Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2009**

Einführung in die Algebra

Arbeitsblatt 11

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 1. Betrachte den Beweis zu Lemma 11.2 mit der dortigen Notation. Begründe die folgenden Aussagen.

(1) Eine eigentliche Isometrie mit zwei Fixachsen ist die Identität.
(2) G ist die Vereinigung aller G_H.
(3) Sei $g \neq \operatorname{id}$. Das Element g kommt in genau zwei der G_H vor. In welchen?
(4) Die Halbachsenklasse K_i enthält n/n_i Elemente.

Aufgabe 2. Überprüfe die Formel

$$2(1-\frac{1}{n}) = \sum_{i=1}^{m}(1-\frac{1}{n_i})$$

für den Oktaeder, den Dodekaeder und den Ikosaeder.

Aufgabe 3. Sei G eine Gruppe, M eine Menge und

$$G \longrightarrow \operatorname{Perm}(M),\, g \longmapsto \sigma_g,$$

ein Gruppenhomomorphismus in die Permutationsgruppe von M. Zeige, dass dies in natürlicher Weise einen Gruppenhomomorphismus

$$G \longrightarrow \operatorname{Perm}(\mathfrak{P}\,(\mathrm{M}))\,,\, g \longmapsto (N \mapsto g(N)),$$

in die Permutationsgruppe der Potenzmenge induziert.

Aufgabe 4. Bestimme sämtliche Matrizen, die den Symmetrien eines Quadrates mit den Eckpunkten $(\pm 1, \pm 1)$ entsprechen. Sehen diese Matrizen für jedes Quadrat (mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt) gleich aus?

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 5. (4 Punkte)

Es seien A_1, A_2, A_3 und A_4 vier Geraden im $\mathbb{R}^3$ durch den Nullpunkt mit der Eigenschaft, dass keine drei davon in einer Ebene liegen. Es sei

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

eine lineare Isometrie mit $f(A_i) = A_i$ für $i = 1, 2, 3, 4$. Zeige, dass f die Identität ist. Man gebe ein Beispiel an, dass diese Aussage ohne die Ebenenbedingung nicht gilt.

Aufgabe 6. (2 Punkte)

Betrachte ein gleichseitiges Dreieck mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt und mit $(1, 0)$ als einem Eckpunkt. Bestimme die (eigentlichen und uneigentlichen) Matrizen, die den Symmetrien an diesem Dreieck entsprechen.

Aufgabe 7. (2 Punkte)

Zeige, dass sich jede endliche Gruppe als Untergruppe der $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ realisieren lässt.

Aufgabe 8. (4 Punkte)

Es seien $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ Drehungen um die x-Achse, die y-Achse und die z-Achse mit den Ordungen n_1, n_2, n_3 (φ_1 ist also eine Drehung um den Winkel $360/n_1$ Grad um die x-Achse, etc.). Es sei $1 \leq n_1 \leq n_2 \leq n_3$. Für welche Tupel (n_1, n_2, n_3) ist die von diesen drei Drehungen erzeugte Gruppe endlich?

Aufgabe 9. (2 Punkte)

Man gebe ein Beispiel einer Raumdrehung, bei der sämtiche Matrixeinträge $\neq 0, 1$ sind.

Aufgabe 10. (3 Punkte)

Es sei G eine Gruppe und seien U, V Untergruppen von G. Zeige folgende Aussagen.

(1) $UV = \{uv \mid u \in U, v \in V\}$ ist genau dann eine Gruppe, wenn $UV = VU$ gilt.
(2) Ist G endlich, so gilt $\#(UV) = \#(U) \cdot \#(V)/\#(U \cap V)$.
(3) Sind U und V echte Untergruppen von G, so gilt $U \cup V \neq G$.

Die nächste Aufgabe verwendet das Konzept einer exakten Sequenz.

Seien $G_0, \ldots, G_n$ Gruppen und $f_i : G_{i-1} \to G_i$ Gruppenhomomorphismen derart, dass $\operatorname{kern} f_{i+1} = \operatorname{bild} f_i$ für $i = 1, \ldots, n$. Dann heißt

$$G_0 \to G_1 \to \ldots \to G_{n-1} \to G_n$$

eine *exakte Sequenz von Gruppen.*

Aufgabe 11. (3 Punkte)

Sei

$$G_0 \to G_1 \to \ldots \to G_{n-1} \to G_n$$

eine exakte Sequenz von Gruppen, wobei alle beteiligten Gruppen endlich seien und $G_0 = G_n$ die triviale Gruppe sei. Zeige, dass dann gilt

$$\prod_{i=0}^{n} \#(G_i)^{(-1)^i} = 1 \,.$$

Aufgabe 12. (3 Punkte)

Zeige: Keine der alternierenden Gruppen A_n besitzt eine Untergruppe vom Index zwei.

Für die folgende Aufgabe gibt es keinen festen Abgabetermin. Sie gilt so lange, bis eine befriedigende Lösung auf Commons hochgeladen wurde.

Aufgabe 13. (10 Punkte)

Schreibe eine Computeranimation, die zeigt, wie sich fünf auf einer Kugeloberfläche platzierte Teilchen mit der gleichen positiven Ladung aufgrund ihrer gegenseitigen Abstoßung bewegen (wobei sie aber auf der Kugeloberfläche bleiben), und welche Endposition (?) sie einnehmen.