Prof. Dr. H. Brenner, Dr. L. Katthän **Osnabrück SS 2014**

Einführung in die mathematische Logik

Arbeitsblatt 13

Übungsaufgaben

Aufgabe 13.1. Sei $\mathbb{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen und $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass die Menge

$$\mathbb{N}_{\geq n} = \{x \in \mathbb{N} | \, x \geq n\}$$

ebenfalls die Dedekind-Peano-Axiome (mit welchem ausgezeichneten Element und mit welcher Nachfolgeabbildung) erfüllt.

Aufgabe 13.2. Es seien N_1 und N_2 Dedekind-Peano-Modelle der natürlichen Zahlen. Es sei

$$\varphi \colon N_1 \longrightarrow N_2$$

der eindeutig bestimmte Isomorphismus mit $\varphi(0_1) = 0_2$ und $\varphi(n') = (\varphi(n))'$ für alle $n \in N_1$. Zeige, dass φ die Addition respektiert, dass also

$$\varphi(m+n) = \varphi(m) + \varphi(n)$$

für alle $m, n \in N_1$ gilt.

Aufgabe 13.3. Zeige, dass in einem Peano-Halbring die Addition assoziativ ist.

Aufgabe 13.4. Zeige, dass in einem Peano-Halbring die Multiplikation kommutativ und assoziativ ist und dass 1 das neutrale Element ist.

Aufgabe 13.5. Zeige, dass in einem Peano-Halbring die Kürzungseigenschaft gilt, d.h. dass aus $xz = yz$ mit $z \neq 0$ die Gleichheit $x = y$ folgt.

Aufgabe 13.6. Zeige, dass in einem Peano-Halbring die Ordnungsrelation mit der Addition und der Multiplikation verträglich ist.

Aufgabe 13.7. Zeige, dass in einem Peano-Halbring der Ausdruck

$$\forall x \forall y \, (x \leq y \wedge y \leq x+1 \rightarrow (y = x \vee y = x+1))$$

gilt.

Aufgabe 13.8. Zeige, dass in einer Struktur, die die Peano-Axiome für den Nachfolger erfüllt, die Aussage

$$\forall x\,(x = 0 \vee x = N0 \vee \exists y\,(NNy = x))$$

gilt.

Aufgabe 13.9. Es sei M die disjunkte Vereinigung aus $\mathbb{N}$ und aus $\mathbb{Z}$.[1] Wir definieren auf M eine Nachfolgerfunktion, die auf den beiden Bestandteilen durch den üblichen Nachfolger gegeben ist (also durch $+1$), und wir betrachten die $0 \in \mathbb{N}$ als die Null von M.

a) Zeige, dass M die ersten beiden Axiome aus den Peano-Axiomen für die Nachfolgerfunktion erfüllt.

b) Zeige, dass es keine Addition auf M gibt, die mit den Additionen auf $\mathbb{N}$ und auf $\mathbb{Z}$ übereinstimmt und für die die Abziehregel gilt.

c) Gilt das Induktionsaxiom (formuliert für die Nachfolgerfunktion)?[2]

Aufgabe 13.10. Zeige, dass die Vorgängereigenschaft

$$\forall x\,(x \neq 0 \rightarrow \exists y(x = y + 1))$$

aus der Menge der erststufigen Peano-Axiome ableitbar ist.

Aufgabe 13.11. Zeige, dass die Division mit Rest aus der Menge der erststufigen Peano-Axiome ableitbar ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 13.12. (3 Punkte)

Es seien N_1 und N_2 Dedekind-Peano-Modelle der natürlichen Zahlen. Es sei

$$\varphi\colon\ N_1 \longrightarrow N_2$$

der eindeutig bestimmte Isomorphismus mit $\varphi(0_1) = 0_2$ und $\varphi(n') = (\varphi(n))'$ für alle $n \in N_1$. Zeige, dass φ die Multiplikation respektiert, dass also

$$\varphi(m \cdot n) = \varphi(m) \cdot \varphi(n)$$

für alle $m, n \in N_1$ gilt.

[1] Dabei muss man darauf achten, die Elemente aus $\mathbb{N}$ nicht mit denen aus $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ zu verwechseln. Beispielsweise kann man die Elemente einerseits mit 5 und andererseits mit $5_{\mathbb{Z}}$ bezeichnen.

[2] Diese Aufgabe ist wohl schwierig.

Aufgabe 13.13. (4 Punkte)

Es sei $\mathbb{N}$ ein Peano-Dedekind-Modell der natürlichen Zahlen und M ein Peano-Halbring. Zeige, dass es eine eindeutig bestimmte Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{N} \longrightarrow M$$

mit $\varphi(0) = 0$ und $\varphi(n') = \varphi(n) + 1$ gibt. Zeige ferner, dass φ injektiv ist und die Addition und die Multiplikation respektiert.

Aufgabe 13.14. (4 Punkte)

Zeige, dass in einem Peano-Halbring das Distributivgesetz gilt.

Aufgabe 13.15. (3 Punkte)

Zeige, dass $\mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $0, 1$ und der natürlichen Addition und Multiplikation die ersten sechs Peano-Axiome erfüllt, aber nicht das Induktionsaxiom.