Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2011/2012**

Mathematik für Anwender I

Arbeitsblatt 9

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 9.1. Es sei K ein Körper und es seien V und W zwei K-Vektorräume. Es sei

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

eine K-lineare Abbildung. Zeige, dass für beliebige Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in V$ und Koeffizienten $s_1, \ldots, s_n \in K$ die Beziehung

$$\varphi(\sum_{i=1}^{n} s_i v_i) = \sum_{i=1}^{n} s_i \varphi(v_i)$$

gilt.

Aufgabe 9.2. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Zeige, dass zu $a \in K$ die Abbildung

$$V \longrightarrow V,\, v \longmapsto av,$$

linear ist.[1]

Aufgabe 9.3. Interpretiere die folgenden physikalischen Gesetze als lineare Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Was sind die messbaren Größen, was ist der Proportionalitätsfaktor und wodurch ist dieser festgelegt?

(1) Masse ist Volumen mal Dichte.
(2) Energie ist Masse mal Brennwert.
(3) Die zurückgelegte Strecke ist Geschwindigkeit mal Zeit.
(4) Kraft ist Masse mal Beschleunigung.
(5) Energie ist Kraft mal Weg.
(6) Energie ist Leistung mal Zeit.
(7) Spannung ist Widerstand mal Stromstärke.
(8) Ladung ist Stromstärke mal Zeit.

Aufgabe 9.4. Um die Erde wird entlang des Äquators ein Band gelegt. Das Band ist jedoch einen Meter zu lang, so dass es ringsherum gleichmäßig angehoben wird, um straff zu werden. Welche der folgenden Lebewesen können drunter durch laufen/schwimmen/fliegen/tanzen?

(1) Eine Amöbe.
(2) Eine Ameise.
(3) Eine Meise.

[1] Eine solche Abbildung heißt *Homothetie* oder *Streckung* mit dem Streckungsfaktor a.

(4) Eine Flunder.
(5) Eine Boa constrictor.
(6) Ein Meerschweinchen.
(7) Eine Boa constrictor, die ein Meerschweinchen verschluckt hat.
(8) Ein sehr guter Limbotänzer.

Aufgabe 9.5. Es sei eine lineare Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit

$$\varphi \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 5 \text{ und } \varphi \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = 4$$

gegeben. Berechne

$$\varphi \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 9.6. Ergänze den Beweis zu Satz 9.5 um die Verträglichkeit mit der skalaren Multiplikation.

Aufgabe 9.7. Es sei K ein Körper und seien U, V, W Vektorräume über K. Es seien

$$\varphi : U \to V \text{ und } \psi : V \to W$$

lineare Abbildungen. Zeige, dass dann auch die Verknüpfung

$$\psi \circ \varphi : U \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung ist.

Aufgabe 9.8. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Es sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Familie von Vektoren in V. Zeige, dass für die Abbildung

$$\varphi : K^n \longrightarrow V,\ (s_1, \ldots, s_n) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} s_i v_i,$$

die folgenden Beziehungen gelten.

(1) φ ist injektiv genau dann, wenn $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig sind.
(2) φ ist surjektiv genau dann, wenn $v_1, \ldots, v_n$ ein Erzeugendensystem von V ist.
(3) φ ist bijektiv genau dann, wenn $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis ist.

Aufgabe 9.9. Zeige, dass die Abbildungen

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R},\ z \longmapsto \operatorname{Re}(z),$$

und

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R},\ z \longmapsto \operatorname{Im}(z),$$

$\mathbb{R}$-lineare Abbildungen sind. Zeige ferner, dass die komplexe Konjugation $\mathbb{R}$-linear, aber nicht $\mathbb{C}$-linear ist. Ist der Betrag

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R},\ z \longmapsto |z|,$$

$\mathbb{R}$-linear?

Aufgabe 9.10. Es sei K ein Körper und es seien V und W zwei K-Vektorräume. Es sei

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

eine K-lineare Abbildung. Zeige, dass die folgenden Aussagen gelten.

(1) Für einen Untervektorraum $S \subseteq V$ ist auch das Bild $\varphi(S)$ ein Unterraum von W.
(2) Insbesondere ist das Bild $\operatorname{bild} \varphi = \varphi(V)$ der Abbildung ein Unterraum von W.
(3) Für einen Unterraum $T \subseteq W$ ist das Urbild $\varphi^{-1}(T)$ ein Unterraum von V.
(4) Insbesondere ist $\varphi^{-1}(0)$ ein Unterraum von V.

Aufgabe 9.11.*

Bestimme den Kern der linearen Abbildung

$$\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 2 \\ 3 & -2 & 7 & -1 \\ 2 & -1 & -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 9.12.*

Bestimme den Kern der durch die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

gegebenen linearen Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2.$$

Aufgabe 9.13. Finde mittels elementar-geometrischer Überlegungen eine Matrix, die eine Drehung um 45 Grad gegen den Uhrzeigersinn in der Ebene beschreibt.

Aufgabe 9.14. Betrachte die Abbildung

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

die eine rationale Zahl $q \in \mathbb{Q}$ auf q schickt und die alle irrationalen Zahlen auf 0 schickt. Ist dies eine $\mathbb{Q}$-lineare Abbildung? Ist sie mit Skalierung verträglich?

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 9.15. (3 Punkte)

Es sei eine lineare Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

mit

$$\varphi\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\7\end{pmatrix},\ \varphi\begin{pmatrix}0\\4\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\text{ und }\varphi\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}$$

gegeben. Berechne

$$\varphi\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}.$$

Aufgabe 9.16. (3 Punkte)

Finde mittels elementar-geometrischer Überlegungen eine Matrix, die eine Drehung um 30 Grad gegen den Uhrzeigersinn in der Ebene beschreibt.

Aufgabe 9.17. (3 Punkte)

Bestimme das Bild und den Kern der linearen Abbildung

$$f:\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4,\ \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\longmapsto\begin{pmatrix}1&3&4&-1\\2&5&7&-1\\-1&2&3&-2\\-2&0&0&-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}.$$

Aufgabe 9.18. (3 Punkte)

Es sei $E \subset \mathbb{R}^3$ die durch die lineare Gleichung $5x+7y-4z=0$ gegebene Ebene. Bestimme eine lineare Abbildung

$$\varphi:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^3$$

derart, dass das Bild von φ gleich E ist.

Aufgabe 9.19. (3 Punkte)

Auf dem reellen Vektorraum $G=\mathbb{R}^4$ der Glühweine betrachten wir die beiden linearen Abbildungen

$$\pi:G\longrightarrow\mathbb{R},\ \begin{pmatrix}z\\n\\r\\s\end{pmatrix}\longmapsto 8z+9n+5r+s,$$

und

$$\kappa:G\longrightarrow\mathbb{R},\ \begin{pmatrix}z\\n\\r\\s\end{pmatrix}\longmapsto 2z+n+4r+8s.$$

Wir stellen uns π als Preisfunktion und κ als Kalorienfunktion vor. Man bestimme Basen für $\operatorname{kern}\pi$, für $\operatorname{kern}\kappa$ und für $\operatorname{kern}(\pi\times\kappa)$.[2]

[2]Man störe sich nicht daran, dass hier negative Zahlen vorkommen können. In einem trinkbaren Glühwein kommen natürlich die Zutaten nicht mit einem negativen Koeffizienten vor. Wenn man sich aber beispielsweise überlegen möchte, auf wie viele Arten man eine bestimmte Rezeptur ändern kann, ohne dass sich der Gesamtpreis oder die Energiemenge ändert, so ergeben auch negative Einträge einen Sinn.