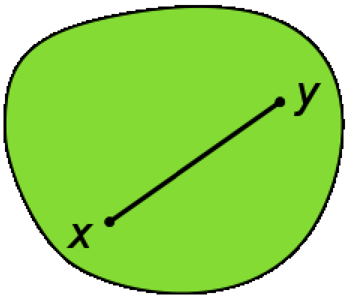
Prof. Dr. H. Brenner Osnabrück WS 2013/2014

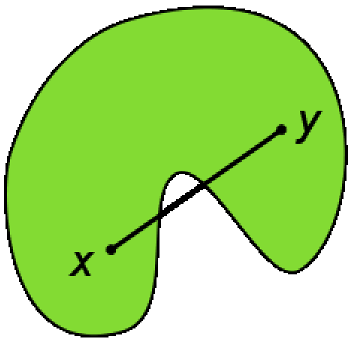
Analysis I

Vorlesung 20

Konvexe Funktionen



Eine konvexe Teilmenge.



Eine nichtkonvexe Teilmenge.

Definition 20.1. Eine Teilmenge $T \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *konvex*, wenn mit je zwei Punkten $P, Q \in T$ auch jeder Punkt der Verbindungsstrecke, also jeder Punkt der Form

$$rP + (1-r)Q \text{ mit } r \in [0,1]\,,$$

ebenfalls zu T gehört.

Definition 20.2. Sei $T \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge und

$$f\colon T \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Dann nennt man die Menge

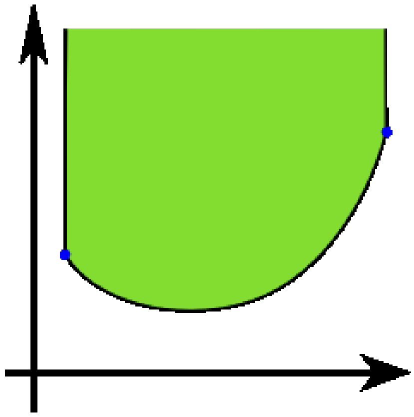
$$S(f) = \{(x,y) \in T \times \mathbb{R} |\, y \leq f(x)\}$$

den *Subgraph* und

$$E(f) = \{(x,y) \in T \times \mathbb{R} |\, y \geq f(x)\}$$

den *Epigraph* der Funktion.

Subgraph und Epigraph sind nach unten bzw. nach oben unbeschränkt. Im Kontext der Integrationstheorie interessiert man sich für den positiven Subgraph, der durch die x-Achse nach unten beschränkt ist. Der Graph der Funktion gehört sowohl zum Subgraph als auch zum Epigraph.



Der Graph und der Epigraph einer konvexen Funktion.

Definition 20.3. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und

$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Man sagt, dass f *konvex* ist, wenn der Epigraph $E(f)$ konvex ist.

Definition 20.4. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und

$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Man sagt, dass f *konkav* ist, wenn der Subgraph $E(f)$ konvex ist.

Bei beiden Begriffen muss man lediglich überprüfen, ob die Verbindungsstrecke zwischen je zwei Punkten des Graphen jeweils oberhalb bzw. unterhalb verläuft. Im differenzierbaren Fall gibt es einfache Ableitungskriterien für diese Verhaltensweisen, wobei wir nur den konvexen Fall anführen.

Satz 20.5. *Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und*

$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine differenzierbare Funktion. Dann ist f genau dann eine konvexe Funktion, wenn die Ableitung f' wachsend ist.

Beweis. Sei zunächst f konvex und seien zwei Punkte $a < b$ aus I gegeben. Es sei $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ die lineare Funktion, die $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ verbindet. Aufgrund der Konvexität ist $f(x) \leq g(x)$ für $x \in [a, b]$. Für die Differenzenquotienten gilt daher

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} &\leq \frac{g(x) - f(a)}{x - a} \\ &= \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \\ &= \frac{g(b) - g(a)}{b - a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{g(b)-g(x)}{b-x} \\ &= \frac{f(b)-g(x)}{b-x} \\ &\leq \frac{f(b)-f(x)}{b-x}. \end{aligned}$$

Durch Übergang zum Limes für $x \to a$ bzw. $x \to b$ folgt

$$f'(a) \leq \frac{g(b)-g(a)}{b-a} \leq f'(b).$$

Sei nun f als nicht konvex vorausgesetzt und seien zwei Punkte $a < b$ aus I gegeben mit der Eigenschaft, dass die verbindende Gerade von $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ nicht vollständig oberhalb vom Graph von f verläuft. Es gibt also ein $c \in [a, b]$ mit $g(c) < f(c)$, wobei wieder g die verbindende lineare Funktion ist. Durch Übergang zu $f - g$ können wir $f(a) = f(b) = 0$ und $f(c) > 0$ annehmen. Nach dem Mittelwertsatz gibt es Punkte $s \in [a, c]$ und $t \in [c, b]$ mit $f'(s) > 0$ und $f'(t) < 0$, so dass f' nicht wachsend ist. □

Korollar 20.6. *Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und*

$$f \colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine zweimal differenzierbare Funktion. Dann ist f genau dann eine konvexe Funktion, wenn für die zweite Ableitung $f''(x) \geq 0$ für alle $x \in I$ gilt.

Beweis. Siehe Aufgabe 20.6. □

Die folgende Aussage heißt *Jensensche Ungleichung*.

Satz 20.7. *Es sei*

$$f \colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine konvexe Funktion, seien $x_1, \ldots, x_n \in I$ und $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $\sum_{i=1}^n t_i = 1$. Dann ist

$$f\left(\sum_{i=1}^n t_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n t_i f(x_i).$$

Beweis. Siehe Aufgabe 20.22. □

Definition 20.8. Es sei

$$f \colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ definierte Funktion und $c \in I$ ein innerer Punkt von I. Man sagt, dass in c ein *Wendepunkt* von f vorliegt, wenn es ein $\epsilon > 0$ gibt derart, dass f auf $[c - \epsilon, c]$ konvex (konkav) und auf $[c, c + \epsilon]$ konkav (konvex) ist.

Für eine zweimal differenzierbare Funktion liegt nach Korollar 20.6 genau dann ein Wendepunkt in $c \in I$ vor, wenn $f''(x) \leq 0$ für $x \in [c-\epsilon, c]$ und $f''(x) \geq 0$ für $x \in [c, c+\epsilon]$ ist (oder umgekehrt). Eine notwendige Voraussetzung für die Existenz eines Wendepunktes ist somit, dass $f''(c) = 0$ ist. Die Funktion $f(x) = x^4$ erfüllt im Nullpunkt dieses notwendige Kriterium, es liegt aber kein Wendepunkt vor.

Ableitung von Potenzreihen

Satz 20.9. *Es sei*

$$g = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

eine konvergente Potenzreihe mit dem Konvergenzradius $R > 0$. Dann ist auch die formal abgeleitete Potenzreihe

$$\tilde{g} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-a)^{n-1}$$

konvergent mit demselben Konvergenzradius. Die durch die Potenzreihe g dargestellte Funktion f ist in jedem Punkt $z \in U(a, R)$ differenzierbar mit

$$f'(z) = \tilde{g}(z)\,.$$

Beweis. Sei $s \in \mathbb{R}_+$, $s < R$, vorgegeben und sei r mit $s < r < R$. Dann konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$ gemäß der Definition von Konvergenzradius. Wegen $n \leq \left(\frac{r}{s}\right)^n$ für n hinreichend groß ist

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} n |a_n| s^{n-1} &= \sum_{n=1}^{N} n |a_n| s^{n-1} + \sum_{n=N+1}^{\infty} n |a_n| s^{n-1} \\ &\leq \sum_{n=1}^{N} n |a_n| s^{n-1} + \frac{1}{s} \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| r^n, \end{aligned}$$

so dass die Potenzreihe $\tilde{g}$ in $B(a, s)$ und somit in $U(a, R)$ konvergiert (dafür, dass der Konvergenzradius von $\tilde{g}$ nicht größer als R ist, siehe Aufgabe 20.8). Die Potenzreihe

$$\rho(z) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n (z-a)^{n-1}$$

ist ebenfalls in dieser Kreisscheibe konvergent, stellt eine nach Korollar 16.9 stetige Funktion dar und besitzt in a den Wert 0. Daher zeigt die Gleichung (von Potenzreihen und dargestellten Funktionen)

$$f(z) = f(a) + a_1(z-a) + \rho(z)(z-a),$$

dass f in a linear approximierbar, also nach Satz 18.5 differenzierbar ist mit der Ableitung $f'(a) = a_1 = \tilde{g}(a)$. Sei nun $b \in U(a, R)$. Nach dem Entwicklungssatz gibt es eine konvergente Potenzreihe mit Entwicklungspunkt b,

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-b)^n \, ,$$

deren dargestellte Funktion mit der durch g dargestellten Funktion in einer offenen Umgebung von b übereinstimmt, und wobei

$$b_1 = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (b-a)^{n-1}$$

gilt. Daher gilt nach dem schon Bewiesenen (angewendet auf h und die formale Potenzreihenableitung $\tilde{h}$)

$$f'(b) = \tilde{h}(b) = b_1 = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (b-a)^{n-1} = \tilde{g}(b).$$

□

Korollar 20.10. *Eine durch eine Potenzreihe gegebene Funktion ist in ihrem Konvergenzbereich unendlich oft differenzierbar.*

Beweis. Dies ergibt sich direkt aus Satz 20.9. □

Satz 20.11. *Die Exponentialfunktion*

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \, z \longmapsto \exp z,$$

ist differenzierbar mit

$$\exp'(z) = \exp z \, .$$

Beweis. Aufgrund von Satz 20.9 ist

$$\begin{aligned} \exp'(z) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \right)' \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z^n}{n!} \right)' \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} z^{n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} z^{n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \\ &= \exp z. \end{aligned}$$

□

Korollar 20.12. *Die Ableitung des natürlichen Logarithmus*

$$\ln : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \ln x,$$

ist

$$\ln' : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \frac{1}{x}.$$

Beweis. Siehe Aufgabe 20.10. □

Korollar 20.13. *Es sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann ist die Funktion*

$$f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+,\ x \longmapsto x^\alpha,$$

differenzierbar und ihre Ableitung ist

$$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Beweis. Nach Aufgabe 17.10 ist

$$x^\alpha = \exp(\alpha \ \ln x)\ .$$

Die Ableitung nach x ist aufgrund von Satz 20.11 und Korollar 20.12 gleich

$$(x^\alpha)' = (\exp(\alpha \ \ln x))' = \frac{\alpha}{x} \cdot \exp(\alpha \ \ln x) = \frac{\alpha}{x} x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}.$$

□

Korollar 20.14. *Für die eulersche Zahl gilt die Gleichheit*

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \exp 1.$$

Beweis. Die äußeren Gleichheiten sind Definitionen. Aufgrund von Korollar 20.12 ist $\ln'(1) = 1$. Dies bedeutet aufgrund der Definition des Differentialquotienten insbesondere

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = 1\,.$$

Wir schreiben die Folgenglieder der linken Seite als $n \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ und wenden darauf die Exponentialfunktion an. Daraus ergibt sich unter Verwendung der Stetigkeit und der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion die Gleichungskette

$$\begin{aligned} \exp 1 &= \exp\left(\lim_{n\to\infty}\left(n \cdot \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \exp\left(n \cdot \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \\ &= e. \end{aligned}$$

□

Satz 20.15. *Die Sinusfunktion*

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\, z \longmapsto \sin z\,,$$

ist differenzierbar mit

$$\sin'(z) = \cos z$$

und die Kosinusfunktion

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\, z \longmapsto \cos z\,,$$

ist differenzierbar mit

$$\cos'(z) = -\sin z\ .$$

Beweis. Siehe Aufgabe 20.14. □

Abbildungsverzeichnis