Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2011/2012**

Mathematik für Anwender I

Arbeitsblatt 3

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 3.1. Zeige, dass die Binomialkoeffizienten die rekursive Bedingung

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

erfüllen.

Aufgabe 3.2. Zeige, dass die Binomialkoeffizienten natürliche Zahlen sind.

Aufgabe 3.3. Beweise die Formel

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.$$

Aufgabe 3.4. Beweise durch Induktion, dass für $n \geq 10$ die Abschätzung

$$3^n \geq n^4$$

gilt.

Bei den Rechenaufgaben zu den komplexen Zahlen muss das Ergebnis immer in der Form $a + bi$ mit reellen Zahlen a, b angegeben werden, wobei diese so einfach wie möglich sein sollen.

Aufgabe 3.5. Berechne die folgenden Ausdrücke innerhalb der komplexen Zahlen.

(1) $(5 + 4i)(3 - 2i)$.
(2) $(2 + 3i)(2 - 4i) + 3(1 - i)$.
(3) $(2i + 3)^2$.
(4) i^{1011}.
(5) $(-2 + 5i)^{-1}$.
(6) $\frac{4-3i}{2+i}$.

Aufgabe 3.6. Zeige, dass die komplexen Zahlen einen Körper bilden.

Aufgabe 3.7. Beweise die folgenden Aussagen zu Real- und Imaginärteil von komplexen Zahlen.

(1) $z = \mathrm{Re}\,(z) + \mathrm{Im}\,(z)i$.
(2) $\mathrm{Re}\,(z + w) = \mathrm{Re}\,(z) + \mathrm{Re}\,(w)$.
(3) $\mathrm{Im}\,(z + w) = \mathrm{Im}\,(z) + \mathrm{Im}\,(w)$.
(4) Für $r \in \mathbb{R}$ ist
$$\mathrm{Re}\,(rz) = r\,\mathrm{Re}\,(z) \text{ und } \mathrm{Im}\,(rz) = r\,\mathrm{Im}\,(z)\,.$$
(5) $z = \mathrm{Re}\,(z)$ genau dann, wenn $z \in \mathbb{R}$ ist, und dies ist genau dann der Fall, wenn $\mathrm{Im}\,(z) = 0$ ist.

Aufgabe 3.8. Zeige, dass innerhalb der komplexen Zahlen folgende Rechenregeln gelten.

(1) $|z| = \sqrt{z\,\overline{z}}$.
(2) $\mathrm{Re}\,(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}$.
(3) $\mathrm{Im}\,(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i}$.
(4) $\overline{z} = \mathrm{Re}\,(z) - i\,\mathrm{Im}\,(z)$.
(5) Für $z \neq 0$ ist $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$.

Aufgabe 3.9. Zeige die folgenden Regeln für den Betrag von komplexen Zahlen.

(1) Für reelles z stimmen reeller und komplexer Betrag überein.
(2) Es ist $|z| = 0$ genau dann, wenn $z = 0$ ist.
(3) $|z| = |\overline{z}|$.
(4) $|zw| = |z||w|$.
(5) $\mathrm{Re}\,(z), \mathrm{Im}\,(z) \leq |z|$.
(6) Für $z \neq 0$ ist $|1/z| = 1/|z|$.

Aufgabe 3.10. Bestätige die in Beispiel 3.15 angegebene Formel für die Quadratwurzel einer komplexen Zahl $z = a + bi$ im Fall $b < 0$.

Aufgabe 3.11. Man bestimme die zwei komplexen Lösungen der Gleichung
$$z^2 + 5iz - 3 = 0\,.$$

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 3.12. (3 Punkte)

Beweise die Formel

$$n2^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} .$$

Aufgabe 3.13. (3 Punkte)

Berechne die komplexen Zahlen

$$(1+i)^n$$

für $n = 1, 2, 3, 4, 5$.

Aufgabe 3.14. (3 Punkte)

Zeige, dass für die komplexe Konjugation die folgenden Rechenregeln gelten

(1) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$.
(2) $\overline{-z} = -\overline{z}$.
(3) $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$.
(4) Für $z \neq 0$ ist $\overline{1/z} = 1/\overline{z}$.
(5) $\overline{\overline{z}} = z$.
(6) $\overline{z} = z$ genau dann, wenn $z \in \mathbb{R}$ ist.

Aufgabe 3.15. (2 Punkte)

Seien $a, b, c \in \mathbb{C}$ mit $a \neq 0$. Zeige, dass es für die Gleichung

$$az^2 + bz + c = 0$$

mindestens eine komplexe Lösung z gibt.

Aufgabe 3.16. (3 Punkte)

Berechne die Quadratwurzeln, die vierten Wurzeln und die achten Wurzeln von i.

Aufgabe 3.17. (4 Punkte)

Man finde alle drei komplexen Zahlen z, die die Bedingung

$$z^3 = 1$$

erfüllen.