

Mathematik für Anwender I**Arbeitsblatt 7****Aufwärmaufgaben**

AUFGABE 7.1. Drücke in \mathbb{Q}^2 den Vektor

$$(2, -7)$$

als Linearkombination der Vektoren

$$(5, -3) \text{ und } (-11, 4)$$

aus.

AUFGABE 7.2. Drücke in \mathbb{C}^2 den Vektor

$$(1, 0)$$

als Linearkombination der Vektoren

$$(3 + 5i, -3 + 2i) \text{ und } (1 - 6i, 4 - i)$$

aus.

AUFGABE 7.3. Es sei K ein Körper und V ein K -Vektorraum. Es sei v_i , $i \in I$, eine Familie von Vektoren in V und $w \in V$ ein weiterer Vektor. Es sei vorausgesetzt, dass die Familie

$$w, v_i, i \in I,$$

ein Erzeugendensystem von V ist und dass sich w als Linearkombination der v_i , $i \in I$, darstellen lässt. Zeige, dass dann schon v_i , $i \in I$, ein Erzeugendensystem von V ist.

AUFGABE 7.4. Es sei K ein Körper und V ein K -Vektorraum. Beweise folgende Aussagen.

- (1) Sei U_j , $j \in J$, eine Familie von Untervektorräumen von V . Dann ist auch der Durchschnitt

$$U = \bigcap_{j \in J} U_j$$

ein Untervektorraum.

- (2) Zu einer Familie $v_i, i \in I$, von Elementen in V ist der erzeugte Unterraum ein Unterraum.
- (3) Die Familie $v_i, i \in I$, ist genau dann ein Erzeugendensystem von V , wenn

$$\langle v_i, i \in I \rangle = V$$

ist.

AUFGABE 7.5. Zeige, dass die drei Vektoren

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

im \mathbb{R}^4 linear unabhängig sind.

AUFGABE 7.6. Man gebe im \mathbb{R}^3 drei Vektoren an, so dass je zwei von ihnen linear unabhängig sind, aber alle drei zusammen linear abhängig.

AUFGABE 7.7. Sei K ein Körper, V ein K -Vektorraum und $v_i, i \in I$, eine Familie von Vektoren in V . Beweise die folgenden Aussagen.

- (1) Wenn die Familie linear unabhängig ist, so ist auch zu jeder Teilmenge $J \subseteq I$ die Familie $v_i, i \in J$, linear unabhängig.
- (2) Die leere Familie ist linear unabhängig.
- (3) Wenn die Familie den Nullvektor enthält, so ist sie nicht linear unabhängig.
- (4) Wenn in der Familie ein Vektor mehrfach vorkommt, so ist sie nicht linear unabhängig.
- (5) Ein Vektor v ist genau dann linear unabhängig, wenn $v \neq 0$ ist.
- (6) Zwei Vektoren v und u sind genau dann linear unabhängig, wenn weder u ein skalares Vielfaches von v ist noch umgekehrt.

AUFGABE 7.8. Es sei K ein Körper, V ein K -Vektorraum und sei $v_i, i \in I$, eine Familie von Vektoren in V . Es sei $\lambda_i, i \in I$, eine Familie von Elementen $\neq 0$ aus K . Zeige, dass die Familie $v_i, i \in I$, genau dann linear unabhängig (ein Erzeugendensystem von V , eine Basis von V) ist, wenn dies für die Familie $\lambda_i v_i, i \in I$, gilt.

AUFGABE 7.9. Bestimme eine Basis für den Lösungsraum der linearen Gleichung

$$3x + 4y - 2z + 5w = 0.$$

AUFGABE 7.10. Bestimme eine Basis für den Lösungsraum des linearen Gleichungssystems

$$-2x + 3y - z + 4w = 0 \text{ und } 3z - 2w = 0.$$

AUFGABE 7.11. Zeige, dass im \mathbb{R}^3 die drei Vektoren

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

eine Basis bilden.

AUFGABE 7.12. Bestimme, ob im \mathbb{C}^2 die zwei Vektoren

$$\begin{pmatrix} 2 + 7i \\ 3 - i \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 15 + 26i \\ 13 - 7i \end{pmatrix}$$

eine Basis bilden.

AUFGABE 7.13. Es sei K ein Körper. Man finde ein lineares Gleichungssystem in drei Variablen, dessen Lösungsraum genau

$$\left\{ \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \mid \lambda \in K \right\}$$

ist.

Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 7.14. (3 Punkte)

Drücke in \mathbb{Q}^3 den Vektor

$$(2, 5, -3)$$

als Linearkombination der Vektoren

$$(1, 2, 3), (0, 1, 1) \text{ und } (-1, 2, 4)$$

aus. Zeige, dass man ihn nicht als Linearkombination von zweien der drei Vektoren ausdrücken kann.

AUFGABE 7.15. (2 Punkte)

Bestimme, ob im \mathbb{R}^3 die drei Vektoren

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

eine Basis bilden.

AUFGABE 7.16. (2 Punkte)

Bestimme, ob im \mathbb{C}^2 die zwei Vektoren

$$\begin{pmatrix} 2 - 7i \\ -3 + 2i \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 5 + 6i \\ 3 - 17i \end{pmatrix}$$

eine Basis bilden.

AUFGABE 7.17. (4 Punkte)

Es sei \mathbb{Q}^n der n -dimensionale Standardraum über \mathbb{Q} und sei $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{Q}^n$ eine Familie von Vektoren. Zeige, dass diese Familie genau dann eine \mathbb{Q} -Basis des \mathbb{Q}^n ist, wenn diese Familie aufgefasst im \mathbb{R}^n eine \mathbb{R} -Basis des \mathbb{R}^n bildet.

AUFGABE 7.18. (3 Punkte)

Es sei K ein Körper und sei

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in K^n$$

ein von 0 verschiedener Vektor. Man finde ein lineares Gleichungssystem in n Variablen mit $n - 1$ Gleichungen, dessen Lösungsraum genau

$$\left\{ \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \mid \lambda \in K \right\}$$

ist.