Prof. Dr. H. Brenner Osnabrück WS 2011/2012

Mathematik für Anwender I

Arbeitsblatt 15

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 15.1. Zeige, dass eine lineare Funktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto ax,$$

stetig ist.

Aufgabe 15.2. Zeige, dass die Funktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto |x|,$$

stetig ist.

Aufgabe 15.3. Zeige, dass die Funktion

$$\mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0},\ x \longmapsto \sqrt{x},$$

stetig ist.

Aufgabe 15.4. Sei $T \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge und sei

$$f : T \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Es sei $x \in T$ ein Punkt mit $f(x) > 0$. Zeige, dass dann auch $f(y) > 0$ gilt für alle y aus einem nichtleeren offenen Intervall $]x-a, x+a[$.

Aufgabe 15.5. Es seien $a < b < c$ reelle Zahlen und es seien

$$g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

und

$$h : [b,c] \longrightarrow \mathbb{R}$$

stetige Funktionen mit $g(b) = h(b)$. Zeige, dass dann die Funktion

$$f : [a,c] \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit

$$f(t) = g(t) \text{ für } t \leq b \text{ und } f(t) = h(t) \text{ für } t > b$$

ebenfalls stetig ist.

Aufgabe 15.6. Berechne den Grenzwert der Folge

$$x_n = 5\left(\frac{2n+1}{n}\right)^3 - 4\left(\frac{2n+1}{n}\right)^2 + 2\left(\frac{2n+1}{n}\right) - 3$$

für $n \rightarrow \infty$.

Aufgabe 15.7. Es sei

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion, die nur endlich viele Werte annimmt. Zeige, dass f konstant ist.

Aufgabe 15.8. Man gebe ein Beispiel einer stetigen Funktion

$$f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R},$$

die genau zwei Werte annimmt.

Aufgabe 15.9.*

Zeige, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{falls } x \in \mathbb{Q}\,, \\ 0, & \text{sonst}\,, \end{cases}$$

nur im Nullpunkt 0 stetig ist.

Aufgabe 15.10. Es sei $T \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge und sei $a \in \mathbb{R}$ ein Punkt. Es sei $f : T \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und $b \in \mathbb{R}$. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(1) Es ist
$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b\,.$$
(2) Für jedes $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ derart, dass für alle $x \in T$ mit $d(x,a) \leq \delta$ die Abschätzung $d(f(x), b) \leq \epsilon$ folgt.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 15.11. (4 Punkte)
Bestimme, für welche Punkte $x \in \mathbb{R}$ die durch

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ für } x \leq -1 \\ x^2 \text{ für } -1 < x < 2 \\ -2x + 7 \text{ für } x \geq 2 \end{cases}$$

definierte Funktion stetig ist.

Aufgabe 15.12. (4 Punkte)
Bestimme den Grenzwert der durch

$$b_n = 2a_n^4 - 6a_n^3 + a_n^2 - 5a_n + 3\,,$$

definierten Folge, wobei

$$a_n = \frac{3n^3 - 5n^2 + 7}{4n^3 + 2n - 1}$$

ist.

Aufgabe 15.13. (3 Punkte)
Zeige, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ falls } x \in \mathbb{Q}\,, \\ 0 \text{ sonst}\,, \end{cases}$$

in keinem Punkt $x \in \mathbb{R}$ stetig ist.

Aufgabe 15.14. (3 Punkte)
Entscheide, ob die Folge

$$a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

konvergiert, und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

Aufgabe 15.15. (4 Punkte)
Bestimme den Grenzwert der rationalen Funktion

$$\frac{2x^3 + 3x^2 - 1}{x^3 - x^2 + x + 3}$$

im Punkt $a = -1$.