Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2013/2014**

Analysis I

Arbeitsblatt 8

Übungsaufgaben

Bei den Rechenaufgaben zu den komplexen Zahlen muss das Ergebnis immer in der Form $a + bi$ mit reellen Zahlen a, b angegeben werden, wobei diese so einfach wie möglich sein sollen.

Aufgabe 8.1. Berechne die folgenden Ausdrücke innerhalb der komplexen Zahlen.

(1) $(5 + 4i)(3 - 2i)$.
(2) $(2 + 3i)(2 - 4i) + 3(1 - i)$.
(3) $(2i + 3)^2$.
(4) i^{1011}.
(5) $(-2 + 5i)^{-1}$.
(6) $\frac{4-3i}{2+i}$.

Aufgabe 8.2. Zeige, dass für reelle Zahlen die Addition und die Multiplikation als reelle Zahlen und als komplexe Zahlen übereinstimmen.

Aufgabe 8.3. Zeige, dass die komplexen Zahlen einen Körper bilden.

Aufgabe 8.4. Zeige, dass $P = \mathbb{R}^2$ mit der komponentenweisen Addition und der komponentenweisen Multiplikation kein Körper ist.

Aufgabe 8.5. Skizziere die folgenden Teilmengen.

(1) $\{z \in \mathbb{C} |\ \text{Re } (z) \geq -3\}$,
(2) $\{z \in \mathbb{C} |\ \text{Im } (z) \leq 2\}$,
(3) $\{z \in \mathbb{C} |\ |z| \leq 5\}$.

Aufgabe 8.6.*

a) Berechne

$$(4 - 7i)(5 + 3i)\,.$$

b) Bestimme das inverse Element z^{-1} zu $z = 3 + 4i$.

c) Welchen Abstand hat z^{-1} aus Teil (b) zum Nullpunkt?

Aufgabe 8.7.*

Löse die lineare Gleichung

$$(2+5i)z = (3-7i)$$

über $\mathbb{C}$ und berechne den Betrag der Lösung.

Aufgabe 8.8. Finde zu einer komplexen Zahl $z = a + bi \neq 0$ die inverse komplexe Zahl mit Hilfe eines reellen linearen Gleichungssystems mit zwei Variablen und zwei Gleichungen.

Aufgabe 8.9. Beweise die folgenden Aussagen zu Real- und Imaginärteil von komplexen Zahlen.

(1) $z = \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z)\, i$.
(2) $\operatorname{Re}(z+w) = \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Re}(w)$.
(3) $\operatorname{Im}(z+w) = \operatorname{Im}(z) + \operatorname{Im}(w)$.
(4) Für $r \in \mathbb{R}$ ist

$$\operatorname{Re}(rz) = r \operatorname{Re}(z) \text{ und } \operatorname{Im}(rz) = r \operatorname{Im}(z)\ .$$

(5) $z = \operatorname{Re}(z)$ genau dann, wenn $z \in \mathbb{R}$ ist, und dies ist genau dann der Fall, wenn $\operatorname{Im}(z) = 0$ ist.

Aufgabe 8.10. Zeige, dass innerhalb der komplexen Zahlen folgende Rechenregeln gelten.

(1) $|z| = \sqrt{z\ \overline{z}}$.
(2) $\operatorname{Re}(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}$.
(3) $\operatorname{Im}(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i}$.
(4) $\overline{z} = \operatorname{Re}(z) - i \operatorname{Im}(z)$.
(5) Für $z \neq 0$ ist $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$.

Aufgabe 8.11. Zeige die folgenden Regeln für den Betrag von komplexen Zahlen.

(1) Für reelles z stimmen reeller und komplexer Betrag überein.
(2) Es ist $|z| = 0$ genau dann, wenn $z = 0$ ist.
(3) $|z| = |\overline{z}|$.
(4) $|zw| = |z|\,|w|$.
(5) $|\operatorname{Re}(z)|, |\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$.
(6) Für $z \neq 0$ ist $|1/z| = 1/|z|$.

Aufgabe 8.12. Zeige, dass eine Folge komplexer Zahlen

$$z_n = x_n + iy_n$$

genau dann konvergiert, wenn sowohl x_n als auch y_n konvergiert. Für den Grenzwert gilt dabei

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} x_n + i \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Aufgabe 8.13. Es seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen in $\mathbb{C}$. Beweise die folgenden Aussagen.

(1) Die Folge $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent und es gilt
$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = (\lim_{n\to\infty} x_n) + (\lim_{n\to\infty} y_n)\,.$$
(2) Die Folge $(x_n \cdot y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent und es gilt
$$\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = (\lim_{n\to\infty} x_n) \cdot (\lim_{n\to\infty} y_n)\,.$$
(3) Für $c \in \mathbb{C}$ gilt
$$\lim_{n\to\infty} cx_n = c(\lim_{n\to\infty} x_n)\,.$$
(4) Es sei $\lim_{n\to\infty} x_n = x \neq 0$ und $x_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $\left(\frac{1}{x_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ebenfalls konvergent mit
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{x}\,.$$
(5) Es sei $\lim_{n\to\infty} x_n = x \neq 0$ und $x_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $\left(\frac{y_n}{x_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ebenfalls konvergent mit
$$\lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} y_n}{x}\,.$$

Aufgabe 8.14. Sei $z \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl mit $|z| < 1$. Zeige, dass die Folge $(z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 0 konvergiert.

Aufgabe 8.15. Sei $z \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl mit $|z| > 1$. Zeige, dass die Folge $(z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert.

Aufgabe 8.16. Bestätige die in Beispiel 8.11 angegebene Formel für die Quadratwurzel einer komplexen Zahl $z = a + bi$ im Fall $b < 0$.

Aufgabe 8.17. Seien $a, b, c \in \mathbb{C}$ mit $a \neq 0$. Zeige, dass es für die Gleichung
$$az^2 + bz + c = 0$$
mindestens eine komplexe Lösung z gibt.

Aufgabe 8.18. Seien $a, b, c \in \mathbb{C}$ mit $a \neq 0$. Man charakterisiere, wann es für die Gleichung
$$az^2 + bz + c = 0$$
genau eine Lösung in $\mathbb{C}$ gibt und wann zwei Lösungen.

Aufgabe 8.19. Man bestimme die zwei komplexen Lösungen der Gleichung
$$z^2 + 5iz - 3 = 0\,.$$

Der Begriff eines Häufungspunktes lässt sich unmittelbar auf komplexe Folgen erweitern.

Aufgabe 8.20. Bestimme die Häufungspunkte der komplexen Folge $(i^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Man gebe für jeden Häufungspunkt eine Teilfolge an, die gegen diesen Punkt konvergiert.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 8.21. (3 Punkte)

Berechne die komplexen Zahlen

$$(1+i)^n$$

für $n = 1, 2, 3, 4, 5$.

Aufgabe 8.22. (3 Punkte)

Zeige, dass für die komplexe Konjugation die folgenden Rechenregeln gelten.

(1) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$.
(2) $\overline{-z} = -\overline{z}$.
(3) $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$.
(4) Für $z \neq 0$ ist $\overline{1/z} = 1/\overline{z}$.
(5) $\overline{\overline{z}} = z$.
(6) $\overline{z} = z$ genau dann, wenn $z \in \mathbb{R}$ ist.

Aufgabe 8.23. (3 Punkte)

Berechne die Quadratwurzeln, die vierten Wurzeln und die achten Wurzeln von i.

Aufgabe 8.24. (4 Punkte)

Man finde alle drei komplexen Zahlen z, die die Bedingung

$$z^3 = 1$$

erfüllen.

Aufgabe 8.25. (5 Punkte)

Es seien n komplexe Zahlen $z_1, z_2, \ldots, z_n$ in der Kreisscheibe B mit Mittelpunkt $(0,0)$ und Radius 1, also in $B = \{z \in \mathbb{C} | \, |z| \leq 1\}$, gegeben. Zeige, dass es einen Punkt $w \in B$ mit der Eigenschaft

$$\sum_{i=1}^{n} |z_i - w| \geq n$$

gibt.

Kollektivaufgabe

Aufgabe 8.26. (4 Punkte)

Korrigiere den Wikipediaartikel „Dedekindscher Schnitt“, so dass die beiden Definitionen äquivalent werden.

(Die Bearbeitung muss dauerhaft akzeptiert werden.)