Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2012/2013**

Invariantentheorie

Arbeitsblatt 15

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 15.1. Es sei G eine Gruppe, die auf einem Integritätsbereich R als Gruppe von Ringautomorphismen operiere. Zeige, dass das Nullideal $(0) \in \operatorname{Spek}(R)$ ein Fixpunkt der Operation von G auf dem Spektrum ist.

Aufgabe 15.2. Es sei K ein Körper der Charakteristik $\neq 2$. Wir betrachten die Operation von $\mathbb{Z}/(2)$ auf $\operatorname{Spek}(K[T])$, wobei das nichttriviale Element durch $T \mapsto -T$ operieren möge. Bestimme die Fixpunkte dieser Operation.

Aufgabe 15.3. Bestimme die Fixpunkte der Operationen auf $\operatorname{Spek}(\mathbb{C}[X, Y])$, die durch folgende Untergruppen G der $\operatorname{GL}_2(\mathbb{C})$ gegeben sind.

(1) $G = \operatorname{GL}_2(\mathbb{C})$,
(2) $G = \operatorname{SL}_2(\mathbb{C})$,
(3) $G = \mathbb{C}^\times = \mathbb{C}^\times \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
(4) G die Gruppe der invertierbaren Diagonalmatrizen.
(5) G die Gruppe der reellen Drehmatrizen.

Aufgabe 15.4. Es sei G eine Gruppe, die auf einem kommutativen Ring R als Gruppe von Ringautomorphismen und damit auf $\operatorname{Spek}(R)$ operiere. Es sei $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spek}(R)$. Zeige, dass der Stabilisator $G_\mathfrak{p}$ auf dem lokalen Ring $R_\mathfrak{p}$ und auf dem Restekörper $\kappa(\mathfrak{p})$ in natürlicher Weise operiert.

Aufgabe 15.5. Es sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und R eine endlich erzeugte kommutative K-Algebra. Es sei G eine Gruppe, die auf R als Gruppe von K-Algebraautomorphismen operiere. Es sei $\mathfrak{m} \in \operatorname{Spek}(R)$ ein maximales Ideal, das unter der zugehörigen Gruppenoperation auf $\operatorname{Spek}(R)$ ein Fixpunkt sei. Zeige, dass die nach Aufgabe 15.1 zugehörige Operation von G auf dem Restekörper $\kappa(\mathfrak{m})$ trivial ist.

Eine Operation einer Gruppe G auf einer Menge M heißt *fixpunktfrei*, wenn für jedes $g \in G$, $g \neq e$, die Abbildung

$$M \longrightarrow M,\ x \longmapsto gx,$$

fixpunktfrei ist.

Aufgabe 15.6. Zeige, dass eine Operation einer Gruppe G auf einer Menge M genau dann fixpunktfrei ist, wenn für jeden Punkt $x \in M$ der Stabilisator G_x trivial ist.

Eine Gruppenoperation auf einem Spektrum ist in den seltensten Fällen fixpunktfrei im strengen Sinne der obigen Definition. Häufig kann man aber die Operation auf eine offene Teilmenge derart einschränken, dass sie auf den maximalen Idealen dieser offenen Menge fixpunktfrei ist.

Aufgabe 15.7. Wir betrachten die natürliche Operation der symmetrischen Gruppe S_n auf dem K^n, wobei K einen Körper der Charakteristik $\neq 2$ bezeichne. Bestimme die größte Teilmenge $U \subseteq K^n$ derart, dass S_n auf U fixpunktfrei operiert.

Aufgabe 15.8. Es sei K ein Körper der Charakteristik $\neq 2$. Wir betrachten die natürliche Operation der symmetrischen Gruppe S_n auf $\operatorname{Spek}(K[T_1, \ldots, T_n])$. Bestimme die größte offene Teilmenge $U \subseteq \operatorname{Spek}(K[T_1, \ldots, T_n])$ derart, dass S_n auf der Menge der abgeschlossenen Punkte aus U fixpunktfrei operiert.

Aufgabe 15.9. Es sei

$$\sigma\colon R \longrightarrow R$$

ein Ringautomorphismus auf einem kommutativen Ring R. Wir betrachten die Menge

$$M = \{f - f\sigma |\, f \in R\}.$$

Zeige, dass M eine Untergruppe von $(R, +)$ ist, aber im Allgemeinen kein Ideal.

Aufgabe 15.10. Es sei

$$\sigma\colon R \longrightarrow R$$

ein Ringautomorphismus auf einem kommutativen Ring R. Wir setzen

$$M = \{f - f\sigma |\, f \in R\}$$

und betrachten ein Primideal $\mathfrak{p}$. Zeige, dass aus $M \subseteq \mathfrak{p}$ folgt, dass $\mathfrak{p}$ ein Fixpunkt unter der Spektrumsabbildung zu σ ist, und dass davon nicht die Umkehrung gelten muss.

Für die folgende Aufgabe ist Aufgabe 14.13 hilfreich.

Aufgabe 15.11. Es sei G eine endliche Gruppe, die auf dem $\mathbb{C}^n$ linear operiere. Es sei $S = \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]^G$ der zugehörige Invariantenring. Zeige, dass der Bahnenraum $\mathbb{C}^n \backslash G$, versehen mit der Bildtopologie des (euklidischen) $\mathbb{C}^n$, mit dem $\mathbb{C}$-Spektrum $\mathbb{C}-\operatorname{Spek}(S)$, versehen mit der natürlichen Topologie, übereinstimmt.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 15.12. (3 Punkte)

Es sei G eine Gruppe, die auf einem kommutativen Ring R als Gruppe von Ringautomorphismen operiere und es sei $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spek}(R)$ ein Primideal. Zeige, dass $\mathfrak{p}$ genau dann ein Fixpunkt der zugehörigen Operation auf $\operatorname{Spek}(R)$ ist, wenn die abgeschlossene Teilmenge $V(\mathfrak{p})$ G-invariant ist.

Aufgabe 15.13. (4 Punkte)

Es sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und R eine endlich erzeugte kommutative K-Algebra. Es sei

$$\sigma\colon R \longrightarrow R$$

ein K-Algebraautomorphismus. Zeige, dass die Menge der abgeschlossenen Fixpunkte der Spektrumsabbildung

$$\sigma^*\colon \operatorname{Spek}(R) \longrightarrow \operatorname{Spek}(R)$$

gleich der Menge der abgeschlossenen Punkte in $V(M)$ mit $M = \{f - f\sigma | f \in R\}$ ist.

Aufgabe 15.14. (4 Punkte)

Es sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper. Wir betrachten die natürliche Operation der symmetrischen Gruppe S_3 auf $\operatorname{Spek}(K[X,Y,Z])$ zusammen mit der Quotientenabbildung

$$\operatorname{Spek}(K[X,Y,Z]) \longrightarrow \operatorname{Spek}(K[E_1,E_2,E_3]).$$

Man gebe für jede mögliche Anzahl $n \in \{1, \ldots, 6\}$ einen abgeschlossenen Punkt $P \in \operatorname{Spek}(K[E_1,E_2,E_3])$ an, derart, dass die Faser über P aus genau n Punkten besteht.