

Wiederholertutorium Mathematik I**Aufgabenblatt 2****Anwesenheitsaufgaben**

AUFGABE 2.1. Finde eine allgemeine Formel für die folgenden beiden Summen in Abhängigkeit von $n \in \mathbb{N}$.

- (1) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$.
(2) $\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} k^2$.

Gehe dabei wie folgt vor: Berechne die Summe für einige n , leite daraus eine Vermutung für die allgemeine Formel her, und beweise diese dann mit vollständiger Induktion.

AUFGABE 2.2. Sei $m \in \mathbb{N}$. Zeige durch Induktion die Gleichheit

$$(2m+1) \prod_{i=1}^m (2i-1)^2 = \prod_{k=1}^m (4k^2-1).$$

AUFGABE 2.3. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und seien $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ zwei n -mal differenzierbare Funktionen. Zeige, dass

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} \cdot g^{(n-k)}$$

gilt.

AUFGABE 2.4. Zeige, dass eine nichtleere endliche Menge M gleich viele Teilmengen gerader und ungerader Mächtigkeit besitzt. Beweise diese Aussage unter Verwendung von Binominalkoeffizienten.

AUFGABE 2.5. Es sei $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ eine Funktion mit der Eigenschaft dass $f(f(n)) < f(n+1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Zeige, dass f die Identität ist.

Hinweis: Zeige zuerst durch Induktion, dass $f(k) \geq n$ für alle $k \geq n$ gilt. Zeige danach, dass f streng monoton wachsend ist.

AUFGABE 2.6. Zeige, dass es genau $n!$ bijektive Selbstabbildungen der Menge $\{1, \dots, n\}$ gibt.

**Hausaufgaben (Korrektur nur für Leute ohne
Klausurberechtigung)**

AUFGABE 2.7. (4 Punkte)

Die Städte S_1, \dots, S_n seien untereinander durch Straßen verbunden und zwischen zwei Städten gibt es immer genau eine Straße. Wegen Bauarbeiten sind zur Zeit alle Straßen nur in einer Richtung befahrbar. Zeige, dass es trotzdem mindestens eine Stadt gibt, von der aus alle anderen Städte erreichbar sind.

AUFGABE 2.8. (4 Punkte)

Zeige, dass es zu zwei natürlichen Zahlen m und n reelle Zahlen a_0, \dots, a_m gibt, so dass

$$\sum_{k=1}^n k^m = \frac{1}{m+1} n^{m+1} + a_m n^m + \dots + a_1 n + a_0$$

gilt.