalen Maxima von f und n die Anzahl der lokalen Minima von f. Zeige, dass bei d ungerade $m = n$ und bei d gerade $|m - n| = 1$ ist.

22. Arbeitsblatt

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 22.1. Bestimme das Taylor-Polynom vom Grad 4 der Funktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto \sin x \, \cos x \,,$$

im Nullpunkt.

Aufgabe 22.2. Bestimme sämtliche Taylor-Polynome der Funktion

$$f(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 3x + 5$$

im Entwicklungspunkt $a = 3$.

Aufgabe 22.3. Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ eine konvergente Potenzreihe. Bestimme die Ableitungen $f^{(k)}(a)$.

Aufgabe 22.4. Es sei $p \in \mathbb{R}[Y]$ ein Polynom und

$$g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto g(x) = p(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x}}.$$

Zeige, dass die Ableitung $g'(x)$ ebenfalls von der Form

$$g'(x) = q(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x}}$$

mit einem weiteren Polynom q ist.

Aufgabe 22.5. Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) = e^{-\frac{1}{x}}.$$

Zeige, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die n-te Ableitung $f^{(n)}$ die Eigenschaft

$$\lim_{x \in \mathbb{R}_+,\, x \to 0} f^{(n)}(x) = 0$$

besitzt.

Aufgabe 22.6.*

Bestimme die Taylor-Reihe der Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ im Punkt $a = 2$ bis zur Ordnung 4 (man gebe also das Taylor-Polynom vom Grad 4 zum Entwicklungspunkt 2 an, wobei die Koeffizienten in einer möglichst einfachen Form angegeben werden sollen).

Aufgabe 22.7.*

Bestimme das Taylor-Polynom vom Grad 3 zur Funktion

$$f(x) = x \cdot \sin x$$

im Entwicklungspunkt $a = \frac{\pi}{2}$.

Aufgabe 22.8. Es sei

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x),$$

eine differenzierbare Funktion mit den Eigenschaften

$$f' = f \text{ und } f(0) = 1\,.$$

Zeige, dass $f(x) = \exp x$ ist für alle $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 22.9. Bestimme das Taylor-Polynom bis zur vierten Ordnung der Umkehrfunktion des Sinus im Punkt 0 mit dem in Bemerkung 22.8 beschriebenen Potenzreihenansatz.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 22.10. (4 Punkte)

Bestimme die Taylor-Polynome im Entwicklungspunkt 0 bis zum Grad 4 der Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \sin(\cos x) + x^3 \exp(x^2).$$

Aufgabe 22.11. (4 Punkte)

Diskutiere den Funktionsverlauf der Funktion

$$f : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) = \sin x \ \cos x\,,$$

hinsichtlich Nullstellen, Wachstumsverhalten, (lokale) Extrema. Skizziere den Funktionsgraph.

Aufgabe 22.12. (4 Punkte)

Diskutiere den Funktionsverlauf der Funktion

$$f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) = \sin^3 x - \frac{1}{4} \sin x\,,$$

hinsichtlich Nullstellen, Wachstumsverhalten, (lokale) Extrema. Skizziere den Funktionsgraph.

Aufgabe 22.13. (4 Punkte)

Bestimme das Taylor-Polynom bis zur vierten Ordnung des natürlichen Logarithmus im Punkt 1 mit dem in Bemerkung 22.8 beschriebenen Potenzreihenansatz aus der Potenzreihe der Exponentialfunktion.

Aufgabe 22.14. (8 Punkte)

Zu $n \geq 3$ sei A_n der Flächeninhalt eines in den Einheitskreis eingeschriebenen gleichmäßigen n-Eckes. Zeige $A_n \leq A_{n+1}$.

23. Arbeitsblatt

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 23.1. Bestimme das Treppenintegral über $[-3,+4]$ zur Treppenfunktion, die durch

$$f(t)=\begin{cases}5, \text{ falls } -3\leq t\leq -2\,,\\ -3, \text{ falls } -2<t\leq -1\,,\\ \frac{3}{7}, \text{ falls } -1<t<-\frac{1}{2}\,,\\ 13, \text{ falls } t=-\frac{1}{2}\,,\\ \pi, \text{ falls } -\frac{1}{2}<t<e\,,\\ 0, \text{ falls } e\leq t\leq 3\,,\\ 1, \text{ falls } 3<t\leq 4\,,\end{cases}$$

gegeben ist.

Aufgabe 23.2.*

a) Unterteile das Intervall $[-4,5]$ in sechs gleichgroße Teilintervalle.

b) Bestimme das Treppenintegral derjenigen Treppenfunktion auf $[-4,5]$, die auf der in a) konstruierten Unterteilung abwechselnd die Werte 2 und -1 annimmt.

Aufgabe 23.3. Man gebe ein Beispiel für eine Funktion $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ an, die nur endlich viele Werte annimmt, aber keine Treppenfunktion ist.

Aufgabe 23.4. Es sei

$$f:[a,b]\longrightarrow[c,d]$$

eine Treppenfunktion und

$$g:[c,d]\longrightarrow\mathbb{R}$$

eine Funktion. Zeige, dass die Hintereinanderschaltung $g\circ f$ ebenfalls eine Treppenfunktion ist.

Aufgabe 23.5. Man gebe ein Beispiel einer stetigen Funktion

$$f:[a,b]\longrightarrow[c,d]$$

und einer Treppenfunktion

$$g:[c,d]\longrightarrow\mathbb{R}$$

derart, dass die Hintereinanderschaltung $g\circ f$ keine Treppenfunktion ist.

Aufgabe 23.6. Bestimme das bestimmte Integral

$$\int_0^1 t\,dt$$

explizit über obere und untere Treppenfunktionen.

Aufgabe 23.7. Bestimme das bestimmte Integral

$$\int_1^2 t^3\,dt$$

explizit über obere und untere Treppenfunktionen.

Aufgabe 23.8. Sei $I = [a, b]$ ein kompaktes Intervall und sei

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Es gebe eine Folge von Treppenfunktionen $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $s_n \leq f$ und eine Folge von Treppenfunktionen $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $t_n \geq f$. Es sei vorausgesetzt, dass die beiden zugehörigen Folgen der Treppenintegrale konvergieren und dass ihre Grenzwerte übereinstimmen. Zeige, dass dann f Riemann-integrierbar ist und dass

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b s_n(x)\,dx \;=\; \int_a^b f(x)\,dx \;=\; \lim_{n\to\infty} \int_a^b t_n(x)\,dx$$

gilt.

Aufgabe 23.9. Sei I ein kompaktes Intervall und sei

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Zeige, dass f genau dann Riemann-integrierbar ist, wenn es eine Unterteilung $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ gibt derart, dass die einzelnen Einschränkungen $f_i = f|_{[a_{i-1},a_i]}$ Riemann-integrierbar sind.

Aufgabe 23.10. Es sei $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall und es seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ zwei Riemann-integrierbare Funktionen. Beweise die folgenden Aussagen.

(1) Ist $m \leq f(x) \leq M$ für alle $x \in I$, so ist $m(b-a) \leq \int_a^b f(t)\,dt \leq M(b-a)$.
(2) Ist $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in I$, so ist $\int_a^b f(t)\,dt \leq \int_a^b g(t)\,dt$.
(3) Es ist $\int_a^b f(t) + g(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b g(t)\,dt$.
(4) Für $c \in \mathbb{R}$ ist $\int_a^b (cf)(t)\,dt = c\int_a^b f(t)\,dt$.

Aufgabe 23.11. Es sei $I = [a, b]$ ein kompaktes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion. Zeige, dass

$$\left| \int_a^b f(t)\, dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| \, dt$$

gilt.

Aufgabe 23.12. Es sei $I = [a, b]$ ein kompaktes Intervall und es seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ zwei Riemann-integrierbare Funktionen. Zeige, dass auch fg Riemann-integrierbar ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 23.13. (2 Punkte)

Es seien

$$f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

zwei Treppenfunktionen. Zeige, dass dann auch $f + g$ eine Treppenfunktion ist.

Aufgabe 23.14. (3 Punkte)

Bestimme das bestimmte Integral

$$\int_a^b t^2 \, dt$$

in Abhängigkeit von a und b explizit über obere und untere Treppenfunktionen.

Aufgabe 23.15. (4 Punkte)

Bestimme das bestimmte Integral

$$\int_{-2}^7 -t^3 + 3t^2 - 2t + 5 \, dt$$

explizit über obere und untere Treppenfunktionen.

Aufgabe 23.16. (3 Punkte)

Zeige, dass für die Funktion

$$]0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}, \, x \longmapsto \frac{1}{x},$$

weder das Unterintegral noch das Oberintegral existiert.

Aufgabe 23.17. (6 Punkte)
Zeige, dass für die Funktion

$$]0,1] \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x}},$$

das Unterintegral existiert, aber nicht das Oberintegral.

Aufgabe 23.18. (5 Punkte)
Sei I ein kompaktes Intervall und sei

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine monotone Funktion. Zeige, dass f Riemann-integrierbar ist.

24. Arbeitsblatt

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 24.1. Berechne das bestimmte Integral

$$\int_2^5 \frac{x^2+3x-4}{x-1}\, dx\,.$$

Aufgabe 24.2. Bestimme die zweite Ableitung der Funktion

$$F(x) = \int_0^x \sqrt{t^5 - t^3 + 2t}\, dt\,.$$

Aufgabe 24.3. Ein Körper werde zum Zeitpunkt 0 losgelassen und falle luftwiderstandsfrei aus einer gewissen Höhe unter der (konstanten) Schwerkraft der Erde nach unten. Berechne die Geschwindigkeit $v(t)$ und die zurückgelegte Strecke $s(t)$ in Abhängigkeit von der Zeit t. Nach welcher Zeit hat der Körper 100 Meter zurückgelegt?

Aufgabe 24.4. Es sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Zeige, dass die Funktion

$$h(x) = \int_0^{g(x)} f(t)\, dt$$

differenzierbar ist und bestimme ihre Ableitung.

Aufgabe 24.5. Es sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Betrachte die durch

$$a_n := \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} f(t)\, dt$$

definierte Folge. Entscheide, ob diese Folge konvergiert und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

Aufgabe 24.6. Es sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine konvergente Reihe mit $a_n \in [0,1]$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion. Zeige, dass dann die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{a_n} f(x)dx$$

absolut konvergent ist.

Aufgabe 24.7. Sei f eine Riemann-integrierbare Funktion auf $[a,b]$ mit $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a,b]$. Man zeige: Ist f stetig in einem Punkt $c \in [a,b]$ mit $f(c) > 0$, dann gilt

$$\int_a^b f(x)dx > 0\,.$$

Aufgabe 24.8. Man zeige, dass die Gleichung

$$\int_0^x e^{t^2} dt = 1$$

eine einzige Lösung $x \in [0,1]$ besitzt.

Aufgabe 24.9. Seien

$$f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

zwei stetige Funktionen mit der Eigenschaft

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx\,.$$

Beweise, dass es ein $c \in [a,b]$ mit $f(c) = g(c)$ gibt.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 24.10. (2 Punkte)

Bestimme den Flächeninhalt unterhalb[38] des Graphen der Sinusfunktion zwischen 0 und π.

[38] Gemeint ist hier der Flächeninhalt zwischen dem Graphen und der x-Achse.

Aufgabe 24.11. (3 Punkte)

Berechne das bestimmte Integral

$$\int_1^7 \frac{x^3 - 2x^2 - x + 5}{x + 1} \, dx \, .$$

Aufgabe 24.12. (3 Punkte)

Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}} \, .$$

Aufgabe 24.13. (4 Punkte)

Berechne den Flächeninhalt der Fläche, die durch die Graphen der beiden Funktionen f und g mit

$$f(x) = x^2 \text{ und } g(x) = -2x^2 + 3x + 4$$

eingeschlossen wird.

Aufgabe 24.14. (4 Punkte)

Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \, t \longmapsto f(t),$$

mit

$$f(t) = \begin{cases} 0 \text{ für } t = 0, \\ \sin \frac{1}{t} \; \text{ für } t \neq 0 \, . \end{cases}$$

Zeige, unter Bezug auf die Funktion $g(x) = x^2 \cos \frac{1}{x}$, dass f eine Stammfunktion besitzt.

Aufgabe 24.15. (3 Punkte)

Es seien

$$f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

zwei stetige Funktionen und es sei $g(t) \geq 0$ für alle $t \in [a, b]$. Zeige, dass es dann ein $s \in [a, b]$ gibt mit

$$\int_a^b f(t) g(t) \, dt = f(s) \int_a^b g(t) \, dt \, .$$

25. Arbeitsblatt

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 25.1. Berechne das bestimmte Integral

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} x \sin x^2 \, dx \, .$$

In den folgenden Aufgaben, bei denen es um die Bestimmung von Stammfunktionen geht, ist jeweils ein geeigneter Definitionsbereich zu wählen.

Aufgabe 25.2. Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$\tan x \; .$$

Aufgabe 25.3. Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$x^n \cdot \ln x \, .$$

Aufgabe 25.4. Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$e^{\sqrt{x}} \, .$$

Aufgabe 25.5. Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$\frac{x^3}{\sqrt[5]{x^4+2}} \, .$$

Aufgabe 25.6. Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \, .$$

Aufgabe 25.7. Bestimme, für welche $a \in \mathbb{R}$ die Funktion

$$a \longmapsto \int_{-1}^{2} at^2 - a^2 t \, dt$$

ein Maximum oder ein Minimum besitzt.

Aufgabe 25.8. Nach neuesten Studien zur Aufnahmefähigkeit von durchschnittlichen Studierenden wird die Aufmerksamkeitskurve am Tag durch

$$[8,18] \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) = -x^2 + 25x - 100,$$

beschrieben. Dabei ist x die Zeit in Stunden und $y = f(x)$ ist die Aufnahmefähigkeit in Mikrocreditpoints pro Sekunde. Wann muss man eine ein einhalb stündige Vorlesung ansetzen, damit die Gesamtaufnahme optimal ist? Wieviele Mikrocreditpoints werden dann in dieser Vorlesung aufgenommen?

Aufgabe 25.9. Es sei I ein reelles Intervall und es sei

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion mit der Stammfunktion F. Es sei G eine Stammfunktion von F und es seien $b, c \in \mathbb{R}$. Bestimme eine Stammfunktion der Funktion

$$(bt + c) \cdot f(t)$$

Aufgabe 25.10. Sei $n \in \mathbb{N}_+$. Bestimme eine Stammfunktion der Funktion

$$\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+,\ x \longmapsto x^{1/n},$$

unter Verwendung der Stammfunktion von x^n und Satz 25.4.

Aufgabe 25.11. Bestimme eine Stammfunktion des natürlichen Logarithmus unter Verwendung der Stammfunktion seiner Umkehrfunktion.

Aufgabe 25.12. Es sei

$$f : [a,b] \longrightarrow [c,d]$$

eine bijektive, stetig differenzierbare Funktion. Man beweise die Formel für die Stammfunktion der Umkehrfunktion, indem man für das Integral

$$\int_a^b f^{-1}(y)dy$$

die Substitution $y = f(x)$ durchführt und anschließend partiell integriert.

Aufgabe 25.13.*

Berechne durch geeignete Substitutionen eine Stammfunktion zu

$$\sqrt{3x^2 + 5x - 4}\,.$$

Aufgabe 25.14.*

Berechne das bestimmte Integral zur Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) = 2x^3 + 3e^x - \sin x\,,$$

über $[-1, 0]$.

Aufgabe 25.15.*

Berechne das bestimmte Integral zur Funktion

$$f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2x+3} - e^{-x},$$

über $[1, 4]$.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 25.16. (4 Punkte)

Berechne das bestimmte Integral $\int_0^8 f(t)\,dt$, wobei die Funktion f durch

$$f(t) = \begin{cases} t+1,\ \text{falls } 0 \leq t \leq 2\,, \\ t^2 - 6t + 11,\ \text{falls } 2 < t \leq 5\,, \\ 6,\ \text{falls } 5 < t \leq 6\,, \\ -2t + 18\,,\ \text{falls } 6 < t \leq 8\,, \end{cases}$$

gegeben ist.

Aufgabe 25.17. (3 Punkte)

Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$x^3 \cdot \cos x - x^2 \cdot \sin x\ .$$

Aufgabe 25.18. (2 Punkte)

Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$\arcsin x\ .$$

Aufgabe 25.19. (4 Punkte)

Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$\sin(\ln x)\ .$$

Aufgabe 25.20. (5 Punkte)

Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$e^x \cdot \frac{x^2+1}{(x+1)^2} \,.$$

Aufgabe 25.21. (5 Punkte)

Es sei I ein reelles Intervall und es sei

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion mit der Stammfunktion F. Es sei G eine Stammfunktion von F und H eine Stammfunktion von G. Es seien $a, b, c \in \mathbb{R}$. Bestimme eine Stammfunktion der Funktion

$$(at^2 + bt + c) \cdot f(t)$$

26. Arbeitsblatt

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 26.1. Bestimme die Partialbruchzerlegung von

$$\frac{3X^5 + 4X^4 - 2X^2 + 5X - 6}{X^3} \,.$$

Aufgabe 26.2. Bestimme die Koeffizienten in der Partialbruchzerlegung in Beispiel 26.5 durch Einsetzen von einigen Zahlen für X.

Aufgabe 26.3. Bestimme die komplexe und die reelle Partialbruchzerlegung von

$$\frac{1}{X^2(X^2+1)} \,.$$

Aufgabe 26.4. Bestimme die komplexe Partialbruchzerlegung von

$$\frac{1}{X^3-1} \,.$$

Aufgabe 26.5. Bestimme die komplexe und die reelle Partialbruchzerlegung von

$$\frac{1}{X^3(X-1)^3} \,.$$

Aufgabe 26.6. Bestimme die komplexe und die reelle Partialbruchzerlegung von

$$\frac{X^3+4X^2+7}{X^2-X-2}\,.$$

Aufgabe 26.7. Bestimme die komplexe und die reelle Partialbruchzerlegung von

$$\frac{X^7+X^4-5X+3}{X^8+X^6-X^4-X^2}\,.$$

Aufgabe 26.8. Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$\frac{1}{x^2+5}\,.$$

Aufgabe 26.9. Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$\frac{1}{x^2-5}\,.$$

Aufgabe 26.10. Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$\frac{1}{2x^2+x-1}\,.$$

Aufgabe 26.11.*

Bestimme eine Stammfunktion von

$$\frac{5x^3+4x-3}{x^2+1}$$

mittels Partialbruchzerlegung.

Aufgabe 26.12.*

Wir betrachten die Funktion

$$f:\mathbb{R}\setminus\{1\}\longrightarrow\mathbb{R},\ x\longmapsto\frac{x^5+3x^3-2x^2+x-1}{(x-1)^2(x^2+1)}.$$

a) Bestimme die reelle Partialbruchzerlegung von f.

b) Bestimme eine Stammfunktion von f für $x>1$.

Aufgabe 26.13. Finde eine Darstellung der rationalen Zahl $1/60$ als Summe von rationalen Zahlen, deren Nenner Primzahlpotenzen sind.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 26.14. (4 Punkte)

Schreibe die rationale Funktion

$$\frac{2x^3 - 4x^2 + 5x - 1}{4x + 3}$$

in der neuen Variablen $u = 4x + 3$. Berechne die Stammfunktion über die reelle Partialbruchzerlegung und über die Substitution $u = 4x + 3$.

Aufgabe 26.15. (4 Punkte)

Bestimme die komplexe und die reelle Partialbruchzerlegung von

$$\frac{1}{X^4 - 1}.$$

Aufgabe 26.16. (4 Punkte)

Bestimme die komplexe und die reelle Partialbruchzerlegung von

$$\frac{1}{X(X-1)(X-2)(X-3)}.$$

Aufgabe 26.17. (4 Punkte)

Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$\frac{1}{1 + x^4}.$$

Aufgabe 26.18. (5 Punkte)

Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$\frac{3x - 5}{(x^2 + 2x + 7)^2}.$$

Aufgabe 26.19. (1 Punkt)

Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$\frac{7x^6 - 18x^5 + 8x^3 - 9x^2 + 2}{x^7 - 3x^6 + 2x^4 - 3x^3 + 2x - 5}.$$

27. Arbeitsblatt

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 27.1. Es sei

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine wachsende Funktion und $b \in \mathbb{R}$. Zeige, dass die Folge $f(n)$, $n \in \mathbb{N}$, genau dann gegen b konvergiert, wenn

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b$$

gilt, wenn also die Funktion für $x \to +\infty$ den Grenzwert b besitzt.

Aufgabe 27.2. Sei I ein Intervall, r ein Randpunkt von I und

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Zeige, dass die Existenz des uneigentlichen Integrals

$$\int_a^r f(t)\,dt$$

nicht vom gewählten Startpunkt $a \in I$ abhängt.

Aufgabe 27.3. Sei $I =]r, s[$ ein beschränktes offenes Intervall und

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion, die sich auf $[r, s]$ stetig fortsetzen lässt. Zeige, dass dann das uneigentliche Integral

$$\int_r^s f(t)\,dt$$

existiert.

Aufgabe 27.4. Formuliere und beweise Rechenregeln für uneigentliche Integrale (analog zu Lemma 23.5.)

Aufgabe 27.5. Entscheide, ob das uneigentliche Integral

$$\int_1^\infty \frac{x^2 - 3x + 5}{x^4 + 2x^3 + 5x + 8}\,dx$$

existiert.

Aufgabe 27.6. Bestimme das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty e^{-t}\, dt\,.$$

Aufgabe 27.7. Es sei $I = [a, b]$ ein beschränktes Intervall und es sei

$$f :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine fallende Folge in I mit dem Grenzwert a und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine wachsende Folge in I mit dem Grenzwert b. Es sei vorausgesetzt, dass das uneigentliche Integral $\int_a^b f(t)\, dt$ existiert. Zeige, dass die Folge

$$w_n = \int_{x_n}^{y_n} f(t)\, dt$$

gegen das uneigentliche Integral konvergiert.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 27.8. (2 Punkte)

Berechne die Energie, die nötig wäre, um die Erde, ausgehend von der jetzigen Lage relativ zur Sonne, unendlich weit von der Sonne zu entfernen.

Aufgabe 27.9. (3 Punkte)

Entscheide, ob das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}}\, dx$$

existiert und berechne es im Falle der Existenz.

Aufgabe 27.10. (5 Punkte)

Man gebe ein Beispiel für eine unbeschränkte, stetige Funktion

$$f : \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

derart, dass das uneigentliche Integral $\int_0^\infty f(t)\, dt$ existiert.

Aufgabe 27.11. (2 Punkte)

Entscheide, ob das uneigentliche Integral

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt$$

existiert und berechne es im Falle der Existenz.

Aufgabe 27.12. (4 Punkte)

Entscheide, ob das uneigentliche Integral

$$\int_1^\infty \frac{x^3-3x+5}{x^4+2x^3+5x+8}\,dx$$

existiert.

Aufgabe 27.13. (8 Punkte)

Entscheide, ob das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$$

existiert.

(Versuche nicht, eine Stammfunktion für den Integranden zu finden.)

Aufgaben zum Hochladen[39]

Aufgabe 27.14. (6 Punkte)

Erstelle für die rationale Funktion $f(x)=\frac{x-2}{x^2(x-3)}$ eine Skizze, die die reelle Partialbruchzerlegung dieser Funktion darstellt.

Aufgabe 27.15. (6 Punkte)

Man fertige eine Skizze an, die die eulersche Konstante als einen Flächeninhalt darstellt.

28. Arbeitsblatt

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 28.1. Sei $x \in \mathbb{R}$ und betrachte die Funktion

$$f:\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto f(t)=t^xe^{-t}.$$

Bestimme die Extremwerte dieser Funktion.

[39]Bei einer Aufgabe zum Hochladen geht es darum, ein Bild (Animation etc.) mit einem Programm zu erstellen, über Wikimedia Commons hochzuladen (genau kategorisieren) und es in den Kurs einzubinden (siehe Materialseite des Kurses). Die Arbeit muss in einem auf Commons erlaubten Format erstellt und unter die CC-by-sa 3.0-Lizenz gestellt werden. Unbedingt das Urheberrecht beachten! Es gibt keinen genauen Abgabetermin, Nachbesserungen sind möglich und erwünscht. Bewertung letztlich durch den Dozenten. Die Gutschrift auf das Punktekonto erfolgt am Ende des Semesters vor der Klausur.

Aufgabe 28.2. Zeige, dass für die Fakultätsfunktion für $k \in \mathbb{N}$ die Beziehung

$$\operatorname{Fak}\left(\frac{2k-1}{2}\right) = \frac{\prod_{i=1}^{k}(2i-1)}{2^k} \cdot \sqrt{\pi}$$

gilt.

Aufgabe 28.3.*

a) Zeige, dass für $x \geq 1$ die Abschätzung

$$\int_1^\infty t^x e^{-t}\, dt \;\leq\; 1$$

gilt.

b) Zeige, dass die Funktion $H(x)$ mit

$$H(x) = \int_1^\infty t^x e^{-t}\, dt$$

für $x \geq 1$ monoton wachsend ist.

c) Zeige, dass $10! \geq e^{11} + 1$ gilt.

d) Zeige, dass für die Fakultätsfunktion für $x \geq 10$ die Abschätzung

$$\operatorname{Fak}(x) \geq e^x$$

gilt.

Aufgabe 28.4. Löse das Anfangswertproblem

$$y' = \sin t \;\text{ mit } y(\pi) = 7\,.$$

Aufgabe 28.5. Löse das Anfangswertproblem

$$y' = 3t^2 - 4t + 7 \text{ mit } y(2) = 5\,.$$

Aufgabe 28.6. Finde alle Lösungen zur gewöhnlichen Differentialgleichung

$$y' = y\,.$$

Aufgabe 28.7. Man mache sich anschaulich und mathematisch klar, dass bei einer ortsunabhängigen Differentialgleichung der Abstand zwischen zwei Lösungen y_1 und y_2 zeitunabhängig ist, d.h. dass $y_1(t) - y_2(t)$ konstant ist.

Man gebe ein Beispiel, dass dies bei zeitunabhängigen Differentialgleichungen nicht der Fall sein muss.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 28.8. (2 Punkte)

Zeige, dass für die Fakultätsfunktion die Beziehung

$$\operatorname{Fak}(x) = \int_0^1 (-\ln t)^x \, dt$$

gilt.

Aufgabe 28.9. (3 Punkte)

Löse das Anfangswertproblem

$$y' = 3t^3 - 2t + 5 \text{ mit } y(3) = 4\,.$$

Aufgabe 28.10. (3 Punkte)

Finde eine Lösung zur gewöhnlichen Differentialgleichung

$$y' = t + y\,.$$

Aufgabe 28.11. (4 Punkte)

Löse das Anfangswertproblem

$$y' = \frac{t^3}{t^2+1} \text{ mit } y(1) = 2\,.$$

29. Arbeitsblatt

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 29.1. Finde sämtliche Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$y' = -\frac{y}{t}\,.$$

Aufgabe 29.2. Finde sämtliche Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$y' = \frac{y}{t^2}\,.$$

Aufgabe 29.3. Finde sämtliche Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$y' = e^t y\,.$$

Aufgabe 29.4. Finde die Lösungen der inhomogenen linearen Differentialgleichung
$$y' = y + 7\,.$$

Aufgabe 29.5. Finde die Lösungen der inhomogenen linearen Differentialgleichung
$$y' = y + \frac{\sinh t}{\cosh^2 t}\,.$$

Aufgabe 29.6. Es sei
$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}_+$$
eine differenzierbare Funktion auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$. Finde eine homogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung, für die f eine Lösung ist.

Aufgabe 29.7. Es sei
$$y' = g(t)y$$
eine homogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung mit einer unendlich oft differenzierbaren Funktion g und es sei y eine differenzierbare Lösung.

a) Zeige, dass y ebenfalls unendlich oft differenzierbar ist.

b) Es sei $y(t_0) = 0$ für einen Zeitpunkt t_0. Zeige unter Verwendung von Aufgabe 19.17, dass $y^{(n)}(t_0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Aufgabe 29.8.*

a) Finde alle Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichung ($t \in \mathbb{R}_+$)
$$y' = \frac{y}{t}\,.$$

b) Finde alle Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichung ($t \in \mathbb{R}_+$)
$$y' = \frac{y}{t} + t^7\,.$$

c) Löse das Anfangswertproblem
$$y' = \frac{y}{t} + t^7 \text{ und } y(1) = 5\,.$$

Die folgende Aussage nennt man das *Superpositionsprinzip* für inhomogene lineare Differentialgleichungen. Es besagt insbesondere, dass die Differenz zweier Lösungen einer inhomogenen linearen Differentialgleichung eine Lösung der zugehörigen homogenen linearen Differentialgleichung ist.

Aufgabe 29.9. Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein reelles Intervall und seien

$$g, h_1, h_2 : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

Funktionen. Es sei y_1 eine Lösung der Differentialgleichung $y' = g(t)y + h_1(t)$ und es sei y_2 eine Lösung der Differentialgleichung $y' = g(t)y + h_2(t)$. Zeige, dass dann $y_1 + y_2$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$y' = g(t)y + h_1(t) + h_2(t)$$

ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 29.10. (2 Punkte)

Bestätige durch Nachrechnen, dass die in Beispiel 29.7 gefundenen Funktionen

$$y(t) = c\frac{\sqrt{t-1}}{\sqrt{t+1}}$$

die Differentialgleichung

$$y' = y/(t^2-1)$$

erfüllen.

Aufgabe 29.11. (3 Punkte)

Finde sämtliche Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$y' = \frac{y}{t^2-3}\,.$$

Aufgabe 29.12. (5 Punkte)

Löse das Anfangswertproblem

$$y' = \frac{t}{t^2+2}y \text{ mit } y(3) = 7\,.$$

Aufgabe 29.13. (3 Punkte)

Finde die Lösungen der inhomogenen linearen Differentialgleichung

$$y' = y + e^{2t} - 4e^{-3t} + 1\,.$$

Aufgabe 29.14. (5 Punkte)

Finde die Lösungen der inhomogenen linearen Differentialgleichung

$$y' = \frac{y}{t} + \frac{t^3-2t+5}{t^2-3}\,.$$

30. Arbeitsblatt

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 30.1. Skizziere die zugrunde liegenden Vektorfelder der Differentialgleichungen

$$y' = \frac{1}{y},\ y' = ty^3 \text{ und } y' = -ty^3$$

sowie die in Beispiel 30.6, Beispiel 30.7 und Beispiel 30.8 angegebenen Lösungskurven.

Aufgabe 30.2. Bestätige die in Beispiel 30.6, Beispiel 30.7 und Beispiel 30.8 gefundenen Lösungskurven der Differentialgleichungen

$$y' = \frac{1}{y},\ y' = ty^3 \text{ und } y' = -ty^3$$

durch Ableiten.

Aufgabe 30.3. Interpretiere eine ortsunabhängige Differentialgleichung als eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen anhand des Lösungsansatzes für getrennte Variablen.

Aufgabe 30.4. Bestimme alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y' = y\,,$$

mit dem Lösungsansatz für getrennte Variablen.

Aufgabe 30.5. Bestimme alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y' = e^y\,,$$

mit dem Lösungsansatz für getrennte Variablen.

Aufgabe 30.6. Bestimme alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y' = \frac{1}{\sin y}\,,$$

mit dem Lösungsansatz für getrennte Variablen.

Aufgabe 30.7. Löse die Differentialgleichung

$$y' = ty$$

mit dem Lösungsansatz für getrennte Variablen.

Aufgabe 30.8. Betrachte die in Beispiel 30.9 gefundenen Lösungen

$$y(t) = \frac{g}{1 + \exp(-st)}$$

der logistischen Differentialgleichung.

a) Skizziere diese Funktion (für geeignete s und g).

b) Bestimme die Grenzwerte für $t \to \infty$ und $t \to -\infty$.

c) Studiere das Monotonieverhalten dieser Funktionen.

d) Für welche t besitzt die Ableitung von $y(t)$ ein Maximum (Für die Funktion selbst bedeutet dies einen Wendepunkt, man spricht auch von einem *Vitalitätsknick*)

e) Über welche Symmetrien verfügen diese Funktionen?

Aufgabe 30.9.*

Finde eine Lösung für die gewöhnliche Differentialgleichung

$$y' = \frac{t}{t^2 - 1} y^2$$

mit $t > 1$ und $y < 0$.

Aufgabe 30.10.*

Bestimme die Lösungen der Differentialgleichung ($y > 0$)

$$y' = t^2 y^3$$

mit dem Lösungsansatz für getrennte Variablen. Was ist der Definitionsbereich der Lösungen?

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 30.11. (3 Punkte)

Zeige, dass eine Differentialgleichung der Form

$$y' = g(t) \cdot y^2$$

mit einer stetigen Funktion

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto g(t),$$

auf einem Intervall I' die Lösungen

$$y(t) = -\frac{1}{G(t)}$$

besitzt, wobei G eine Stammfunktion zu g mit $G(I') \subseteq \mathbb{R}_+$ sei.

Aufgabe 30.12. (3 Punkte)

Bestimme alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y' = ty^2,\ y > 0\,,$$

mit dem Lösungsansatz für getrennte Variablen.

Aufgabe 30.13. (4 Punkte)

Bestimme alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y' = t^3y^3,\ y > 0\,,$$

mit dem Lösungsansatz für getrennte Variablen.

Aufgabe 30.14. (5 Punkte)

Bestimme alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y' = ty + t$$

mit

a) dem Lösungsansatz für inhomogene lineare Differentialgleichungen,

b) dem Lösungsansatz für getrennte Variablen.

Fachbereich Mathematik/Informatik
Prof. Dr. H. Brenner

Mathematik für Anwender I

Beispielklausur 1

Dauer: Zwei volle Stunden + 10 Minuten Orientierung, in denen noch nicht geschrieben werden darf.

Es sind keine Hilfsmittel erlaubt.

Alle Antworten sind zu begründen.

Es gibt insgesamt 64 Punkte. Es gilt die Sockelregelung, d.h. die Bewertung pro Aufgabe(nteil) beginnt bei der halben Punktzahl. Die Gesamtpunktzahl geht doppelt in Ihre Übungspunktzahl ein.

Zur Orientierung: Zum Bestehen braucht man 16 Punkte, ab 32 Punkten gibt es eine Eins.

Tragen Sie auf dem Deckblatt und jedem weiteren Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer leserlich ein.

Viel Erfolg!

Name, Vorname: ....

Matrikelnummer: ....

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	$\sum$
mögl. Pkt.:	4	4	4	3	4	3	8	3	4	6	5	3	5	3	5	64
erhalt. Pkt.:																

Note:

Aufgabe 1. (4 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

(1) Die *komplexe Konjugation.*
(2) Die *lineare Unabhängigkeit* von Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ in einem K-Vektorraum V.
(3) Eine *lineare* Abbildung

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

zwischen zwei K-Vektorräumen V und W.
(4) Eine *Cauchy-Folge* in $\mathbb{R}$.
(5) Die *Exponentialreihe* für $x \in \mathbb{R}$.
(6) Die *Stetigkeit* einer Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

(7) Eine *Treppenfunktion* auf einem Intervall $[a, b]$.
(8) Eine *Differentialgleichung mit getrennten Variablen.*

Aufgabe 2. (4 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze.

(1) Die *Dimensionsformel* für lineare Abbildungen.
(2) Das *Quetschkriterium* für reelle Folgen.
(3) Der *Zwischenwertsatz* für stetige Funktionen.
(4) Der *Mittelwertsatz* der Differentialrechnung.

Aufgabe 3. (4 Punkte)

Zeige durch vollständige Induktion, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Zahl

$$6^{n+2} + 7^{2n+1}$$

ein Vielfaches von 43 ist.

Aufgabe 4. (3 Punkte)

Drücke in $\mathbb{R}^3$ den Vektor

$$(1, 0, 0)$$

als Linearkombination der Vektoren

$$(1, -2, 5), (4, 0, 3) \text{ und } (2, 1, 1)$$

aus.

Aufgabe 5. (4 Punkte)
Bestimme den Kern der linearen Abbildung

$$\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 2 \\ 3 & -2 & 7 & -1 \\ 2 & -1 & -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 6. (3 Punkte)
Bestimme, für welche $x \in \mathbb{C}$ die Matrix

$$\begin{pmatrix} x^2 + x & -x \\ -x^3 + 2x^2 + 5x - 1 & x^2 - x \end{pmatrix}$$

invertierbar ist.

Aufgabe 7. (8 Punkte)
Es sei V ein Vektorraum und

$$v_1, \ldots, v_n$$

eine Familie von Vektoren in V. Zeige, dass die Familie genau dann eine Basis von V bildet, wenn es sich um ein minimales Erzeugendensystem handelt (d.h. sobald man einen Vektor v_i weglässt, liegt kein Erzeugendensystem mehr vor).

Aufgabe 8. (3 Punkte)
Entscheide, ob die Folge

$$x_n := \frac{3n^3 - n^2 - 7}{2n^3 + n + 8}$$

in $\mathbb{Q}$ konvergiert und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

Aufgabe 9. (4 Punkte)
Zeige, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$$

konvergiert.

Aufgabe 10. (6 Punkte)

Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) = 1 + \ln x - \frac{1}{x}.$$

a) Zeige, dass f eine stetige Bijektion zwischen $\mathbb{R}_+$ und $\mathbb{R}$ definiert.

b) Bestimme das Urbild u von 0 unter f sowie $f'(u)$ und $(f^{-1})'(0)$. Fertige eine grobe Skizze für die Umkehrfunktion f^{-1} an.

Aufgabe 11. (5 Punkte)

Betrachte die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) = (2x+3)e^{-x^2}.$$

Bestimme die Nullstellen und die lokalen (globalen) Extrema von f. Fertige eine grobe Skizze für den Funktionsverlauf an.

Aufgabe 12. (3 Punkte)

Bestimme die Taylor-Reihe der Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ im Punkt $a = 2$ bis zur Ordnung 4 (man gebe also das Taylor-Polynom vom Grad 4 zum Entwicklungspunkt 2 an, wobei die Koeffizienten in einer möglichst einfachen Form angegeben werden sollen).

Aufgabe 13. (5 Punkte)

Es seien

$$f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

zwei differenzierbare Funktionen. Es sei $a \in \mathbb{R}$. Es gelte

$$f(a) \geq g(a) \text{ und } f'(x) \geq g'(x) \text{ für alle } x \geq a\,.$$

Zeige, dass

$$f(x) \geq g(x) \text{ für alle } x \geq a \text{ gilt}\,.$$

Aufgabe 14. (3 Punkte)

Berechne das bestimmte Integral zur Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) = 2x^3 + 3e^x - \sin x\,,$$

über $[-1, 0]$.

Aufgabe 15. (5 Punkte)

Finde eine Lösung für die gewöhnliche Differentialgleichung

$$y' = \frac{t}{t^2 - 1} y^2$$

mit $t > 1$ und $y < 0$.

Fachbereich Mathematik/Informatik
Prof. Dr. H. Brenner

Mathematik für Anwender I

Beispielklausur I mit Lösungen

Dauer: Zwei volle Stunden + 10 Minuten Orientierung, in denen noch nicht geschrieben werden darf.

Es sind keine Hilfsmittel erlaubt.

Alle Antworten sind zu begründen.

Es gibt insgesamt 64 Punkte. Es gilt die Sockelregelung, d.h. die Bewertung pro Aufgabe(nteil) beginnt bei der halben Punktzahl. Die Gesamtpunktzahl geht doppelt in Ihre Übungspunktzahl ein.

Zur Orientierung: Zum Bestehen braucht man 16 Punkte, ab 32 Punkten gibt es eine Eins.

Tragen Sie auf dem Deckblatt und jedem weiteren Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer leserlich ein.

Viel Erfolg!

Name, Vorname: ....

Matrikelnummer: ....

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	$\sum$
mögl. Pkt.:	4	4	4	3	4	3	8	3	4	6	5	3	5	3	5	64
erhalt. Pkt.:																

Note:

Aufgabe 1. Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

(1) Die *komplexe Konjugation.*
(2) Die *lineare Unabhängigkeit* von Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ in einem K-Vektorraum V.
(3) Eine *lineare* Abbildung

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

zwischen zwei K-Vektorräumen V und W.
(4) Eine *Cauchy-Folge* in $\mathbb{R}$.
(5) Die *Exponentialreihe* für $x \in \mathbb{R}$.
(6) Die *Stetigkeit* einer Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

(7) Eine *Treppenfunktion* auf einem Intervall $[a, b]$.
(8) Eine *Differentialgleichung mit getrennten Variablen.*

Lösung

(1) Die Abbildung

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ z = a + bi \longmapsto \overline{z} = a - bi,$$

heißt *komplexe Konjugation.*
(2) Die Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ heißen *linear unabhängig*, wenn eine Gleichung

$$\sum_{i=1}^{n} a_i v_i = 0$$

nur bei $a_i = 0$ für alle i möglich ist.
(3) Eine Abbildung

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

heißt *lineare Abbildung*, wenn die beiden folgenden Eigenschaften erfüllt sind.
   (a) $\varphi(u + v) = \varphi(u) + \varphi(v)$ für alle $u, v \in V$.
   (b) $\varphi(sv) = s\varphi(v)$ für alle $s \in K$ und $v \in V$.
(4) Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ heißt *Cauchy-Folge*, wenn folgende Bedingung erfüllt ist.
   Zu jedem $\epsilon \in \mathbb{R}$, $\epsilon > 0$, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $n, m \geq n_0$ die Beziehung

$$|x_n - x_m| \leq \epsilon$$

gilt.

(5) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ heißt die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

die *Exponentialreihe* in x.

(6) Eine Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

heißt stetig, wenn für jedes $x \in \mathbb{R}$ und für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass

$$\varphi\big(]x-\delta, x+\delta[\big) \subseteq]\varphi(x)-\epsilon, \varphi(x)+\epsilon[$$

gilt.

(7) Eine Funktion

$$t : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

heißt eine *Treppenfunktion*, wenn es eine Unterteilung

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b$$

von $[a,b]$ gibt derart, dass t auf jedem offenen Teilintervall $]a_{i-1}, a_i[$ konstant ist.

(8) Eine Differentialgleichung der Form

$$y' = g(t) \cdot h(y)$$

mit zwei Funktionen (dabei sind I und J reelle Intervalle)

$$g : I \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto g(t),$$

und

$$h : J \longrightarrow \mathbb{R},\ y \longmapsto h(y),$$

heißt *gewöhnliche Differentialgleichung mit getrennten Variablen.*

Aufgabe 2. Formuliere die folgenden Sätze.

(1) Die *Dimensionsformel* für lineare Abbildungen.
(2) Das *Quetschkriterium* für reelle Folgen.
(3) Der *Zwischenwertsatz* für stetige Funktionen.
(4) Der *Mittelwertsatz* der Differentialrechnung.

Lösung

(1) Es sei K ein Körper und es seien V und W zwei K-Vektorräume. Es sei

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

eine K-lineare Abbildung und V sei endlichdimensional. Dann gilt

$$\dim(V) = \dim(\text{kern } \varphi) + \dim(\text{bild } \varphi)\,.$$

(2) Es seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ drei reelle Folgen. Es gelte

$$x_n \leq y_n \leq z_n \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren beide gegen den gleichen Grenzwert a. Dann konvergiert auch $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen diesen Grenzwert a.

(3) Seien $a \leq b$ reelle Zahlen und sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Es sei $c \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl zwischen $f(a)$ und $f(b)$. Dann gibt es ein $x \in [a, b]$ mit $f(x) = c$.

(4) Sei $a < b$ und sei

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige, auf $]a, b[$ differenzierbare Funktion. Dann gibt es ein $c \in\,]a, b[$ mit

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,.$$

Aufgabe 3. Zeige durch vollständige Induktion, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Zahl

$$6^{n+2} + 7^{2n+1}$$

ein Vielfaches von 43 ist.

Lösung

Für $n = 0$ ist

$$6^2 + 7 \;=\; 43$$

ein Vielfaches von 43. Sei nun die Aussage für n bewiesen und betrachten wir den Ausdruck für $n + 1$. Dieser ist

$$\begin{aligned} 6^{n+1+2} + 7^{2(n+1)+1} &= 6 \cdot 6^{n+2} + 7^2 \cdot 7^{2n+1} \\ &= 6 \cdot 6^{n+2} + (6 + 43)7^{2n+1} \\ &= 6(6^{n+2} + 7^{2n+1}) + 43 \cdot 7^{2n+1} \\ &= 6 \cdot 43 \cdot s + 43 \cdot 7^{2n+1}, \end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt die Induktionsvoraussetzung verwendet wurde. Daher ist diese Zahl ein Vielfaches von 43.

Aufgabe 4. Drücke in $\mathbb{R}^3$ den Vektor

$$(1, 0, 0)$$

als Linearkombination der Vektoren

$$(1, -2, 5), (4, 0, 3) \text{ und } (2, 1, 1)$$

aus.

Lösung

Es geht darum, das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x + 4y + 2z &= 1 \\ -2x \quad\;\; + z &= 0 \\ 5x + 3y + z &= 0 \end{aligned}$$

zu lösen. Wir eliminieren mit Hilfe der ersten Gleichung die Variable y aus der dritten Gleichung. Das resultierende System ist ($III' = 3I - 4III$)

$$\begin{aligned} x + 4y + 2z &= 1 \\ -2x \quad\;\; + z &= 0 \\ -17x \quad\;\; + 2z &= 3\,. \end{aligned}$$

Wir eliminieren nun aus III' mittels II die Variable z, das ergibt ($III' - 2II$)

$$\begin{aligned} x + 4y + 2z &= 1 \\ -2x \quad\;\; + z &= 0 \\ -13x \qquad\quad &= 3\,. \end{aligned}$$

Wir können jetzt dieses System lösen. Es ist

$$x = -\frac{3}{13}\,,$$

$$z = 2x = -\frac{6}{13}$$

und

$$y = \frac{-5x - z}{3} = \frac{15 + 6}{39} = \frac{21}{39} = \frac{7}{13}.$$

Also ist

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{3}{13}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + \frac{7}{13}\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{6}{13}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5. Bestimme den Kern der linearen Abbildung

$$\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 2 \\ 3 & -2 & 7 & -1 \\ 2 & -1 & -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}.$$

Lösung

Es geht darum, das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x + y + 5z + 2w &= 0 \\ 3x - 2y + 7z \quad - w &= 0 \\ 2x \quad - y - 4z + 3w &= 0 \end{aligned}$$

zu lösen. Wir eliminieren mit Hilfe der ersten Gleichung die Variable y. Das resultierende System ist ($II' = II + 2I$, $III' = III + I$)

$$\begin{aligned} 2x + y + 5z + 2w &= 0 \\ 7x \quad + 17z + 3w &= 0 \\ 4x \quad + z + 5w &= 0\,. \end{aligned}$$

Wir eliminieren nun aus II' mittels III' die Variable z, das ergibt ($II' - 17III'$)

$$\begin{aligned} 2x + y + 5z + 2w &= 0 \\ 4x \quad + z + 5w &= 0 \\ -61x \qquad - 82w &= 0\,. \end{aligned}$$

Wir können jetzt dieses System lösen, wobei $x \neq 0$ die anderen Variablen eindeutig festlegt. Sei $x = 82$. Dann ist $w = -61$. Damit ist

$$z = -4x - 5w = -4 \cdot 82 - 5(-61) = -328 + 305 = -23.$$

Schließlich ist

$$y = -2x - 5z - 2w = -2(82) - 5(-23) - 2(-61) = -164 + 115 + 122 = 73\,.$$

Die Lösungsmenge, also der Kern, ist somit

$$\{s \begin{pmatrix} 82 \\ 73 \\ -23 \\ -61 \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R}\}\,.$$

Aufgabe 6. Bestimme, für welche $x \in \mathbb{C}$ die Matrix

$$\begin{pmatrix} x^2 + x & -x \\ -x^3 + 2x^2 + 5x - 1 & x^2 - x \end{pmatrix}$$

invertierbar ist.

Lösung

Eine Matrix ist genau dann invertierbar, wenn ihre Determinante $\neq 0$ ist. Die Determinante der Matrix ist

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix} x^2+x & -x \\ -x^3+2x^2+5x-1 & x^2-x \end{pmatrix} &= (x^2+x)(x^2-x) \\ &\quad +x(-x^3+2x^2+5x-1) \\ &= x^4-x^2-x^4+2x^3+5x^2-x \\ &= 2x^3+4x^2-x=x(2x^2+4x-1).\end{aligned}$$

Dies ist gleich 0 bei $x_1 = 0$ oder bei $2x^2 + 4x - 1 = 0$. Diese quadratische Gleichung ist äquivalent zu $x^2 + 2x - \frac{1}{2} = 0$ bzw. zu

$$(x+1)^2 - 1 - \frac{1}{2} = 0\,.$$

Also ist

$$x + 1 = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$$

und damit

$$x_2 = \sqrt{\frac{3}{2}} - 1 \text{ und } x_3 = -\sqrt{\frac{3}{2}} - 1\,.$$

Die einzigen komplexen Zahlen, bei denen die Matrix nicht invertierbar ist, sind also

$$0,\ \sqrt{\frac{3}{2}} - 1,\ -\sqrt{\frac{3}{2}} - 1\,.$$

Aufgabe 7. Es sei V ein Vektorraum und

$$v_1, \ldots, v_n$$

eine Familie von Vektoren in V. Zeige, dass die Familie genau dann eine Basis von V bildet, wenn es sich um ein minimales Erzeugendensystem handelt (d.h. sobald man einen Vektor v_i weglässt, liegt kein Erzeugendensystem mehr vor).

Lösung

Die Familie sei zunächst eine Basis. Dann ist sie insbesondere ein Erzeugendensystem. Nehmen wir einen Vektor, sagen wir v_1, aus der Familie heraus. Wir müssen zeigen, dass dann die verbleibende Familie, also $v_2, \ldots, v_n$ kein Erzeugendensystem mehr ist. Wenn sie ein Erzeugendensystem wäre, so wäre insbesondere v_1 als Linearkombination der Vektoren darstellbar, d.h. man hätte

$$v_1 = \sum_{i=2}^{n} \lambda_i v_i \,.$$

Dann ist aber

$$v_1 - \sum_{i=2}^{n} \lambda_i v_i$$

eine nichttriviale Darstellung der 0, im Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit der Familie.

Sei nun die Familie ein minimales Erzeugendensystem. Um zu zeigen, dass eine Basis vorliegt, muss also lediglich gezeigt werden, dass die Familie linear unabhängig ist. Nehmen wir an, sie sei nicht linear unabhängig. Dann gibt es eine Darstellung

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n = 0\,,$$

wobei mindestens ein Koeffizient $a_i \neq 0$ ist. Wir behaupten, dass dann auch die um v_i reduzierte Familie noch ein Erzeugendensystem ist im Widerspruch zur Minimalität. Dazu sei $v \in V$ ein beliebiger Vektor, den man als

$$v = b_1v_1 + \ldots + b_iv_i + \ldots + b_nv_n$$

schreiben kann. Wir können v_i schreiben als

$$v_i = -\frac{a_1}{a_i}v_1 - \ldots - \frac{a_{i-1}}{a_i}v_{i-1} - \frac{a_{i+1}}{a_i}v_{i+1} - \ldots - \frac{a_n}{a_i}v_n \,.$$

Damit ist

$$\begin{aligned} v &= b_1v_1 + \ldots + b_iv_i + \ldots + b_nv_n \\ &= b_1v_1 + \ldots + b_i\left(-\frac{a_1}{a_i}v_1 - \ldots - \frac{a_{i-1}}{a_i}v_{i-1} - \frac{a_{i+1}}{a_i}v_{i+1} - \ldots - \frac{a_n}{a_i}v_n\right) \\ &\quad + \ldots + b_nv_n, \end{aligned}$$

woraus ablesbar ist, dass man v auch als Linearkombination der $v_1, \ldots, v_{i-1}$, $v_{i+1}, \ldots, v_n$ darstellen kann.

Aufgabe 8. Entscheide, ob die Folge

$$x_n := \frac{3n^3 - n^2 - 7}{2n^3 + n + 8}$$

in $\mathbb{Q}$ konvergiert und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

Lösung

Für $n \geq 1$ kann man die Folge (durch Erweiterung mit $1/n^3$) schreiben als

$$x_n := \frac{3n^3 - n^2 - 7}{2n^3 + n + 8} = \frac{3 - \frac{1}{n} - \frac{7}{n^3}}{2 + \frac{1}{n^2} + \frac{8}{n^3}}\,.$$

Folgen vom Typ a/n, a/n^2 und a/n^3 sind Nullfolgen. Aufgrund der Summenregel für konvergente Folgen konvergiert der Zähler gegen 3 und der Nenner gegen 2, so dass nach der Quotientenregel die Folge insgesamt gegen $3/2 \in \mathbb{Q}$ konvergiert.

Aufgabe 9. Zeige, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$$

konvergiert.

Lösung

Wir zeigen, dass die Reihe absolut konvergiert, woraus nach Satz 14.9 die Konvergenz folgt. Wegen $-1 \leq \sin x \leq 1$ ist

$$\left| \frac{\sin n}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}.$$

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert nach Beispiel 14.12, so dass $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin x}{n^2} \right|$ nach dem Majorantenkriterium konvergiert.

Aufgabe 10. Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) = 1 + \ln x - \frac{1}{x}.$$

a) Zeige, dass f eine stetige Bijektion zwischen $\mathbb{R}_+$ und $\mathbb{R}$ definiert.

b) Bestimme das Urbild u von 0 unter f sowie $f'(u)$ und $(f^{-1})'(0)$. Fertige eine grobe Skizze für die Umkehrfunktion f^{-1} an.

Lösung

Die Funktion f ist differenzierbar und die Ableitung ist

$$f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\,.$$

Für $x > 0$ sind diese beiden Summanden positiv, so dass die Ableitung stets positiv ist und f daher streng wachsend ist. Daher ist die Abbildung injektiv. Die Funktion ist stetig, da sie differenzierbar ist. Daher genügt es für die Surjektivität, aufgrund des Zwischenwertsatzes, nachzuweisen, dass beliebig große und beliebig kleine Werte angenommen werden.

Für $0 < x < 1$ ist $1 - \frac{1}{x} < 0$ und daher

$$f(x) \leq \ln x\,.$$

Da der Logarithmus für $x \to 0$ beliebig kleine Werte annimmt, gilt das auch für f.

Für $x > 1$ ist $1 - \frac{1}{x} > 0$ und daher

$$f(x) \geq \ln x\,.$$

Da der Logarithmus für $x \to \infty$ beliebig große Werte annimmt, gilt das auch für f.

b) Durch Einsetzen ergibt sich $f(1) = 0$, also ist $u = 1$ das Urbild von 0. Aufgrund der Berechnung der Ableitung oben ist

$$f'(1) = 2\,.$$

Aufgrund der Regel für die Ableitung der Umkehrfunktion gilt daher

$$(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(0))} = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{2}\,.$$

Aufgabe 11. Betrachte die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) = (2x+3)e^{-x^2}.$$

Bestimme die Nullstellen und die lokalen (globalen) Extrema von f. Fertige eine grobe Skizze für den Funktionsverlauf an.

Lösung

Da die Exponentialfunktion keine Nullstelle besitzt, liegt nur bei $2x + 3 = 0$, also bei $x_0 = -\frac{3}{2}$ eine Nullstelle vor. Unterhalb davon ist die Funktion negativ, oberhalb davon positiv.

Zur Bestimmung der lokalen Extrema leiten wir ab, was zu

$$f'(x) = 2e^{-x^2} + (2x+3)(-2x)e^{-x^2} = e^{-x^2}(-4x^2 - 6x + 2)$$

führt. Die Nullstellenbestimmung der Ableitung führt auf

$$x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} = 0\,.$$

Quadratisches Ergänzen führt zu

$$\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16} - \frac{1}{2} = 0$$

bzw.

$$\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{17}{16}\,.$$

Also ist

$$x + \frac{3}{4} = \pm\frac{\sqrt{17}}{4}$$

und somit
$$x_1 = -\frac{\sqrt{17}}{4} - \frac{3}{4} \text{ und } x_2 = +\frac{\sqrt{17}}{4} - \frac{3}{4}\,.$$
Für $x < x_1$ ist die Ableitung negativ, für x mit $x_1 < x < x_2$ ist sie positiv und für $x > x_2$ wieder negativ. Daher ist die Funktion f unterhalb von x_1 streng fallend, zwischen x_1 und x_2 streng wachsend und oberhalb von x_2 wieder streng fallend. Daher liegt in x_1 ein isoliertes lokales Minimum und in x_2 ein isoliertes lokales Maximum vor. Da es sonst keine lokalen Extrema gibt, und die Funktion für $x \to -\infty$ wächst, aber negativ bleibt, und für $x \to +\infty$ fällt, aber positiv bleibt, sind dies auch globale Extrema.

Aufgabe 12. Bestimme die Taylor-Reihe der Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ im Punkt $a = 2$ bis zur Ordnung 4 (man gebe also das Taylor-Polynom vom Grad 4 zum Entwicklungspunkt 2 an, wobei die Koeffizienten in einer möglichst einfachen Form angegeben werden sollen).

Lösung

Die erste Ableitung ist
$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} = -x^{-2}, \text{ also } f'(2) = -\frac{1}{4}\,.$$
Die zweite Ableitung ist
$$f''(x) = 2x^{-3}, \text{ also } f''(2) = \frac{1}{4}\,.$$
Die dritte Ableitung ist
$$f'''(x) = -6x^{-4}, \text{ also } f'''(2) = -\frac{3}{8}\,.$$
Die vierte Ableitung ist
$$f''''(x) = 24x^{-5}, \text{ also } f''''(2) = \frac{24}{32} = \frac{3}{4}\,.$$
Das Taylor-Polynom vom Grad 4 ist demnach
$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x-2) + \frac{1}{4 \cdot 2}(x-2)^2 - \frac{3}{8 \cdot 3!}(x-2)^3 + \frac{3}{4 \cdot 4!}(x-2)^4$$
bzw.
$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x-2) + \frac{1}{8}(x-2)^2 - \frac{1}{16}(x-2)^3 + \frac{1}{32}(x-2)^4\,.$$

Aufgabe 13. Es seien

$$f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

zwei differenzierbare Funktionen. Es sei $a \in \mathbb{R}$. Es gelte

$$f(a) \geq g(a) \text{ und } f'(x) \geq g'(x) \text{ für alle } x \geq a\,.$$

Zeige, dass

$$f(x) \geq g(x) \text{ für alle } x \geq a \text{ gilt}\,.$$

Lösung

Wir betrachten die Hilfsfunktion

$$h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto h(x) = f(x) - g(x).$$

Nach den Voraussetzungen ist h differenzierbar, es ist $h(a) \geq 0$ und es ist $h'(x) \geq 0$ für alle $x \geq a$. Wir müssen zeigen, dass $h(x) \geq 0$ für alle $x \geq a$ ist. Nehmen wir also an, dass es ein $x > a$ gibt mit $h(x) < 0$. Aufgrund des Mittelwertsatzes gibt es ein $c \in [a, x]$ mit

$$h'(c) = \frac{h(x) - h(a)}{x - a}\,.$$

Da diese Zahl negativ ist, ergibt sich ein Widerspruch.

Aufgabe 14. Berechne das bestimmte Integral zur Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) = 2x^3 + 3e^x - \sin x\,,$$

über $[-1, 0]$.

Lösung

Eine Stammfunktion ist

$$\frac{1}{2}x^4 + 3e^x + \cos x\,.$$

Daher ist das bestimmte Integral gleich

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{0} f(x)\,dx &= \left(\frac{1}{2}x^4 + 3e^x + \cos x\right)\Big|_{-1}^{0} \\ &= (0 + 3 + 1) - \left(\frac{1}{2}(-1)^4 + 3e^{-1} + \cos(-1)\right) \\ &= \frac{7}{2} - 3e^{-1} - \cos(-1)\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 15. Finde eine Lösung für die gewöhnliche Differentialgleichung

$$y' = \frac{t}{t^2 - 1} y^2$$

mit $t > 1$ und $y < 0$.

Lösung

Es liegt eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen vor. Wir setzen

$$h(y) = \frac{1}{y^2},$$

davon ist

$$H(y) = -y^{-1}$$

eine Stammfunktion. Die Umkehrfunktion davon ist ebenfalls

$$H^{-1}(u) = -u^{-1}.$$

Wir setzen weiter $g(t) = \frac{t}{t^2-1}$. Wir machen den Ansatz für die Partialbruchzerlegung, also

$$\frac{t}{t^2 - 1} = \frac{a}{t-1} + \frac{b}{t+1}.$$

Daraus ergibt sich die Bedingung

$$t = a(t+1) + b(t-1)$$

und daraus

$$a = b = \frac{1}{2}.$$

Also ist

$$G(t) = \frac{1}{2} \ln(t+1) + \frac{1}{2} \ln(t-1)$$

eine Stammfunktion von $g(t)$. Daher ist

$$y(t) = \frac{-2}{\ln(t-1) + \ln(t+1)}$$

eine Lösung, die für $t > 1$ definiert ist und für die $y(t) < 0$ gilt.

Fachbereich Mathematik/Informatik
Prof. Dr. H. Brenner

Mathematik für Anwender I

Beispielklausur 2

Dauer: Zwei volle Stunden + 10 Minuten Orientierung, in denen noch nicht geschrieben werden darf.

Es sind keine Hilfsmittel erlaubt.

Alle Antworten sind zu begründen.

Es gibt insgesamt 64 Punkte. Es gilt die Sockelregelung, d.h. die Bewertung pro Aufgabe(nteil) beginnt bei der halben Punktzahl. Die Gesamtpunktzahl geht doppelt in Ihre Übungspunktzahl ein.

Zur Orientierung: Zum Bestehen braucht man 16 Punkte, ab 32 Punkten gibt es eine Eins.

Tragen Sie auf dem Deckblatt und jedem weiteren Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer leserlich ein.

Viel Erfolg!

Name, Vorname: ....

Matrikelnummer: ....

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	$\sum$
mögl. Pkt.:	4	4	4	4	7	4	3	5	3	2	3	6	3	6	6	64
erhalt. Pkt.:																

Note:

Aufgabe 1. (4 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

(1) Eine *injektive* Abbildung
$$f : M \longrightarrow N.$$
(2) Ein *Untervektorraum* $U \subseteq V$ in einem K-Vektorraum V.
(3) Eine *lineare* Abbildung
$$\varphi : V \longrightarrow W$$
zwischen zwei K-Vektorräumen V und W.
(4) Die *geometrische Reihe* für $x \in \mathbb{R}$.
(5) Die *Stetigkeit* einer Abbildung
$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
in einem Punkt $a \in \mathbb{R}$.
(6) Die *Differenzierbarkeit* einer Abbildung
$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
in einem Punkt $a \in \mathbb{R}$.
(7) Das *Taylor-Polynom vom Grad* n zu einer n-mal differenzierbaren Funktion
$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
im Punkt 0.
(8) Die *Fakultätsfunktion* $\operatorname{Fak}(x)$ (für $x \in \mathbb{R}$, $x > -1$).

Aufgabe 2. (4 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze.

(1) Der *Binomische Lehrsatz.*
(2) Das *Injektivitätskriterium für lineare Abbildungen.*
(3) Das *Quotientenkriterium* für Reihen.
(4) Der *Mittelwertsatz* der Integralrechnung.

Aufgabe 3. (4 Punkte)

Zeige, dass für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ die Abschätzung
$$3^n \geq n^3$$
gilt.

Aufgabe 4. (4 Punkte)

Die Zeitungen A, B und C verkaufen Zeitungsabos und konkurrieren dabei um einen lokalen Markt mit 100000 potentiellen Lesern. Dabei sind innerhalb eines Jahres folgende Kundenbewegungen zu beobachten.

(1) Die Abonnenten von A bleiben zu 80% bei A, 10% wechseln zu B, 5% wechseln zu C und 5% werden Nichtleser.
(2) Die Abonnenten von B bleiben zu 60% bei B, 10% wechseln zu A, 20% wechseln zu C und 10% werden Nichtleser.
(3) Die Abonnenten von C bleiben zu 70% bei C, niemand wechselt zu A, 10% wechseln zu B und 20% werden Nichtleser.
(4) Von den Nichtlesern entscheiden sich je 10% für ein Abonnement von A, B oder C, die übrigen bleiben Nichtleser.

a) Erstelle die Matrix, die die Kundenbewegungen innerhalb eines Jahres beschreibt.

b) In einem bestimmten Jahr haben alle drei Zeitungen je 20000 Abonnenten und es gibt 40000 Nichtleser. Wie sieht die Verteilung ein Jahr später aus?

c) Die drei Zeitungen expandieren in eine zweite Stadt, wo es bislang überhaupt keine Zeitungen gibt, aber ebenfalls 100000 potentielle Leser. Wie viele Leser haben dort die einzelnen Zeitungen (und wie viele Nichtleser gibt es noch) nach drei Jahren, wenn dort die gleichen Kundenbewegungen zu beobachten sind?

Aufgabe 5. (7 Punkte)

Es sei K ein Körper und V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Zeige, dass es einen K-Vektorraum W und eine surjektive K-lineare Abbildung

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

gibt derart, dass $U = \operatorname{kern} \varphi$ ist.

Aufgabe 6. (4 Punkte)

Bestimme die komplexen Zahlen z, für die die Matrix

$$\begin{pmatrix} z & 2 & 2z+1 \\ 3 & 1 & 4 \\ z & 5 & z \end{pmatrix}$$

nicht invertierbar ist.

Aufgabe 7. (3 Punkte)

Führe die ersten drei Schritte des babylonischen Wurzelziehens zu $b = 7$ mit dem Startwert $a_0 = 3$ durch (es sollen also die Approximationen a_1, a_2, a_3 für $\sqrt{7}$ berechnet werden; diese Zahlen müssen als gekürzte Brüche angegeben werden).

Aufgabe 8. (5 Punkte)

Untersuche, ob die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+5}{4n^3 - 3n + 2}$$

konvergiert oder divergiert.

Aufgabe 9. (3 Punkte)

Berechne das Cauchy-Produkt bis zur vierten Potenz der geometrischen Reihe mit der Exponentialreihe.

Aufgabe 10. (2 Punkte)

Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) = \cos(\ln x)\,.$$

a) Bestimme die Ableitung f'.

b) Bestimme die zweite Ableitung f''.

Aufgabe 11. (3 Punkte)

Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) = x^2 + 1.$$

Bestimme die Tangenten an f, die lineare Funktionen sind (die also durch den Nullpunkt verlaufen).

Aufgabe 12. (6 Punkte)

Beweise den Mittelwertsatz der Integralrechnung.

Aufgabe 13. (3 Punkte)

Berechne das bestimmte Integral zur Funktion

$$f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2x+3} - e^{-x},$$

über $[1,4]$.

Aufgabe 14. (6 (5+1) Punkte)

Es sei

$$f(x) = \frac{x^3 + 7x^2 - 5x + 4}{x^2 - 3}\,.$$

a) Bestimme die reelle Partialbruchzerlegung von $f(x)$.

b) Bestimme eine Stammfunktion von $f(x)$.

Aufgabe 15. (6 Punkte)

a) Finde alle Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichung ($t \in \mathbb{R}_+$)

$$y' = \frac{y}{t}\,.$$

b) Finde alle Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichung ($t \in \mathbb{R}_+$)

$$y' = \frac{y}{t} + t^7\,.$$

c) Löse das Anfangswertproblem

$$y' = \frac{y}{t} + t^7 \text{ und } y(1) = 5\,.$$

Fachbereich Mathematik/Informatik
Prof. Dr. H. Brenner

Mathematik für Anwender I

Beispielklausur 2 mit Lösungen

Dauer: Zwei volle Stunden + 10 Minuten Orientierung, in denen noch nicht geschrieben werden darf.

Es sind keine Hilfsmittel erlaubt.

Alle Antworten sind zu begründen.

Es gibt insgesamt 64 Punkte. Es gilt die Sockelregelung, d.h. die Bewertung pro Aufgabe(nteil) beginnt bei der halben Punktzahl. Die Gesamtpunktzahl geht doppelt in Ihre Übungspunktzahl ein.

Zur Orientierung: Zum Bestehen braucht man 16 Punkte, ab 32 Punkten gibt es eine Eins.

Tragen Sie auf dem Deckblatt und jedem weiteren Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer leserlich ein.

Viel Erfolg!

Name, Vorname: ....

Matrikelnummer: ....

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	$\sum$
mögl. Pkt.:	4	4	4	4	7	4	3	5	3	2	3	6	3	6	6	64
erhalt. Pkt.:																

Note:

Aufgabe 1. Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

(1) Eine *injektive* Abbildung

$$f : M \longrightarrow N.$$

(2) Ein *Untervektorraum* $U \subseteq V$ in einem K-Vektorraum V.

(3) Eine *lineare* Abbildung

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

zwischen zwei K-Vektorräumen V und W.

(4) Die *geometrische Reihe* für $x \in \mathbb{R}$.

(5) Die *Stetigkeit* einer Abbildung

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

in einem Punkt $a \in \mathbb{R}$.

(6) Die *Differenzierbarkeit* einer Abbildung

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

in einem Punkt $a \in \mathbb{R}$.

(7) Das *Taylor-Polynom vom Grad* n zu einer n-mal differenzierbaren Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

im Punkt 0.

(8) Die *Fakultätsfunktion* $\operatorname{Fak}(x)$ (für $x \in \mathbb{R}$, $x > -1$).

Lösung

(1) Die Abbildung

$$f : M \longrightarrow N$$

ist injektiv, wenn für je zwei verschiedene Elemente $x, y \in M$ auch $f(x)$ und $f(y)$ verschieden sind.

(2) Die Teilmenge $U \subseteq V$ heißt *Untervektorraum*, wenn die folgenden Eigenschaften gelten.
   (a) $0 \in U$.
   (b) Mit $u, v \in U$ ist auch $u + v \in U$.
   (c) Mit $u \in U$ und $s \in K$ ist auch $su \in U$.

(3) Eine Abbildung

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

heißt *lineare Abbildung*, wenn die beiden folgenden Eigenschaften erfüllt sind.
   (a) $\varphi(u + v) = \varphi(u) + \varphi(v)$ für alle $u, v \in V$.
   (b) $\varphi(sv) = s\varphi(v)$ für alle $s \in K$ und $v \in V$.

(4) Die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

heißt die *geometrische Reihe* in x.

(5) Eine Abbildung

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

heißt stetig in a, wenn für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass

$$f\big(]x-\delta, x+\delta[\big) \subseteq]f(x)-\epsilon, f(x)+\epsilon[$$

gilt.

(6) Die Funktion f heißt *differenzierbar* in a, wenn der Limes

$$\lim_{x\in\mathbb{R}\setminus\{a\},\, x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

existiert.

(7) Das Polynom

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

heißt das *Taylor-Polynom vom Grad* n zu f in 0.

(8) Die Fakultätsfunktion ist durch das uneigentliche Integral

$$\operatorname{Fak}(x) := \int_0^{\infty} t^x e^{-t}\, dt$$

definiert.

Aufgabe 2. Formuliere die folgenden Sätze.

(1) Der *Binomische Lehrsatz*.
(2) Das *Injektivitätskriterium für lineare Abbildungen*.
(3) Das *Quotientenkriterium* für Reihen.
(4) Der *Mittelwertsatz* der Integralrechnung.

Lösung

(1) Es seien a, b Elemente in einem Körper. Ferner sei n eine natürliche Zahl. Dann gilt

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

(2) Es sei K ein Körper und es seien V und W zwei K-Vektorräume. Es sei

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

eine K-lineare Abbildung. Dann ist φ injektiv genau dann, wenn $\operatorname{kern} \varphi = 0$ ist.

(3) Es sei

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

eine Reihe von reellen Zahlen. Es gebe eine reelle Zahl q mit $0 \leq q < 1$ und ein k_0 mit

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \leq q$$

für alle $k \geq k_0$ (insbesondere sei $a_k \neq 0$ für $k \geq k_0$). Dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut.

(4) Sei $[a, b]$ ein kompaktes Intervall und sei

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Dann gibt es ein $c \in [a, b]$ mit

$$\int_a^b f(t)\, dt = f(c)(b - a)\,.$$

Aufgabe 3. Zeige, dass für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ die Abschätzung

$$3^n \geq n^3$$

gilt.

Lösung

Für $n = 1, 2, 3$ ergibt sich die Abschätzung durch direktes Nachrechnen. Für $n \geq 4$ wird die Aussage durch Induktion bewiesen. Wir nehmen also an, dass die Aussage für ein $n \geq 3$ schon bewiesen ist und haben sie für $n + 1$ zu zeigen. Dies ergibt sich aus

$$\begin{aligned} 3^{n+1} &= 3 \cdot 3^n \\ &\geq 3n^3 \\ &= n^3 + n^3 + n^3 \\ &\geq n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \\ &= (n + 1)^3, \end{aligned}$$

wobei wir in der zweiten Zeile die Induktionsvoraussetzung, in der vierten Zeile die Voraussetzung $n \geq 3$ und in der fünften Zeile die binomische Formel angewendet haben.

Aufgabe 4. Die Zeitungen A, B und C verkaufen Zeitungsabos und konkurrieren dabei um einen lokalen Markt mit 100000 potentiellen Lesern. Dabei sind innerhalb eines Jahres folgende Kundenbewegungen zu beobachten.

(1) Die Abonnenten von A bleiben zu 80% bei A, 10% wechseln zu B, 5% wechseln zu C und 5% werden Nichtleser.
(2) Die Abonnenten von B bleiben zu 60% bei B, 10% wechseln zu A, 20% wechseln zu C und 10% werden Nichtleser.

(3) Die Abonnenten von C bleiben zu 70% bei C, niemand wechselt zu A, 10% wechseln zu B und 20% werden Nichtleser.
(4) Von den Nichtlesern entscheiden sich je 10% für ein Abonnement von A, B oder C, die übrigen bleiben Nichtleser.

a) Erstelle die Matrix, die die Kundenbewegungen innerhalb eines Jahres beschreibt.

b) In einem bestimmten Jahr haben alle drei Zeitungen je 20000 Abonnenten und es gibt 40000 Nichtleser. Wie sieht die Verteilung ein Jahr später aus?

c) Die drei Zeitungen expandieren in eine zweite Stadt, wo es bislang überhaupt keine Zeitungen gibt, aber ebenfalls 100000 potentielle Leser. Wie viele Leser haben dort die einzelnen Zeitungen (und wie viele Nichtleser gibt es noch) nach drei Jahren, wenn dort die gleichen Kundenbewegungen zu beobachten sind?

Lösung

a) Die Matrix, die die Kundenbewegungen (in der Reihenfolge A, B, C und Nichtleser) beschreibt, ist

$$\begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 & 0 & 0,1 \\ 0,1 & 0,6 & 0,1 & 0,1 \\ 0,05 & 0,2 & 0,7 & 0,1 \\ 0,05 & 0,1 & 0,2 & 0,7 \end{pmatrix}.$$

b) Die Kundenverteilung nach einem Jahr zur Ausgangsverteilung $(20000, 20000, 20000, 40000)$ ist

$$\begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 & 0 & 0,1 \\ 0,1 & 0,6 & 0,1 & 0,1 \\ 0,05 & 0,2 & 0,7 & 0,1 \\ 0,05 & 0,1 & 0,2 & 0,7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20000 \\ 20000 \\ 20000 \\ 40000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22000 \\ 20000 \\ 23000 \\ 35000 \end{pmatrix}.$$

c) Die Ausgangsverteilung ist $(0, 0, 0, 100000)$, daher ist die Verteilung nach einem Jahr gleich $(10000, 10000, 10000, 70000)$.

Nach zwei Jahren ist die Kundenverteilung

$$\begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 & 0 & 0,1 \\ 0,1 & 0,6 & 0,1 & 0,1 \\ 0,05 & 0,2 & 0,7 & 0,1 \\ 0,05 & 0,1 & 0,2 & 0,7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10000 \\ 10000 \\ 10000 \\ 70000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16000 \\ 15000 \\ 16500 \\ 52500 \end{pmatrix}.$$

Nach drei Jahren ist die Kundenverteilung

$$\begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 & 0 & 0,1 \\ 0,1 & 0,6 & 0,1 & 0,1 \\ 0,05 & 0,2 & 0,7 & 0,1 \\ 0,05 & 0,1 & 0,2 & 0,7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 16000 \\ 15000 \\ 16500 \\ 52500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12800+1500+5250 \\ 1600+9000+1650+5250 \\ 800+3000+11550+5250 \\ 800+1500+3300+36750 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19550 \\ 17500 \\ 20600 \\ 42350 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5. Es sei K ein Körper und V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Zeige, dass es einen K-Vektorraum W und eine surjektive K-lineare Abbildung

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

gibt derart, dass $U = \text{kern } \varphi$ ist.

Lösung

Der Unterraum U ist ebenfalls endlichdimensional. Es sei $u_1, u_2, \ldots, u_m$ eine Basis von U, die wir durch $v_1, \ldots, v_n \in V$ zu einer Basis von V ergänzen können. Es sei $W = K^n$. Wir betrachten die lineare Abbildung

$$\varphi : V \longrightarrow K^n,$$

die durch

$$\varphi(u_i) = 0 \text{ für } i = 1, \ldots, m$$

und

$$\varphi(v_j) = e_j \text{ für } j = 1, \ldots, n$$

festgelegt ist (dabei sei e_j der j-te Standardvektor des K^n), was nach dem Basisfestlegungssatz möglich ist. Wegen

$$\varphi(\sum_{j=1}^n t_j v_j) = \sum_{j=1}^n t_j \varphi(v_j) = \sum_{j=1}^n t_j e_j$$

ist die Abbildung surjektiv. Offenbar ist $U \subseteq \text{kern } \varphi$. Es sei

$$v = \sum_{i=1}^{m} s_i u_i + \sum_{j=1}^{n} t_j v_j \in \text{kern } \varphi\,.$$

Dann ist

$$0 \;=\; \varphi(v) \;=\; \sum_{j=1}^{n} t_j e_j.$$

Da die Standardbasis vorliegt, sind die $t_j = 0$ und daher ist $v \in U$. Also ist $U = \text{kern } \varphi$.

Aufgabe 6. Bestimme die komplexen Zahlen z, für die die Matrix

$$\begin{pmatrix} z & 2 & 2z+1 \\ 3 & 1 & 4 \\ z & 5 & z \end{pmatrix}$$

nicht invertierbar ist.

Lösung

Die Matrix ist genau dann invertierbar, wenn ihre Determinante $\neq 0$ ist. Wir müssen also die Nullstellen der Determinante bestimmen. Die Determinante ist (nach der Regel von Sarrus)

$$z^2 + 8z + 30z + 15 - 2z^2 - z - 20z - 6z \;=\; -z^2 + 11z + 15.$$

Dies ist gleich 0 genau dann, wenn

$$z^2 - 11z - 15 = 0$$

ist. Durch quadratisches Ergänzen führt diese Gleichung auf

$$\left(z - \frac{11}{2}\right)^2 \;=\; 15 + \frac{121}{4} \;=\; \frac{181}{4}.$$

Daher sind

$$z_1 = \frac{\sqrt{181}}{2} + \frac{11}{2} = \frac{11 + \sqrt{181}}{2} \text{ und } z_2 = -\frac{\sqrt{181}}{2} + \frac{11}{2} = \frac{11 - \sqrt{181}}{2}$$

die beiden einzigen Lösungen der quadratischen Gleichung. Diese zwei reellen Zahlen sind also die einzigen (reellen oder komplexen) Zahlen, für die die Matrix nicht invertierbar ist.

Aufgabe 7. Führe die ersten drei Schritte des babylonischen Wurzelziehens zu $b = 7$ mit dem Startwert $a_0 = 3$ durch (es sollen also die Approximationen a_1, a_2, a_3 für $\sqrt{7}$ berechnet werden; diese Zahlen müssen als gekürzte Brüche angegeben werden).

Lösung

Die Formel für a_{n+1} lautet

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{7}{a_n}\right).$$

Daher ist

$$a_1 = \frac{1}{2}\left(3 + \frac{7}{3}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{9+7}{3}\right) = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}.$$

Somit ist

$$a_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{8}{3} + \frac{7}{8/3}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{8}{3} + \frac{21}{8}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{64+63}{24} = \frac{127}{48}.$$

Schließlich ist

$$a_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{127}{48} + \frac{7}{127/48}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{127}{48} + \frac{336}{127}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{16129+16128}{6096} = \frac{32257}{12192}.$$

Aufgabe 8. Untersuche, ob die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+5}{4n^3-3n+2}$$

konvergiert oder divergiert.

Lösung

Für $n \geq 5$ ist

$$2n+5 \leq 3n$$

und für $n \geq 1$ ist

$$4n^3 - 3n + 2 = n^3 + 3n^3 - 3n + 2 \geq n^3 + 3n(n^2-1) \geq n^3.$$

Daher gilt für die Reihenglieder für $n \geq 5$ die Abschätzung

$$\frac{2n+5}{4n^3-3n+2} \leq \frac{3n}{4n^3-3n+2} \leq \frac{3n}{n^3} = 3\frac{1}{n^2}.$$

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert nach Beispiel 14.12 und dies gilt auch für $\sum_{n=1}^{\infty} 3\frac{1}{n^2}$. Nach dem Majorantenkriterium konvergiert auch

$$\sum_{n=5}^{\infty} \frac{2n+5}{4n^3-3n+2}$$

und daher konvergiert auch die in Frage stehende Reihe.

Aufgabe 9. Berechne das Cauchy-Produkt bis zur vierten Potenz der geometrischen Reihe mit der Exponentialreihe.

Lösung

Die geometrische Reihe ist $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ und die Exponentialreihe ist $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$. Das Cauchy-Produkt von zwei Reihen ergibt sich einfach dadurch, dass man jeden Summanden mit jedem Summanden multipliziert und gleiche Potenzen aufsummiert. Daher können die Potenzen x^5, x^6, etc. ignoriert werden und es ist

$$\begin{aligned} & (1+x+x^2+x^3+x^4)\left(1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4\right) \\ = & \left(1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4\right)+\left(x+x^2+\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{6}x^4\right) \\ & +\left(x^2+x^3+\frac{1}{2}x^4\right)+x^3+x^4+x^4+\ldots \\ = & \ 1+2x+\frac{5}{2}x^2+\frac{8}{3}x^3+\frac{65}{24}x^4+\ldots . \end{aligned}$$

Das Cauchy-Produkt bis zur vierten Potenz der beiden Reihen ist also

$$1+2x+\frac{5}{2}x^2+\frac{8}{3}x^3+\frac{65}{24}x^4 .$$

Aufgabe 10. Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) = \cos(\ln x) .$$

a) Bestimme die Ableitung f'.

b) Bestimme die zweite Ableitung f''.

Lösung

a) Es ist

$$f'(x) = -\frac{1}{x} \cdot \sin(\ln x).$$

b) Es ist

$$\begin{aligned} f''(x) &= -\left(\frac{\sin(\ln x)}{x}\right)' \\ &= -\frac{\cos(\ln x) - \sin(\ln x)}{x^2} \\ &= -\frac{\cos(\ln x)}{x^2} + \frac{\sin(\ln x)}{x^2}. \end{aligned}$$

Aufgabe 11. Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) = x^2 + 1.$$

Bestimme die Tangenten an f, die lineare Funktionen sind (die also durch den Nullpunkt verlaufen).

Lösung

Eine lineare Funktion wird durch $g(x) = ax$ mit $a \in \mathbb{R}$ beschrieben. Eine lineare Funktion, die im Punkt $(x, f(x))$ tangential zu f ist, muss $a = f'(x)$ und $f(x) = ax$ erfüllen. Daraus ergibt sich die Bedingung

$$x^2 + 1 = (2x)x$$

bzw.

$$x^2 = 1\,.$$

Also ist $x = 1$ oder $x = -1$. Daher gibt es zwei Tangenten an f, die lineare Funktionen sind, nämlich $2x$ und $-2x$.

Aufgabe 12. Beweise den Mittelwertsatz der Integralrechnung.

Lösung

Es sei

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Über dem kompakten Intervall $[a, b]$ ist die Funktion f nach oben und nach unten beschränkt, es seien m und M das Minimum bzw. das Maximum der Funktion. Dann ist insbesondere $m \leq f(x) \leq M$ für alle $x \in [a, b]$ und

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(t)\,dt \leq M(b-a)\,.$$

Daher ist $\int_a^b f(t)\,dt = d(b-a)$ mit einem $d \in [m, M]$ und aufgrund des Zwischenwertsatzes gibt es ein $c \in [a, b]$ mit $f(c) = d$.

Aufgabe 13. Berechne das bestimmte Integral zur Funktion

$$f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2x+3} - e^{-x},$$

über $[1, 4]$.

Lösung

Eine Stammfunktion zu f ist

$$F(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\,\ln(2x+3) + e^{-x}\,.$$

Daher ist

$$\begin{aligned}\int_1^4 f(x)\,dx &= F(4) - F(1) \\ &= \frac{16}{3} - 4 + \frac{1}{2}\,\ln 11 + e^{-4} - \frac{2}{3} + 2 - \frac{1}{2}\,\ln 5 - e^{-1}\end{aligned}$$

$$= \frac{8}{3} + \frac{1}{2} \ln \frac{11}{5} + e^{-4} - e^{-1}.$$

Aufgabe 14. Es sei

$$f(x) = \frac{x^3 + 7x^2 - 5x + 4}{x^2 - 3}.$$

a) Bestimme die reelle Partialbruchzerlegung von $f(x)$.

b) Bestimme eine Stammfunktion von $f(x)$.

Lösung

a) Division mit Rest ergibt

$$x^3 + 7x^2 - 5x + 4 = (x^2 - 3)(x + 7) - 2x + 25.$$

Daher ist

$$\frac{x^3 + 7x^2 - 5x + 4}{x^2 - 3} = x + 7 + \frac{-2x + 25}{x^2 - 3}.$$

Wegen $x^2 - 3 = (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$ machen wir den Ansatz

$$\frac{-2x + 25}{x^2 - 3} = \frac{a}{x - \sqrt{3}} + \frac{b}{x + \sqrt{3}}.$$

Dies führt auf

$$\begin{aligned} -2x + 25 &= a(x + \sqrt{3}) + b(x - \sqrt{3}) \\ &= (a + b)x + (a - b)\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Somit ist $a + b = -2$ und $a - b = \frac{25}{\sqrt{3}}$, woraus sich $2a = -2 + \frac{25}{\sqrt{3}}$ und $2b = -2 - \frac{25}{\sqrt{3}}$ ergibt. Also ist

$$a = -1 + \frac{25}{2\sqrt{3}} \text{ und } b = -1 - \frac{25}{2\sqrt{3}}.$$

Somit ist die Partialbruchzerlegung gleich

$$\frac{x^3 + 7x^2 - 5x + 4}{x^2 - 3} = x + 7 + \frac{-1 + \frac{25}{2\sqrt{3}}}{x - \sqrt{3}} + \frac{-1 - \frac{25}{2\sqrt{3}}}{x + \sqrt{3}}.$$

b) Eine Stammfunktion zu $f(x)$ ist (auf dem Definitionsbereich)

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + 7x + \left(-1 + \frac{25}{2\sqrt{3}}\right) \ln \left|x - \sqrt{3}\right| + \left(-1 - \frac{25}{2\sqrt{3}}\right) \ln \left|x + \sqrt{3}\right|.$$

Aufgabe 15. a) Finde alle Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichung ($t \in \mathbb{R}_+$)

$$y' = \frac{y}{t}.$$

b) Finde alle Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichung ($t \in \mathbb{R}_+$)

$$y' = \frac{y}{t} + t^7 \,.$$

c) Löse das Anfangswertproblem

$$y' = \frac{y}{t} + t^7 \text{ und } y(1) = 5 \,.$$

Lösung

a) Nach dem Lösungsansatz für homogene lineare Differentialgleichungen müssen wir zuerst eine Stammfunktion von $\frac{1}{t}$ bestimmen, eine solche ist $\ln t$. Die Exponentialfunktion davon ist t, so dass $y = ct$ (mit $c \in \mathbb{R}$) die Lösungen von $y' = y/t$ sind.

b) Eine Stammfunktion zu $\frac{t^7}{t} = t^6$ ist

$$\frac{1}{7}t^7 \,.$$

Damit ist

$$\frac{1}{7}t^7 \cdot t = \frac{1}{7}t^8$$

eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung und somit sind

$$\frac{1}{7}t^8 + ct,\ c \in \mathbb{R},$$

alle Lösungen.

c) Wenn zusätzlich die Anfangsbedingung $y(1) = 5$ erfüllt sein soll, so muss

$$\frac{1}{7} + c = 5$$

gelten, also

$$c = 5 - \frac{1}{7} = \frac{34}{7}.$$

Die Lösungs des Anfangsproblems ist also

$$y(t) = \frac{1}{7}t^8 + \frac{34}{7}t \,.$$

Fachbereich Mathematik/Informatik
Prof. Dr. H. Brenner

Mathematik für Anwender I

Beispielklausur 3

Dauer: Zwei volle Stunden + 10 Minuten Orientierung, in denen noch nicht geschrieben werden darf.

Es sind keine Hilfsmittel erlaubt.

Alle Antworten sind zu begründen.

Es gibt insgesamt 64 Punkte. Es gilt die Sockelregelung, d.h. die Bewertung pro Aufgabe(nteil) beginnt bei der halben Punktzahl. Die Gesamtpunktzahl geht doppelt in Ihre Übungspunktzahl ein.

Zur Orientierung: Zum Bestehen braucht man 16 Punkte, ab 32 Punkten gibt es eine Eins.

Tragen Sie auf dem Deckblatt und jedem weiteren Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer leserlich ein.

Viel Erfolg!

Name, Vorname: ....

Matrikelnummer: ....

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	$\sum$
mögl. Pkt.:	4	4	2	4	4	3	3	3	7	2	5	3	2	5	9	4	64
erhalt. Pkt.:																	

Note:

Aufgabe 1. (4 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

(1) Der *Betrag* einer komplexen Zahl $z = a + bi$.
(2) Eine *Basis* eines K-Vektorraums V.
(3) Der *Kern* einer linearen Abbildung

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

zwischen zwei K-Vektorräumen V und W.
(4) Eine *Cauchy-Folge* in $\mathbb{R}$.
(5) Der *Logarithmus zu einer Basis* $b \in \mathbb{R}_+$.
(6) Die „Kreiszahl“ π (gefragt ist nach der Definition mittels trigonometrischer Funktionen).
(7) Eine *Treppenfunktion* $t : [a, b] \to \mathbb{R}$.
(8) Eine *inhomogene lineare* Differentialgleichung auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$.

Aufgabe 2. (4 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze.

(1) Der *Multiplikationssatz für Determinanten*.
(2) Das *Folgenkriterium* für die Stetigkeit einer Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

in einem Punkt $a \in \mathbb{R}$.
(3) Die *Funktionalgleichung* der Exponentialfunktion.
(4) Der *Hauptsatz der Infinitesimalrechnung* für eine stetige Funktion

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

auf einem reellen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$.

Aufgabe 3. (2 Punkte)

a) Berechne

$$(4 - 7i)(5 + 3i)\,.$$

b) Bestimme das inverse Element z^{-1} zu $z = 3 + 4i$.

c) Welchen Abstand hat z^{-1} aus Teil (b) zum Nullpunkt?

Aufgabe 4. (4 Punkte)

Im $\mathbb{R}^3$ seien die zwei Untervektorräume

$$U = \left\{ s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix} \mid r, s \in \mathbb{R} \right\}$$

und

$$V = \left\{ p \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \mid p, q \in \mathbb{R} \right\}$$

gegeben. Bestimme eine Basis für $U \cap V$.

Aufgabe 5. (4 Punkte)

Es sei eine lineare Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

mit

$$\varphi \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \varphi \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \varphi \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

gegeben. Berechne

$$\varphi \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 6. (3 Punkte)

Bestimme die inverse Matrix zu

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 7. (3 Punkte)

Bestätige den Determinantenmultiplikationssatz für die beiden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 8. (3 Punkte)

Bestimme den Grenzwert der Folge

$$\frac{\sin n}{n},\ n \in \mathbb{N}_+ .$$

Aufgabe 9. (7 Punkte)

Beweise das Folgenkriterium für die Stetigkeit einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in einem Punkt $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 10. (2 Punkte)

Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) = \ln\left(\sqrt{1+x^2}\right).$$

a) Bestimme die Ableitung f'.

b) Bestimme die zweite Ableitung f''.

Aufgabe 11. (5 Punkte)

Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \sqrt[3]{x^2}.$$

Bestimme die Punkte $x \in \mathbb{R}$, in denen f differenzierbar ist.

Aufgabe 12. (3 Punkte)

Bestimme die Taylor-Reihe der Funktion

$$f(x) = \sin x$$

im Punkt $\pi/2$ bis zur Ordnung 4 (man gebe also das Taylor-Polynom vom Grad 4 zum Entwicklungspunkt $\pi/2$ an, wobei die Koeffizienten in einer möglichst einfachen Form angegeben werden sollen).

2

a) Unterteile das Intervall $[-4, 5]$ in sechs gleichgroße Teilintervalle.

b) Bestimme das Treppenintegral derjenigen Treppenfunktion auf $[-4, 5]$, die auf der in a) konstruierten Unterteilung abwechselnd die Werte 2 und -1 annimmt.

Aufgabe 13. (5 Punkte)

Eine Person will ein einstündiges Sonnenbad nehmen. Die Intensität der Sonneneinstrahlung werde im Zeitintervall $[6, 22]$ (in Stunden) durch die Funktion

$$f : [6, 22] \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto f(t) = -t^3 + 27t^2 - 120t,$$

beschrieben. Bestimme den Startzeitpunkt des Sonnenbades, so dass die Gesamtsonnenausbeute maximal wird.

Aufgabe 14. (9 (6+3) Punkte)

Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \frac{x^5 + 3x^3 - 2x^2 + x - 1}{(x-1)^2(x^2+1)}.$$

a) Bestimme die reelle Partialbruchzerlegung von f.

b) Bestimme eine Stammfunktion von f für $x > 1$.

Aufgabe 15. (4 Punkte)

Bestimme die Lösungen der Differentialgleichung ($y > 0$)

$$y' = t^2 y^3$$

mit dem Lösungsansatz für getrennte Variablen. Was ist der Definitionsbereich der Lösungen?

Aufgabe 16. (4 Punkte)

Bestimme die Lösungen der Differentialgleichung ($y > 0$)

$$y' = t^2 y^3$$

mit dem Lösungsansatz für getrennte Variablen. Was ist der Definitionsbereich der Lösungen?

Fachbereich Mathematik/Informatik
Prof. Dr. H. Brenner

Mathematik für Anwender I

Beispielklausur 3 mit Lösungen

Dauer: Zwei volle Stunden + 10 Minuten Orientierung, in denen noch nicht geschrieben werden darf.

Es sind keine Hilfsmittel erlaubt.

Alle Antworten sind zu begründen.

Es gibt insgesamt 64 Punkte. Es gilt die Sockelregelung, d.h. die Bewertung pro Aufgabe(nteil) beginnt bei der halben Punktzahl. Die Gesamtpunktzahl geht doppelt in Ihre Übungspunktzahl ein.

Zur Orientierung: Zum Bestehen braucht man 16 Punkte, ab 32 Punkten gibt es eine Eins.

Tragen Sie auf dem Deckblatt und jedem weiteren Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer leserlich ein.

Viel Erfolg!

Name, Vorname: ....

Matrikelnummer: ....

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	$\sum$
mögl. Pkt.:	4	4	2	4	4	3	3	3	7	2	5	3	2	5	9	4	64
erhalt. Pkt.:																	

Note:

Aufgabe 1. Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

(1) Der *Betrag* einer komplexen Zahl $z = a + bi$.
(2) Eine *Basis* eines K-Vektorraums V.
(3) Der *Kern* einer linearen Abbildung

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

zwischen zwei K-Vektorräumen V und W.
(4) Eine *Cauchy-Folge* in $\mathbb{R}$.
(5) Der *Logarithmus zu einer Basis* $b \in \mathbb{R}_+$.
(6) Die „Kreiszahl" π (gefragt ist nach der Definition mittels trigonometrischer Funktionen).
(7) Eine *Treppenfunktion* $t : [a, b] \to \mathbb{R}$.
(8) Eine *inhomogene lineare* Differentialgleichung auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$.

Lösung

(1) Der Betrag von $z = a + bi$ ist

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}\,.$$

(2) Eine Familie v_i, $i \in I$, von Vektoren in V heißt Basis, wenn diese Vektoren linear unabhängig sind und ein Erzeugendensystem bilden.
(3) Man nennt

$$\text{kern } \varphi := \{v \in V \,|\, \varphi(v) = 0\}$$

den *Kern* von φ.
(4) Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ heißt *Cauchy-Folge*, wenn folgende Bedingung erfüllt ist.

Zu jedem $\epsilon \in \mathbb{R}$, $\epsilon > 0$, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $n, m \geq n_0$ die Beziehung

$$|x_n - x_m| \leq \epsilon$$

gilt.
(5) Der Logarithmus zur Basis $b > 0$ ist die Funktion

$$x \longmapsto \log_b x := \frac{\ln x}{\ln b}\,.$$

(6) Es sei r die eindeutig bestimmte reelle Nullstelle der Kosinusfunktion auf dem Intervall $[0, 2]$. Die *Kreiszahl* π ist definiert durch

$$\pi := 2r\,.$$

(7) Die Funktion

$$t : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

heißt eine *Treppenfunktion*, wenn es eine Unterteilung

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b$$

von I gibt derart, dass t auf jedem offenen Teilintervall $]a_{i-1}, a_i[$ konstant ist.

(8) Es seien

$$g, h : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

zwei Funktionen auf I. Eine Differentialgleichung der Form

$$y' = g(t)y + h(t)$$

heißt inhomogene lineare (gewöhnliche) Differentialgleichung.

Aufgabe 2. Formuliere die folgenden Sätze.

(1) Der *Multiplikationssatz für Determinanten*.

(2) Das *Folgenkriterium* für die Stetigkeit einer Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

in einem Punkt $a \in \mathbb{R}$.

(3) Die *Funktionalgleichung* der Exponentialfunktion.

(4) Der *Hauptsatz der Infinitesimalrechnung* für eine stetige Funktion

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

auf einem reellen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$.

Lösung

(1) Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}_+$. Dann gilt für Matrizen $A, B \in \operatorname{Mat}_n(K)$ die Beziehung

$$\det(A \circ B) = \det A \cdot \det B\,.$$

(2) Die Stetigkeit von f im Punkt a ist äquivalent dazu, dass für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die gegen a konvergiert, die Bildfolge $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $f(a)$ konvergiert.

(3) Für reelle Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\exp(x + y) = \exp x \cdot \exp y\,.$$

(4) Für einen beliebigen Punkt $a \in I$ ist die Integralfunktion

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$$

differenzierbar und es gilt

$$F'(x) = f(x)$$

für alle $x \in I$.

Aufgabe 3. a) Berechne

$$(4 - 7i)(5 + 3i)\,.$$

b) Bestimme das inverse Element z^{-1} zu $z = 3 + 4i$.

c) Welchen Abstand hat z^{-1} aus Teil (b) zum Nullpunkt?

Lösung

a) Es ist

$$(4 - 7i)(5 + 3i) \;=\; 20 + 21 - 35i + 12i \;=\; 41 - 23i.$$

b) Das inverse Element zu z ist $\frac{\bar{z}}{z\bar{z}}$, also ist

$$z^{-1} \;=\; \frac{a - bi}{a^2 + b^2} \;=\; \frac{3 - 4i}{3^2 + 4^2} \;=\; \frac{3}{25} - \frac{4}{25}i.$$

c) Der Abstand von z zum Nullpunkt ist $|z| = \sqrt{25} = 5$, daher ist der Abstand von z^{-1} zum Nullpunkt gleich $\frac{1}{5}$.

Aufgabe 4. Im $\mathbb{R}^3$ seien die zwei Untervektorräume

$$U = \{s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix} \mid r, s \in \mathbb{R}\}$$

und

$$V = \{p \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \mid p, q \in \mathbb{R}\}$$

gegeben. Bestimme eine Basis für $U \cap V$.

Lösung

Jeder Vektor aus dem Durchschnitt $U \cap V$ besitzt eine Darstellung

$$s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix} = p \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}\,.$$

Die Koeffiziententupel (s,t,p,q) bilden den Lösungsraum des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 & -5 \\ 1 & -2 & -1 & -2 \\ 7 & 9 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \\ p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

das wir lösen müssen. Wir ersetzen die erste Gleichung durch

$$I' = I - 3II: \; -s + 10t + q = 0$$

und die dritte Gleichung durch

$$III' = III - 4I': \; 11s - 31t = 0\,.$$

Wir wählen $s = 31$, so dass $t = 11$ sein muss. Dies legt eindeutig q und dann auch p fest. Daher ist der Durchschnitt $U \cap V$ eindimensional und

$$31 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + 11 \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 62 + 44 \\ 31 - 22 \\ 217 + 99 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 106 \\ 9 \\ 316 \end{pmatrix}$$

ist ein Basisvektor von $U \cap V$.

Aufgabe 5. Es sei eine lineare Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

mit

$$\varphi \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \; \varphi \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \varphi \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

gegeben. Berechne

$$\varphi \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Lösung

Wir lösen zuerst das lineare Gleichungssystem

$$a\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-5\\4\end{pmatrix}.$$

Die Zeilenoperation $IV = 2II - III$ führt auf

$$(IV)\ \ 7b - c = -14$$

und $V = I + 2IV$ führt auf

$$(V)\ \ 15b = -25\,.$$

Damit ist

$$b = \frac{-25}{15} = -\frac{5}{3}$$

und

$$2c = 3 - b = 3 + \frac{5}{3} = \frac{14}{3},$$

also

$$c = \frac{7}{3},$$

und

$$a = -5 - 4b - c = -5 - 4\left(\frac{-5}{3}\right) - \frac{7}{3} = \frac{-15}{3} + \frac{20}{3} - \frac{7}{3} = -\frac{2}{3}.$$

Also ist

$$\begin{aligned}
\varphi\begin{pmatrix}3\\-5\\4\end{pmatrix} &= \varphi\left(-\frac{2}{3}\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}-\frac{5}{3}\begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix}+\frac{7}{3}\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}\right)\\
&= -\frac{2}{3}\cdot\varphi\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}-\frac{5}{3}\cdot\varphi\begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix}+\frac{7}{3}\cdot\varphi\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}\\
&= -\frac{2}{3}\cdot\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}-\frac{5}{3}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\frac{7}{3}\cdot\begin{pmatrix}7\\2\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}-2-\frac{5}{3}+\frac{49}{3}\\ \frac{4}{3}+\frac{14}{3}\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{38}{3} \\ \frac{18}{3} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{38}{3} \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 6. Bestimme die inverse Matrix zu

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Lösung

$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -13 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{13} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{5}{13} & -\frac{1}{13} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{5}{13} & -\frac{1}{13} & \frac{1}{26} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\frac{2}{13} & \frac{3}{13} & -\frac{3}{26} \\ \frac{5}{13} & -\frac{1}{13} & \frac{1}{26} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Aufgabe 7. Bestätige den Determinantenmultiplikationssatz für die beiden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix} .$$

Lösung

Die Determinante von A ist

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} = -10 - 2(-4) = -2$$

und die Determinante von B ist

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix} = -9 + 12 = 3.$$

Das Produkt der beiden Matrizen ist

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 14 & 31 \\ 2 & -6 & -1 \\ 0 & 8 & 15 \end{pmatrix} .$$

Die Determinante davon ist

$$\begin{aligned} \det AB &= \det \begin{pmatrix} 1 & 14 & 31 \\ 2 & -6 & -1 \\ 0 & 8 & 15 \end{pmatrix} \\ &= -90 + 8 - 2(14 \cdot 15 - 8 \cdot 31) \\ &= -82 - 2(210 - 248) \\ &= -82 - 2(-38) \\ &= -82 + 76 \\ &= -6. \end{aligned}$$

Dies stimmt mit dem Produkt der beiden einzelnen Determinanten überein.

Aufgabe 8. Bestimme den Grenzwert der Folge

$$\frac{\sin n}{n}, \; n \in \mathbb{N}_+ .$$

Lösung

Für reelles x ist immer $-1 \leq \sin x \leq 1$. Somit ist
$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}$$
für alle $n \in \mathbb{N}_+$. Da die Folge $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}_+}$ gegen 0 konvergiert und dies auch für die negative Folge $\left(-\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}_+}$ gilt, muss aufgrund des Quetschkriteriums auch die Folge $\left(\frac{\sin n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}_+}$ gegen 0 konvergieren.

Aufgabe 9. Beweise das Folgenkriterium für die Stetigkeit einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in einem Punkt $x \in \mathbb{R}$.

Lösung

Es bezeichne (1) die Stetigkeit von f im Punkt x und (2) die Eigenschaft, dass für jede gegen x konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Bildfolge $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $f(x)$ konvergiert. Wir müssen die Äquivalenz von (1) und (2) zeigen.

Sei (1) erfüllt und sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$, die gegen x konvergiert. Wir müssen zeigen, dass $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$ ist. Dazu sei $\epsilon > 0$ gegeben. Wegen (1) gibt es ein δ mit der angegebenen Eigenschaft und wegen der Konvergenz von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x gibt es eine natürliche Zahl n_0 derart, dass für alle $n \geq n_0$ gilt
$$d(x_n, x) \leq \delta\,.$$
Nach der Wahl von δ ist dann
$$d(f(x_n), f(x)) \leq \epsilon \text{ für alle } n \geq n_0\,,$$
so dass die Bildfolge gegen $f(x)$ konvergiert.

Sei (2) erfüllt. Wir nehmen an, dass f nicht stetig ist. Dann gibt es ein $\epsilon > 0$ derart, dass es für alle $\delta > 0$ Elemente $z \in \mathbb{R}$ gibt, deren Abstand zu x maximal gleich δ ist, deren Wert $f(z)$ unter der Abbildung aber zu $f(x)$ einen Abstand besitzt, der größer als ϵ ist. Dies gilt dann insbesondere für die Stammbrüche $\delta = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$. D.h. für jede natürliche Zahl gibt es ein $x_n \in \mathbb{R}$ mit
$$d(x_n, x) \leq \frac{1}{n} \text{ und mit } d(f(x_n), f(x)) > \epsilon\,.$$
Diese so konstruierte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen x, aber die Bildfolge konvergiert nicht gegen $f(x)$, da der Abstand der Bildfolgenglieder zu $f(x)$ zumindest ϵ ist. Dies ist ein Widerspruch zu (2).

Aufgabe 10. Wir betrachten die Funktion
$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) = \ln\left(\sqrt{1+x^2}\right).$$

a) Bestimme die Ableitung f'.

b) Bestimme die zweite Ableitung f''.

Lösung

a) Es ist

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot 2x = \frac{x}{1+x^2}.$$

b) Es ist

$$f''(x) = \left(\frac{x}{1+x^2}\right)' = \frac{(1+x^2) - x(2x)}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{1+2x^2+x^4}.$$

Aufgabe 11. Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \sqrt[3]{x^2}.$$

Bestimme die Punkte $x \in \mathbb{R}$, in denen f differenzierbar ist.

Lösung

Die Funktion $x \mapsto x^3$ ist überall differenzierbar und die Ableitung ist nur an der Stelle $x = 0$ gleich 0. Daher ist die Umkehrfunktion $y \mapsto \sqrt[3]{y}$ für $y \neq 0$ differenzierbar. Daher ist auch f als Hintereinanderschaltung von $x \mapsto x^2$ und dieser Funktion für $x \neq 0$ differenzierbar.

Für $x = 0$ betrachten wir direkt den Differenzenquotient, also für $h \neq 0$ den Ausdruck

$$\frac{\sqrt[3]{h^2}}{h}.$$

Wir betrachten positive h und können den Nenner als

$$h = \sqrt[3]{h^3} = \sqrt[3]{h^2} \cdot \sqrt[3]{h}$$

schreiben. Daher ist der Differenzenquotient gleich

$$\frac{\sqrt[3]{h^2}}{h} = \frac{\sqrt[3]{h^2}}{\sqrt[3]{h^2} \cdot \sqrt[3]{h}} = \frac{1}{\sqrt[3]{h}} = \sqrt[3]{\frac{1}{h}}.$$

Für $h_n = \frac{1}{n}$ steht hier $\sqrt[3]{n}$ und dies divergiert, also existiert der Grenzwert des Differenzenquotienten nicht. Daher ist f in 0 nicht differenzierbar.

Aufgabe 12. Bestimme die Taylor-Reihe der Funktion

$$f(x) = \sin x$$

im Punkt $\pi/2$ bis zur Ordnung 4 (man gebe also das Taylor-Polynom vom Grad 4 zum Entwicklungspunkt $\pi/2$ an, wobei die Koeffizienten in einer möglichst einfachen Form angegeben werden sollen).

Lösung

Wir müssen das Polynom

$$\sum_{k=0}^{4} \frac{f^{(k)}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{k!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^k$$

berechnen. Es ist

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \\ f'\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \\ f''\left(\frac{\pi}{2}\right) &= -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1, \\ f'''\left(\frac{\pi}{2}\right) &= -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{aligned}$$

und

$$f''''\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

Daher ist das vierte Taylor-Polynom (also die Taylor-Reihe bis zum Grad vier) gleich

$$1-\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2+\frac{1}{24}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^4 .$$

Aufgabe 13. a) Unterteile das Intervall $[-4,5]$ in sechs gleichgroße Teilintervalle.

b) Bestimme das Treppenintegral derjenigen Treppenfunktion auf $[-4,5]$, die auf der in a) konstruierten Unterteilung abwechselnd die Werte 2 und -1 annimmt.

Lösung

a) Die Länge des Intervalls ist 9, daher muss die Länge der Teilintervalle gleich $\frac{9}{6}=\frac{3}{2}=1,5$ sein. Dies ergibt die Teilintervalle

$$[-4,\frac{-5}{2}],\ [\frac{-5}{2},-1],\ [-1,\frac{1}{2}],\ [\frac{1}{2},2],\ [2,\frac{7}{2}],\ [\frac{7}{2},5]\,.$$

b) Die Treppenfunktion, die abwechselnd die Werte 2 und -1 besitzt, hat das Treppenintegral

$$1,5\cdot(2-1+2-1+2-1) = 1,5\cdot 3 = 4,5.$$

Aufgabe 14. Eine Person will ein einstündiges Sonnenbad nehmen. Die Intensität der Sonneneinstrahlung werde im Zeitintervall $[6,22]$ (in Stunden) durch die Funktion

$$f:[6,22]\longrightarrow \mathbb{R},\ t\longmapsto f(t)=-t^3+27t^2-120t,$$

beschrieben. Bestimme den Startzeitpunkt des Sonnenbades, so dass die Gesamtsonnenausbeute maximal wird.

Lösung

Es sei $a \in [6,21]$ der Anfangszeitpunkt des Sonnenbades. Die Gesamteinstrahlung der Sonne in der Stunde $[a, a+1]$ ist das bestimmte Integral

$$\begin{aligned} & S(a) \\ = & \int_a^{a+1} (-t^3 + 27t^2 - 120t)\,dt \\ = & \left(-\frac{1}{4}t^4 + 9t^3 - 60t^2\right) |_a^{a+1} \\ = & \left(-\frac{1}{4}(a+1)^4 + 9(a+1)^3 - 60(a+1)^2\right) - \left(-\frac{1}{4}a^4 + 9a^3 - 60a^2\right) \\ = & -\frac{1}{4}(4a^3 + 6a^2 + 4a + 1) + 9(3a^2 + 3a + 1) - 60(2a+1) \\ = & -a^3 + \frac{51}{2}a^2 - 94a - \frac{205}{4}. \end{aligned}$$

Für diese Funktion muss das Maximum im Intervall $[6,21]$ bestimmt werden. Dafür berechnen wir die Ableitung, diese ist

$$S'(a) = \left(-a^3 + \frac{51}{2}a^2 - 94a - \frac{205}{4}\right)' = -3a^2 + 51a - 94.$$

Die Nullstellenberechnung dieser Ableitung führt auf $a^2 - 17a + \frac{94}{3} = 0$ bzw. auf

$$\left(a - \frac{17}{2}\right)^2 = -\frac{94}{3} + \left(\frac{17}{2}\right)^2 = -\frac{94}{3} + \frac{289}{4} = \frac{-376 + 867}{12} = \frac{491}{12}.$$

Also ist

$$a_0 = \sqrt{\frac{491}{12}} + \frac{17}{2} \cong 14,8966 \cong 14 \text{ Uhr } 54$$

(die negative Wurzel muss nicht berücksichtigt werden, da diese zu einem a außerhalb des Definitionsbereiches führt). Die zweite Ableitung

$$S''(a) = -6a + 51$$

ist an der Stelle a_0 negativ, so dass dort das Maximum vorliegt. Da die Ableitung keine weiteren Nullstellen im Intervall besitzt, müssen die Randpunkte nicht gesondert betrachtet werden.

Aufgabe 15. Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \frac{x^5 + 3x^3 - 2x^2 + x - 1}{(x-1)^2(x^2+1)}.$$

a) Bestimme die reelle Partialbruchzerlegung von f.

b) Bestimme eine Stammfunktion von f für $x > 1$.

Lösung

a) Zunächst ist

$$(x-1)^2(x^2+1) \;=\; (x^2-2x+1)(x^2+1) \;=\; x^4-2x^3+2x^2-2x+1.$$

Polynomdivision des Zählers durch den Nenner ergibt

$$x^5+3x^3-2x^2+x-1 \;=\; (x+2)(x^4-2x^3+2x^2-2x+1)+5x^3-4x^2+4x-3.$$

Daher ist

$$\frac{x^5+3x^3-2x^2+x-1}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1} \;=\; x+2+\frac{5x^3-4x^2+4x-3}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}.$$

Für den rechten Bruch bestimmen wir die Partialbruchzerlegung über den Ansatz

$$\frac{5x^3-4x^2+4x-3}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1} \;=\; \frac{a}{x-1}+\frac{b}{(x-1)^2}+\frac{cx+d}{(x^2+1)},$$

der wiederum auf

$$5x^3-4x^2+4x-3 \;=\; a(x-1)(x^2+1)+b(x^2+1)+(cx+d)(x-1)^2$$

führt.

Für $x=1$ ergibt sich

$$2 \;=\; 2b,$$

also $b=1$.

Für $x=0$ ergibt sich

$$-3 \;=\; -a+1+d,$$

also $4=a-d$.

Für $x=-1$ ergibt sich

$$-5-4-4-3 \;=\; -16 \;=\; -4a+2+4(-c+d),$$

also $\frac{18}{4}=a+c-d$.

Der Koeffizient zu x^3 führt schließlich auf

$$5 \;=\; a+c.$$

Die Subtraktion der dritten Gleichung von der zweiten führt auf

$$c \;=\; \frac{18}{4}-4 \;=\; \frac{1}{2}.$$

Aus der vierten Gleichung folgt daraus $a=\frac{9}{2}$ und aus der zweiten Gleichung ergibt sich

$$d \;=\; \frac{1}{2}.$$

Somit ergibt sich insgesamt die Partialbruchzerlegung

$$\frac{x^5+3x^3-2x^2+x-1}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1} \;=\; x+2+\frac{\frac{9}{2}}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}{(x^2+1)}.$$

b) Eine Stammfunktion von f ist

$$\frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{9}{2} \ln(x-1) - (x-1)^{-1} + \frac{1}{4} \ln(x^2+1) + \frac{1}{2} \arctan x \,.$$

Aufgabe 16. Bestimme die Lösungen der Differentialgleichung ($y > 0$)

$$y' = t^2 y^3$$

mit dem Lösungsansatz für getrennte Variablen. Was ist der Definitionsbereich der Lösungen?

Lösung

Wir schreiben $g(t) = t^2$ und $h(y) = y^3$. Eine Stammfunktion zu $\frac{1}{h(y)} = \frac{1}{y^3}$ ist $H(y) = -\frac{1}{2}y^{-2} = z$ (z ist also negativ) mit der Umkehrfunktion

$$y = H^{-1}(z) = \sqrt{-\frac{1}{2}z^{-1}}\,.$$

Die Stammfunktionen zu $g(t) = t^2$ sind $\frac{1}{3}t^3 + c$ mit $c \in \mathbb{R}$. Daher sind die Lösungen der Differentialgleichung von der Form

$$y(t) = \sqrt{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}t^3 + c\right)^{-1}} = \sqrt{\frac{-1}{2(\frac{1}{3}t^3 + c)}} = \sqrt{\frac{-1}{\frac{2}{3}t^3 + 2c}}.$$

Bei gegebenem c ist diese Wurzel genau dann definiert, wenn

$$\frac{2}{3}t^3 + 2c < 0$$

ist. Dies bedeutet

$$t < \sqrt[3]{-3c}\,.$$

Die Definitionsbereiche sind also

$$]-\infty, \sqrt[3]{-3c}[\,.$$

Anhang A: Bildlizenzen

Die Bilder dieses Textes stammen aus Commons (also http://commons.wikimedia.org), und stehen unter unterschiedlichen Lizenzen, die zwar alle die Verwendung hier erlauben, aber unterschiedliche Bedingungen an die Verwendung und Weitergabe stellen. Es folgt eine Auflistung der verwendeten Bilder dieses Textes (nach der Seitenzahl geordnet, von links nach rechts, von oben nach unten) zusammen mit ihren Quellen, Urhebern (Autoren) und Lizenzen. Dabei ist *Quelle* so zu verstehen, dass sich, wenn man

http://commons.wikimedia.org/wiki/File:

unmittelbar davor setzt, die entsprechende Datei auf Commons ergibt. *Autor* benennt den Urheber des Werkes, falls dieser bekannt ist. *Benutzer* meint den Hochlader der Datei; wenn keine weitere Information über den Autor vorliegt, so gilt der Benutzer als Urheber. Die Angabe des Benutzernamen ist so zu verstehen, dass sich, wenn man

http://commons.wikimedia.org/wiki/User:

unmittelbar davor setzt, die Benutzerseite ergibt. Wenn das Bild ursprünglich in einem anderen Wikimedia-Projekt hochgeladen wurde, so wird die Domäne (bspw. *de.wikipedia.org*) explizit angegeben.

Die *Lizenz* ist die auf der Dateiseite auf Commons angegebene Lizenz. Dabei bedeuten

- GFDL: Gnu Free Documentation License (siehe den angehängten Text, falls diese Lizenz vorkommt)
- CC-BY-SA-2.5 (3.0): Creative Commons Attribution ShareAlike 2.5 (oder 3.0)
- PD: gemeinfrei (public domain)

Abbildungsverzeichnis