Fachbereich Mathematik/Informatik **13. Februar 2010**
Prof. Dr. H. Brenner

Mathematik I

Zweite Testklausur

Dauer: Zwei volle Stunden + 10 Minuten Orientierung, in denen noch nicht geschrieben werden darf.

Es sind keine Hilfsmittel erlaubt.

Alle Antworten sind zu begründen.

Es gibt insgesamt 64 Punkte. Es gilt die Sockelregelung, d.h. die Bewertung pro Aufgabe(nteil) beginnt bei der halben Punktzahl. Die erreichte Punktzahl geht zweifach in Ihre Übungspunktzahl ein.

Tragen Sie auf dem Deckblatt und auf jedem weiteren Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer leserlich ein.

Die Rückgabe erfolgt am Montag, den 15. Februar 2010 um 14 Uhr in 69/E23.

Viel Erfolg!

Name, Vorname: ....

Matrikelnummer: ....

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	$\sum$
mögl. Pkt.:	4	4	5	2	6	5	5	5	4	1	5	5	5	5	3	64
erhalt. Pkt.:																

Note:

Aufgabe 1. (4 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

(1) Ein *metrischer Raum*.
(2) Ein *zusammenhängender* metrischer Raum X.
(3) Ein *lokales Minimum* einer Funktion
$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}.$$
(4) Die *Stetigkeit* einer Abbildung
$$\varphi : X \longrightarrow Y$$
zwischen zwei metrischen Räumen X und Y in einem Punkt $x \in X$.
(5) Die *gleichmäßige Konvergenz* einer Funktionenfolge
$$f_n : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$$
($n \in \mathbb{N}$) gegen eine Funktion $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$.
(6) Die *Exponentialreihe*.
(7) Die *Differenzierbarkeit* einer Abbildung
$$f : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$$
in einem Punkt $a \in \mathbb{K}$.
(8) Das *Taylor-Polynom* vom Grad n zu einer n-mal differenzierbaren Funktion
$$f : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$$
in einem Punkt $a \in K$.

Lösung

(1) Ein *metrischer Raum* ist eine Menge X zusammen mit einer Abbildung
$$d \colon X \times X \to \mathbb{R}\,,$$
die die folgenden Bedingungen erfüllt.
   (a) $d\,(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$,
   (b) $d\,(x, y) = d(y, x)$,
   (c) $d\,(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.
(2) Ein metrischer Raum heißt *zusammenhängend*, wenn es genau zwei Teilmengen von X gibt, die sowohl offen als auch abgeschlossen sind.
(3) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ besitzt ein lokales Minimum in $x \in \mathbb{R}$, wenn es ein $\epsilon > 0$ gibt derart, dass für alle $x' \in U(x, \epsilon)$ gilt $f(x') \geq f(x)$.

(4) Die Abbildung

$$\varphi : X \longrightarrow Y$$

heißt stetig in $x \in X$, wenn für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass

$$\varphi\big(U(x, \delta)\big) \subseteq U\big(\varphi(x), \epsilon\big)$$

gilt.

(5) Man sagt, dass die Funktionenfolge gleichmäßig gegen f konvergiert, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein n_0 gibt mit

$$\mid f_n(x) - f(x) \mid \leq \epsilon \text{ für alle } n \geq n_0 \text{ und alle } x \in \mathbb{K}\,.$$

(6) Die Exponentialreihe ist $\exp z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$.

(7) Man sagt, dass

$$f : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$$

in a differenzierbar ist, wenn der Limes

$$\lim_{x \in \mathbb{K} \setminus \{a\},\, x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existiert.

(8) Das Taylor-Polynom von f in a vom Grad n ist

$$T_{a,n}(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\,.$$

AUFGABE 2. (4 Punkte)

Es seien $P = (\frac{3}{4}, -1)$ und $Q = (2, \frac{1}{5})$ zwei Punkte im $\mathbb{R}^2$. Bestimme den Abstand zwischen diesen beiden Punkten in der

a) euklidischen Metrik,

b) der Summenmetrik,

c) und der Maximumsmetrik.

Vergleiche diese verschiedenen Abstände der Größe nach.

Lösung

Die Abstände der einzelnen Koordinanten sind

$$2 - \frac{3}{4} = \frac{8-3}{4} = \frac{5}{4}$$

und

$$\frac{1}{5} - (-1) = \frac{1+5}{5} = \frac{6}{5}\,.$$

a) Der euklidische Abstand ist somit

$$\sqrt{(\frac{5}{4})^2 + (\frac{6}{5})^2} = \sqrt{\frac{25}{16} + \frac{36}{25}} = \sqrt{\frac{625+576}{400}} = \sqrt{\frac{1201}{400}} = \frac{\sqrt{1201}}{20}.$$

b) In der Summenmetrik ist der Abstand

$$\frac{5}{4} + \frac{6}{5} = \frac{25+24}{20} = \frac{49}{20}.$$

c) Es ist

$$\frac{5}{4} = \frac{25}{20} > \frac{24}{20} = \frac{6}{5},$$

daher ist der Abstand in der Maximumsmetrik gleich $\frac{5}{4}$.

Wir behaupten, dass der Maximumsabstand kleiner dem euklidischen Abstand und dass dieser kleiner dem Summenabstand ist. Um dies zu sehen bringt man die drei Zahlen auf den Hauptnenner 20 und muss dann für die Zähler

$$25 < \sqrt{1201} < 49$$

zeigen. Wegen $25^2 = 625 < 1201$ und $49^2 > 40^2 = 1600 > 1201$ ist das klar.

Aufgabe 3. (5 Punkte)

Zeige, dass die Funktion
$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
mit
$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{falls } x \in \mathbb{Q}\,, \\ 0, & \text{sonst}\,, \end{cases}$$
nur im Nullpunkt 0 stetig ist.

Lösung

Sei zunächst $x = 0$ und $\epsilon > 0$ vorgegeben. Dann kann man $\delta = \epsilon$ setzen, denn aus $| u | \leq \epsilon$ folgt auch $| f(u) | \leq \epsilon$. Sei nun $x \neq 0$. Wir zeigen, dass man für $\epsilon = | \frac{x}{2} | > 0$ kein $\delta > 0$ mit der Abschätzungseigenschaft für die Stetigkeit finden kann. Sei hierzu $\delta > 0$ vorgegeben und sei $c = \min(\delta, \epsilon)$. Wenn x rational ist, so wählen wir eine irrationale Zahl $u \in]x - c, x + c[$, wenn x irrational ist, so wählen wir eine rationale Zahl $q \in]x - c, x + c[$. Im ersten Fall gilt
$$| f(x) - f(u) | = | x | > \epsilon,$$
im zweiten Fall gilt
$$| f(x) - f(q) | = | q | > \epsilon,$$
so dass in beiden Fällen die δ-Umgebung von x nicht in die ϵ-Umgebung von $f(x)$ abgebildet wird.

Aufgabe 4. (2 Punkte)

Zeige, dass der Zwischenwertsatz nicht für stetige Funktionen von $\mathbb{Q}$ nach $\mathbb{Q}$ gelten muss.

Lösung

Die Funktion
$$f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q},\ x \longmapsto x^2 - 2,$$
ist stetig und es ist $f(0) = -2 < 0$ und $f(2) = 2 > 0$. Wenn der Zwischenwertsatz auch rational gelten würde, müsste es im rationalen Intervall $[0, 2]$ eine Nullstelle geben, also ein $q \in \mathbb{Q}$ mit $q^2 = 2$. Dies kann es aber nicht geben, da die Quadratwurzel aus 2 irrational ist.

AUFGABE 5. (6 Punkte)

Beweise die folgende Aussage: Jede beschränkte Folge von reellen Zahlen besitzt eine konvergente Teilfolge (Satz von Bolzano-Weierstraß).

Lösung

Die Folge x_n, $n \in \mathbb{N}$, sei durch

$$a_0 \leq x_n \leq b_0$$

beschränkt. Wir definieren zuerst induktiv eine Intervallhalbierung derart, dass in den Intervallen unendlich viele Folgenglieder liegen. Das Startintervall ist $I_0 = [a_0, b_0]$. Sei das k-te Intervall I_k bereits konstruiert. Wir betrachten die beiden Hälften

$$[a_k, \frac{a_k + b_k}{2}] \text{ und } [\frac{a_k + b_k}{2}, b_k] \, .$$

In mindestens einer der Hälften liegen unendlich viele Folgenglieder, und wir wählen als Intervall I_{k+1} eine Hälfte mit unendlich vielen Gliedern. Da sich bei diesem Verfahren die Intervalllängen mit jedem Schritt halbieren, liegt eine Intervallschachtelung vor. Als Teilfolge wählen wir nun ein beliebiges Element

$$x_{n_k} \in I_k$$

mit $n_{k+1} > n_k$. Dies ist möglich, da es in diesen Intervallen unendlich viele Folgenglieder gibt. Diese Teilfolge konvergiert gegen die durch die Intervallschachtelung bestimmte Zahl x.

Aufgabe 6. (5 Punkte)

Betrachte die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x) = (2x+3)e^{-x^2}.$$

Bestimme die Nullstellen und die lokalen (globalen) Extrema von f. Fertige eine grobe Skizze für den Funktionsverlauf an.

Lösung

Da die Exponentialfunktion keine Nullstelle besitzt, liegt nur bei $2x+3=0$, also bei $x_0 = -\frac{3}{2}$ eine Nullstelle vor. Unterhalb davon ist die Funktion negativ, oberhalb davon positiv. Zur Bestimmung der lokalen Extrema leiten wir ab, was zu

$$f'(x) = 2e^{-x^2} + (2x+3)(-2x)e^{-x^2} = e^{-x^2}(-4x^2 - 6x + 2)$$

führt. Die Nullstellenbestimmung der Ableitung führt auf

$$x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} = 0\,.$$

Quadratisches Ergänzen führt zu

$$(x + \frac{3}{4})^2 - \frac{9}{16} - \frac{1}{2} = 0$$

bzw.

$$(x + \frac{3}{4})^2 = \frac{17}{16}\,.$$

Also ist

$$x + \frac{3}{4} = \pm\frac{\sqrt{17}}{4}$$

und somit

$$x_1 = -\frac{\sqrt{17}}{4} - \frac{3}{4} \text{ und } x_2 = +\frac{\sqrt{17}}{4} - \frac{3}{4}\,.$$

Für $x < x_1$ ist die Ableitung negativ, für x mit $x_1 < x < x_2$ ist sie positiv und für $x > x_2$ wieder negativ. Daher ist die Funktion f unterhalb von x_1 streng fallend, zwischen x_1 und x_2 streng wachsend und oberhalb von x_2 wieder streng fallend. Daher liegt in x_1 ein isoliertes lokales Minimum und in x_2 ein isoliertes lokales Maximum vor. Da es sonst keine lokalen Extrema gibt, und die Funktion für $x \to -\infty$ wächst, aber negativ bleibt, und für $x \to +\infty$ fällt, aber positive bleibt, sind dies auch globale Extrema.

Aufgabe 7. (5 (1+4) Punkte)
Es seien
$$f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
zwei differenzierbare Funktionen und sei
$$h(x) = (g(f(x)))^2 f(g(x))\,.$$

a) Drücke die Ableitung h' mit den Ableitungen von f und g aus.

b) Sei nun
$$f(x) = x^2 - 1 \text{ und } g(x) = x + 2\,.$$
Berechne $h'(x)$ auf zwei verschiedene Arten, einerseits über $h(x)$ und andererseits über die Formel aus Teil a).

Lösung

a) Nach der Produkt- und Kettenregel ist
$$h'(x) = (g(f(x)))^2 \cdot f'(g(x)) \cdot g'(x) + 2g(f(x)) \cdot g'(f(x)) \cdot f'(x) \cdot f(g(x))\,.$$

b) Wir berechnen zuerst $h(x)$. Es ist
$$\begin{aligned} h(x) &= (x^2+1)^2 \cdot ((x+2)^2 - 1) \\ &= (x^4 + 2x^2 + 1)(x^2 + 4x + 3) \\ &= x^6 + 4x^5 + 5x^4 + 8x^3 + 7x^2 + 4x + 3. \end{aligned}$$
Die Ableitung ist daher
$$h'(x) = 6x^5 + 20x^4 + 20x^3 + 24x^2 + 14x + 4\,.$$
Andererseits ist
$$f'(x) = 2x \text{ und } g'(x) = 1$$
und daher nach Teil a)
$$\begin{aligned} h'(x) &= (g(f(x)))^2 \cdot f'(g(x)) \cdot g'(x) + 2g(f(x)) \cdot g'(f(x)) \cdot f'(x) \cdot f(g(x)) \\ &= (x^4 + 2x^2 + 1)2(x+2) + 2(x^2+1)(2x)(x^2 + 4x + 3) \\ &= 2(x^5 + 2x^3 + x + 2x^4 + 4x^2 + 2) + 4x(x^4 + 4x^3 + 3x^2 + x^2 + 4x + 3) \\ &= 2(x^5 + 2x^4 + 2x^3 + 4x^2 + x + 2) + 4x(x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 3) \\ &= 6x^5 + 20x^4 + 20x^3 + 24x^2 + 14x + 4. \end{aligned}$$

Aufgabe 8. (5 (2+2+1) Punkte)

Es sei

$$f(x) = x^3 + x - 1\,.$$

a) Zeige, dass die Funktion f im rellen Intervall $[0, 1]$ genau eine Nullstelle besitzt.

b) Berechne die erste Nachkommastelle im Zehnersystem dieser Nullstelle.

c) Man gebe eine rationale Zahl $q \in [0, 1]$ derart an, dass $|\, f(q)\,| \leq \frac{1}{10}$ ist.

Lösung

a) Es ist $f(0) = -1$ und $f(1) = 1$, daher besitzt die stetige Funktion aufgrund des Zwischenwertsatzes mindestens eine Nullstelle in $[0, 1]$. Die Ableitung ist $f'(x) = 3x^2 + 1$ und dies ist in diesem Intervall positiv, so dass die Funktion f dort streng wachsend ist. Also kann sie nicht mehr als eine Nullstelle besitzen.

b) Für $x = 1/2 = 0,5$ ist

$$f(1/2) = 1/8 + 1/2 - 1 < 0\,,$$

die Nullstelle muss also in der rechten Intervallhälfte liegen. Für $x = 0,8$ ergibt sich

$$f(0,8) = (0,8)^3 + 0,8 - 1 = 0,512 + 0,8 - 1 = 0,312 > 0\,,$$

so dass dieser Wert zu groß ist. Für $x = 0,7$ ergibt sich

$$f(0,7) = (0,7)^3 + 0,7 - 1 = 0,343 + 0,7 - 1 = 0,043 > 0\,,$$

was immer noch zu groß ist. Für $x = 0,6$ ergibt sich

$$f(0,6) = (0,6)^3 + 0,6 - 1 = 0,216 + 0,6 - 1 = -0,184 < 0\,.$$

Die Nullstelle liegt also im offenen Intervall zwischen $0,6$ und $0,7$ und die erste Nachkommastelle ist 6.

c) Wie unter b) berechnet ist $f(0,7) = 0,043 < 0,1$, so dass man $q = 0,7$ nehmen kann.

AUFGABE 9. (4 Punkte)
Bestimme direkt (ohne Verwendung von Ableitungsregeln) die Ableitung der Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x + 3,$$

in einem beliebigen Punkt $a \in \mathbb{R}$.

Lösung

Wir betrachten den Differenzenquotient $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(a+h)^3 + 2(a+h)^2 - 5(a+h) + 3 - (a^3 + 2a^2 - 5a + 3)}{h} \\
&= \frac{a^3 + 3a^2h + 3ah^2 + h^3 + 2a^2 + 4ah + 2h^2 - 5a - 5h + 3 - a^3 - 2a^2 + 5a - 3}{h} \\
&= \frac{3a^2h + 3ah^2 + h^3 + 4ah + 2h^2 - 5h}{h} \\
&= 3a^2 + 3ah + h^2 + 4a + 2h - 5 \\
&= 3a^2 + 4a - 5 + 3ah + h^2 + 2h.
\end{aligned}$$

Die Ableitung ist der Limes von diesem Ausdruck für h gegen 0, und dieser ist

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} (3a^2 + 4a - 5 + 3ah + h^2 + 2h) &= 3a^2 + 4a - 5 + \lim_{h \to 0} h(3a + h + 2) \\
&= 3a^2 + 4a - 5.
\end{aligned}$$

Die Ableitung ist also $3a^2 + 4a - 5$.

Aufgabe 10. (1 Punkt)

Besitzt die komplexe Exponentialfunktion

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\},\; z \longmapsto \exp z,$$

eine differenzierbare Umkehrfunktion?

Lösung

Die komplexe Exponentialfunktion ist wegen $\exp 2\pi n = 1$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ nicht injektiv, daher gibt es überhaupt keine Umkehrfunktion.

Aufgabe 11. (5 (3+2) Punkte)
Bestimme den Grenzwert von

$$\frac{x^2-3x+2}{x^3-2x+1}$$

im Punkt $x=1$, und zwar

a) mittels Polynomdivision,

b) mittels der Regel von l'Hospital.

Lösung

a) Durch Polynomdivision erhält man $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$ und $x^3-2x+1=(x-1)(x^2+x-1)$. Daher ist

$$\frac{x^2-3x+2}{x^3-2x+1}=\frac{x-2}{x^2+x-1}\,.$$

Daher ist

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x^3-2x+1}=\lim_{x\to 1}\frac{x-2}{x^2+x-1}=\frac{-1}{1}=-1.$$

b) Nach Teil a) ist die Regel von l'Hospital anwendbar. Die Ableitungen sind $(x^2-3x+2)'=2x-3$ und $(x^3-2x+1)'=3x^2-2$, die beide für $x=1$ keine Nullstelle besitzen. Nach der Regel von l'Hospital ist daher

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x^3-2x+1}=\lim_{x\to 1}\frac{2x-3}{3x^2-2}=\frac{-1}{1}=-1.$$

Aufgabe 12. (5 Punkte)
Bestimme, für welche komplexe Zahlen z die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^n z^n$$

konvergiert.

Lösung

Es handelt sich um eine Potenzreihe mit den Koeffizienten n^n. Sie konvergiert für $z = 0$, da dann nur ein Glied von null verschieden ist. Wir behaupten, dass die Reihe für keine weitere komplexe Zahl konvergiert. Da es sich um eine Potenzreihe handelt, genügt es, für jede reelle positive Zahl z nachzuweisen, dass die Reihe divergiert. Zu $z > 0$ gibt es ein $k \in \mathbb{N}_+$ mit $kz \geq 1$. Es gilt dann auch $nz \geq 1$ für alle $n \geq k$. Wegen

$$\sum_{n=k}^{\infty} n^n z^n \geq \sum_{n=k}^{\infty} 1$$

erfüllt die Reihe nicht das Cauchy-Kriterium und kann daher nicht konvergieren.

Aufgabe 13. (5 Punkte)
Bestimme, ob die Familie

$$\frac{1}{q^2},\ q \in \mathbb{Q} \cap [2,3]\,,$$

summierbar ist oder nicht.

Lösung

Wir zeigen, dass diese Familie nicht summierbar ist. Es genügt zu zeigen, dass die endlichen Teilsummen der Familie unbeschränkt sind. Sei dazu $b > 0$ gegeben. Aufgrund des Archimedesprinzips gibt es ein $n \in \mathbb{N}_+$ mit $n \cdot \frac{1}{9} \geq b$. Zwischen 2 und 3 gibt es unendlich viele rationale Zahlen, so dass wir n verschiedene rationale Zahlen $q_1, \ldots, q_n$ in diesem Intervall wählen können. Für die zugehörige endliche Teilsumme gilt dann

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{q_i^2} \ \geq\ n \cdot \frac{1}{9} \ \geq\ b,$$

so dass b überschritten wird.

Aufgabe 14. (5 Punkte)

Man gebe ein Beispiel einer Funktionenfolge

$$f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

derart, dass sämtliche f_n nicht stetig sind, die Funktionenfolge aber gleichmäßig gegen eine stetige Grenzfunktion konvergiert.

Lösung

Wir betrachten für $n \in \mathbb{N}_+$ die Funktionenfolge

$$f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

die durch

$$f_n(x) := \begin{cases} 0, & \text{falls } x \neq 0, \\ \frac{1}{n}, & \text{falls } x = 0, \end{cases}$$

gegeben ist. Diese Funktionen sind nicht stetig, da der Limes für x gegen 0 stets $0 \neq \frac{1}{n}$ ist. Wir behaupten, dass diese Folge gleichmäßig gegen die Nullfunktion konvergiert, die als konstante Funktion stetig ist. Dazu sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Es gibt dann ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $1/n_0 \leq \epsilon$. Für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle $n \geq n_0$ gilt dann

$$|\, f_n(x) - 0 \,| = |\, f_n(x) \,| \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} \leq \epsilon.$$

AUFGABE 15. (3 Punkte)

Bestimme die Taylor-Reihe der Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ im Punkt $a = 2$ bis zur Ordnung 4 (Man gebe also das Taylor-Polynom vom Grad 4 zum Entwicklungspunkt 2 an, wobei die Koeffizienten in einer möglichst einfachen Form angegeben werden sollen).

Lösung

Die erste Ableitung ist

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} = -x^{-2}, \text{ also } f'(2) = -\frac{1}{4}\,.$$

Die zweite Ableitung ist

$$f''(x) = 2x^{-3}, \text{ also } f''(2) = \frac{1}{4}\,.$$

Die dritte Ableitung ist

$$f'''(x) = -6x^{-4}, \text{ also } f'''(2) = -\frac{3}{8}\,.$$

Die vierte Ableitung ist

$$f''''(x) = 24x^{-5}, \text{ also } f''''(2) = \frac{24}{32} = \frac{3}{4}\,.$$

Das Taylor-Polynom vom Grad 4 ist demnach

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x-2) + \frac{1}{4\cdot 2}(x-2)^2 - \frac{3}{8\cdot 3!}(x-2)^3 + \frac{3}{4\cdot 4!}(x-2)^4$$

bzw.

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x-2) + \frac{1}{8}(x-2)^2 - \frac{1}{16}(x-2)^3 + \frac{1}{32}(x-2)^4\,.$$