Prof. Dr. H. Brenner, Dr. L. Katthän **Osnabrück SS 2014**

Einführung in die mathematische Logik

Arbeitsblatt 17

Übungsaufgaben

Aufgabe 17.1. Es sei $S = \{0, 1, +, \cdot\}$. Zeige, dass die Automorphismengruppen der S-Strukturen $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ jeweils trivial sind.

Aufgabe 17.2. Es sei $S = \{0, 1, +, \cdot\}$ die Symbolmenge eines Körpers. Zeige, dass es einen Unterkörper $K \subseteq \mathbb{R}$ derart gibt, dass $\mathrm{Aut}_S\, K$ nicht trivial ist.

Aufgabe 17.3. Es sei $S = \{0, 1, +, \cdot, \geq\}$ die Symbolmenge eines angeordneten Körpers. Zeige, dass für jeden Unterkörper $K \subseteq \mathbb{R}$ die Automorphismengruppe $\mathrm{Aut}_S\, K$ trivial ist.

Aufgabe 17.4. Es sei $S = \{0, 1, +, \cdot, \geq\}$ die Symbolmenge eines angeordneten Körpers. Zeige, dass es einen angeordneten Körper K derart gibt, dass $\mathrm{Aut}_S\, K$ nicht trivial ist.

Aufgabe 17.5. Es sei S ein Symbolalphabet erster Stufe und M eine S-Struktur. Für jede elementare Äquivalenzklasse $[m] \subseteq M$ gebe es einen S-Ausdruck $\alpha_{[m]}$ in einer freien Variablen x, der die Klasse $[m]$ beschreibt. Zeige, dass für jedes k-stellige Funktionssymbol f aus $m_1 \sim m'_1, \ldots, m_k \sim m'_k$ die elementare Äquivalenz $f^M(m_1, \ldots, m_k) \sim f^M(m'_1, \ldots, m'_k)$ folgt.

Aufgabe 17.6. Es sei S ein Symbolalphabet erster Stufe und M eine S-Struktur. Für jede elementare Äquivalenzklasse $[m] \subseteq M$ gebe es einen S-Ausdruck $\alpha_{[m]}$ in einer freien Variablen x, der die Klasse $[m]$ beschreibt. Zeige, dass für ein k-stelliges Funktionssymbol f aus $m_1 \sim m'_1, \ldots, m_k \sim m'_k$ nicht die Gleichheit $f^M(m_1, \ldots, m_k) = f^M(m'_1, \ldots, m'_k)$ folgen muss.

Aufgabe 17.7. Es sei S das Symbolalphabet, das außer Variablen für jedes $k \in \mathbb{N}_+$ ein einstelliges Relationssymbol R_k enthält. Wir betrachten die Menge $M = \mathbb{N}_+$, wobei wir das Relationssymbol R_k durch

$$R_k^M(n) \text{ genau dann, wenn } n \text{ ein Vielfaches von } k \text{ ist}$$

interpretieren. Es sei $\alpha \in L^S$ ein Ausdruck in einer freien Variablen x, wobei in α die Relationssymbole $R_{k_1}, \ldots, R_{k_m}$ vorkommen mögen. Es sei k das kleinste gemeinsame Vielfache von $k_1, \ldots, k_m$. Zeige, dass

$$M\frac{n}{x} \vDash \alpha$$

genau dann gilt, wenn

$$M\frac{n+k}{x} \vDash \alpha$$

gilt.

Aufgabe 17.8. Es sei f ein zweistelliges Funktionssymbol und g ein einstelliges Funktionssymbol. Man mache sich klar, dass die Symbolkette $fggg$ in zweifacher Weise als formal-zusammengesetztes Funktionssymbol gelesen werden kann.

Aufgabe 17.9. Es sei S ein erststufiges Symbolalphabet, M eine S-Struktur und $T \subseteq M$ eine Teilmenge. Zeige, dass die (rekursiv definierte) funktionale Hülle von T gleich dem Durchschnitt über alle funktional abgeschlossenen Teilmengen $N \subseteq M$ ist, die T umfassen.

In der Mathematik interessiert man sich nicht nur für die von einer Teilmenge einer Struktur erzeugte funktionale Hülle, sondern auch für Unterstrukturen, in denen zusätzlich noch die gleichen Gesetzmäßigkeiten (ausgedrückt durch ein Axiomensystem Γ) wie in der Struktur gelten, beispielsweise die von einer Teilmenge erzeugten Untergruppen, Unterringe, Unterkörper, Untervektorräume. Diese von einer Teilmenge erzeugten $S - \Gamma$-Strukturen kann man oft, wenn es sie überhaupt gibt, als Durchschnitt über alle $S - \Gamma$-Unterstrukturen erhalten, die die Teilmenge umfassen.

Aufgabe 17.10. Wir betrachten die Gruppe $(\mathbb{Z}, 0, +)$. Bestimme die funktionale Hülle von $T = \{15, 20\}$ (hier spricht man vom erzeugten Untermonoid) und die von T erzeugte Untergruppe.

Aufgabe 17.11. Das Symbolalphabet S bestehe neben Variablen aus einem einstelligen Funktionssymbol f und es sei $\Gamma = \{\alpha\}$ mit $\alpha = \forall x \exists y (fy = x)$. Es sei $M = \mathbb{Z}$, wobei f als $+2$ interpretiert wird mit der einzigen Ausnahme

$$f(x) = \begin{cases} x+1, \text{ falls } x \geq 0\,, \\ 0, \text{ falls } x = -1\,, \\ x+2, \text{ falls } x \leq -2\,. \end{cases}$$

a) Zeige, dass Γ von M erfüllt wird.

b) Bestimme die funktionale Hülle von $\{0\}$.

c) Zeige, dass die funktionale Hülle von $\{0\}$ nicht Γ erfüllt.

d) Man gebe zwei funktional abgeschlossene, Γ-erfüllende und 0 enthaltende Teilmengen $T_1, T_2 \subseteq \mathbb{Z}$ an, deren Durchschnitt $T_1 \cap T_2$ nicht Γ erfüllt.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 17.12. (3 Punkte)

Es sei S ein Symbolmenge und M eine endliche S-Struktur. Zeige, dass zwei Elemente $m, n \in M$ genau dann elementar äquivalent sind, wenn es einen S-Automorphismus

$$\varphi\colon M \longrightarrow M$$

mit $\varphi(m) = n$ gibt.

Aufgabe 17.13. (4 Punkte)

Zeige, dass ein angeordneter Körper, der die Supremumseigenschaft für erststufige Ausdrücke besitzt, reell-abgeschlossen ist.

Verwende, dass Polynomfunktionen auf einem angeordneten Körper stetig sind.

Aufgabe 17.14. (4 Punkte)

Es sei S das Symbolalphabet, das neben Variablen aus einem zweistelligen Relationssymbol G besteht. Wir betrachten vierelementige S-Strukturen, die $\forall x \forall y\, (Gxy \rightarrow \neg Gyx)$ erfüllen (also WM-Fußballgruppen, wobei $G(m,n)$ als m gewinnt gegen n interpretiert wird). Erstelle Aussagen $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_9$ in einer freien Variablen x derart, dass

$$M\frac{m}{x} \vDash \alpha_k$$

bedeutet, dass m in der Abschlusstabelle k Punkte hat.

Aufgabe 17.15. (3 Punkte)

Man gebe ein Beispiel für zwei (abstrakte) WM-Fußballgruppen, die die gleiche Abschlusspunktetabelle besitzen, aber nicht isomorph sind.