Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2011/2012**

Mathematik für Anwender I

Arbeitsblatt 19

Aufwärmaufgaben

Die folgende Aufgabe löse man sowohl direkt als auch mittels der Ableitungsregeln.

Aufgabe 19.1. Bestimme die Ableitung der Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) = x^n,$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 19.2. Bestimme die Ableitung der Funktion

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) = x^n$$

für jedes $n \in \mathbb{Z}$.

Aufgabe 19.3. Bestimme die Ableitung der Funktion

$$f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) = x^{\frac{1}{n}},$$

für jedes $n \in \mathbb{N}_+$.

Aufgabe 19.4.*

Bestimme direkt (ohne Verwendung von Ableitungsregeln) die Ableitung der Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x + 3,$$

in einem beliebigen Punkt $a \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 19.5. Zeige, dass die reelle Betragsfunktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto |x|,$$

im Nullpunkt nicht differenzierbar ist.

Aufgabe 19.6. Bestimme die Ableitung der Funktion

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^3}.$$

Aufgabe 19.7. Zeige, dass die Ableitung einer rationalen Funktion wieder eine rationale Funktion ist.

Aufgabe 19.8. Es sei $f(x) = x^3 + 4x^2 - 1$ und $g(y) = y^2 - y + 2$. Bestimme die Ableitung der Hintereinanderschaltung $h(x) = g(f(x))$ direkt und mittels der Kettenregel.

Aufgabe 19.9. Zeige, dass ein Polynom $P \in \mathbb{R}[X]$ genau dann einen Grad $\leq d$ besitzt (oder $P = 0$ ist), wenn die $(d+1)$-te Ableitung von P das Nullpolynom ist.

Aufgabe 19.10.*

Es seien
$$f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
zwei differenzierbare Funktionen und sei
$$h(x) = (g(f(x)))^2 f(g(x)) .$$

a) Drücke die Ableitung h' mit den Ableitungen von f und g aus.

b) Sei nun
$$f(x) = x^2 - 1 \text{ und } g(x) = x + 2 .$$
Berechne $h'(x)$ auf zwei verschiedene Arten, einerseits über $h(x)$ und andererseits über die Formel aus Teil a).

Bei der „linearen Approximation“ von differenzierbaren Abbildungen kommen sogenannte affin-lineare Abbildungen vor.

Es sei K ein Körper und es seien V und W Vektorräume über K. Eine Abbildung
$$\alpha : V \longrightarrow W,\, v \longmapsto \alpha(v) = \varphi(v) + w,$$
wobei φ eine lineare Abbildung und $w \in W$ ein Vektor ist, heißt *affin-linear*.

Aufgabe 19.11. Es sei K ein Körper und W ein K-Vektorraum. Zeige, dass es zu zwei Vektoren $u, v \in W$ genau eine affin-lineare Abbildung
$$\alpha : K \longrightarrow W$$
gibt mit $\alpha(0) = u$ und $\alpha(1) = v$.

Aufgabe 19.12. Bestimme die affin-lineare Abbildung
$$\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
mit $\alpha(0) = (2, 3, 4)$ und $\alpha(1) = (5, -2, -1)$.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 19.13. (3 Punkte)

Bestimme die Ableitung der Funktion

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x^3 - x + 2},$$

wobei D die Menge sei, auf der das Nennerpolynom nicht verschwindet.

Aufgabe 19.14. (4 Punkte)

Bestimme die Tangenten an den Graphen zur Funktion $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$, die parallel zu $y = x$ sind.

Aufgabe 19.15. (4 Punkte)

Es sei $f(x) = \frac{x^2+5x-2}{x+1}$ und $g(y) = \frac{y-2}{y^2+3}$. Bestimme die Ableitung der Hintereinanderschaltung $h(x) = g(f(x))$ direkt und mittels der Kettenregel.

Aufgabe 19.16. (2 Punkte)

Bestimme die affin-lineare Abbildung

$$\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

deren Graph durch die beiden Punkte $(-2, 3)$ und $(5, -7)$ verläuft.

Aufgabe 19.17. (3 Punkte)

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge und seien

$$f_i : D \longrightarrow \mathbb{R},\ i = 1, \ldots, n,$$

differenzierbare Funktionen. Beweise die Formel

$$(f_1 \cdots f_n)' = \sum_{i=1}^{n} f_1 \cdots f_{i-1} f_i' f_{i+1} \cdots f_n \, .$$