

Algebraische Kurven**Arbeitsblatt 10****Aufgabe 1.** (4 Punkte)

Skizziere die reellen Nullstellengebilde von $Y^n - X^n$ und bestimme das Verschwindungsideal zu den affin-algebraischen Mengen $V_n \subset \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$, die aus allen Geraden durch den Nullpunkt und durch die Eckpunkte eines regulären n -Ecks (mit $(1,0)$ als einem Eck) besteht.

Aufgabe 2. (4 Punkte)

Bestimme zum Ideal

$$I = (10, 6x^2 + 8, 4x^3 - 12)$$

in $\mathbb{Z}[x]$ die im Beweis zum Hilbertschen Basissatz konstruierte Idealkette und das zugehörige Erzeugendensystem von I . Schreibe die obigen Erzeuger als Linearkombination des konstruierten Erzeugendensystems.

Aufgabe 3. (3 Punkte)

Sei K ein Körper und sei A eine kommutative K -Algebra, die als K -Modul endlich sei. Zeige, dass ein Element $f \in A$ genau dann eine Einheit ist, wenn es ein Nichtnullteiler ist.

Aufgabe 4. (3 Punkte)

Seien K und L Körper, sei $K \subseteq L$ eine endliche Körpererweiterung und sei A , $K \subseteq A \subseteq L$, ein Zwischenring. Zeige, dass dann A ebenfalls ein Körper ist.

Aufgabe 5. (3 Punkte)

Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und $F \in K[X, Y]$ ein nicht-konstantes Polynom. Zeige, dass der Restklassenring

$$K[X, Y]/(F)$$

eine endliche K -Algebra ist.

Aufgabe 6. (5 Punkte)

Seien R, S, T kommutative Ringe und seien $\varphi : R \rightarrow S$ und $\psi : S \rightarrow T$ Ringhomomorphismen derart, dass S endlich über R und T endlich über S ist. Zeige, dass dann auch T endlich über R ist.

Aufgabe 7. (3 Punkte)

Sei \mathfrak{a} ein Radikal in einem kommutativen Ring. Zeige, dass \mathfrak{a} der Durchschnitt von Primidealen ist.

Die folgenden Aufgaben verwenden den Begriff des artinschen Moduls, der „dual“ zum Begriff des noetherschen Moduls ist.

Sei R ein kommutativer Ring. Ein R -Modul M heißt *artinsch*, wenn jede absteigende Kette

$$M_1 \supseteq M_2 \supseteq M_3 \supseteq \dots$$

von R -Untermoduln stationär wird.

Ein kommutativer Ring R heißt *artinsch*, wenn er als R -Modul artinsch ist.

Aufgabe 8. (3 Punkte)

Es sei A ein artinscher Integritätsbereich. Man zeige, dass A dann ein Körper ist. Geben Sie ein Beispiel eines artinschen kommutativen Ringes, der kein Körper ist.

Aufgabe 9. (5 Punkte)

Sei A ein kommutativer Ring und sei

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow P \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von A -Moduln. Man zeige, dass N genau dann artinsch ist, wenn M und P artinsch sind.

Aufgabe 10. (3 Punkte)

Sei K ein Körper und A eine endliche K -Algebra. Zeige: Dann ist A artinsch.

Aufgabe 11. (4 Punkte)

Sei R ein kommutativer Ring und M ein R -Modul. Zeigen Sie: Wenn M artinsch und $\phi : M \rightarrow M$ R -linear und injektiv ist, so ist ϕ ein Isomorphismus. Formulieren und beweisen Sie auch eine analoge Aussage für den Fall, dass M noethersch ist.