Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2011/2012**

Einführung in die mathematische Logik

Arbeitsblatt 7

Aufgabe 7.1. Beweise aus der Existenzeinführung im Antezedens die *Alleinführung im Sukzedens*. Sie besagt, dass man aus

$$\vdash q \rightarrow p\frac{y}{x}$$

unter der Bedingung, dass y weder in $\forall xp$ noch in q frei vorkommt, auf

$$\vdash q \rightarrow \forall xp$$

schließen kann.

Aufgabe 7.2. Zeige

$$\vdash \exists x(x = y)\,.$$

Aufgabe 7.3. a) Zeige

$$\vdash \exists x(p \wedge q) \rightarrow \exists xp \wedge \exists xq\,.$$

b) Zeige, dass

$$\exists xp \wedge \exists xq \rightarrow \exists x(p \wedge q)$$

keine Tautologie ist.

Die beiden folgenden Aufgaben sind vermutlich mühselig.

Aufgabe 7.4. Man gebe einen formalen Beweis für die Aussage, dass die Hintereinanderschaltung von zwei surjektiven Abbildungen auf einer Menge wieder surjektiv ist.

Aufgabe 7.5. Man gebe einen formalen Beweis für die Aussage, dass die Hintereinanderschaltung von zwei injektiven Abbildungen auf einer Menge wieder injektiv ist.

Aufgabe 7.6. Es sei Γ eine Ausdrucksmenge aus einer Sprache erster Stufe und p ein weiterer Ausdruck. Es sei p nicht aus Γ ableitbar. Zeige, dass man aus $\Gamma \cup \{\neg p\}$ keinen Widerspruch (also keinen Ausdruck der Form $q \wedge \neg q$) ableiten kann.

Aufgabe 7.7. Es sei Γ eine Menge von S-Ausdrücken, die über beliebig großen endlichen Grundmengen erfüllbar ist. Zeige, dass Γ auch über einer unendlichen Menge erfüllbar ist.

Wegen der vorstehenden Aussage gibt es keinen Ausdruck, der genau in allen endlichen Grundmengen gilt. Dennoch kann man die (Un-)endlichkeit prädikatenlogisch charakterisieren.

Aufgabe 7.8. Zeige, dass es eine Ausdrucksmenge Γ gibt mit der Eigenschaft, dass für jede Interpretation I genau dann $I \vDash \Gamma$ gilt, wenn die Grundmenge der Interpretation unendlich ist.