

## Mathematik III

### Vorlesung 63

Wir beschäftigen uns weiter mit der Frage, welchen Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$  man ein sinnvolles Volumen zuordnen kann. Es wird sich herausstellen, dass diese „messbaren Mengen“ eine  $\sigma$ -Algebra bilden, nämlich die  $\sigma$ -Algebra der *Borel-Mengen*. Diese ist zwar sehr groß, und zwar gehören nahezu alle irgendwie „kohärent beschreibbaren“ Teilmengen dazu, aber eben doch nicht alle. Die Borel-Mengen explizit zu beschreiben, ist nicht möglich, stattdessen gibt man ein einfaches Erzeugendensystem für diese  $\sigma$ -Algebra an, nämlich die Menge aller offenen Teilmengen des euklidischen Raumes. Es empfiehlt sich, diese Konstruktion sofort für topologische Räume durchzuführen.

### Topologische Räume

Die Menge der offenen Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$ , oder allgemeiner eines metrischen Raumes, bilden ein Mengensystem, das eine Topologie im Sinne der folgenden Definition ist.

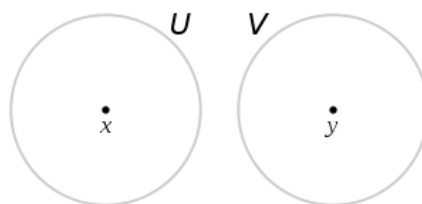
DEFINITION 63.1. Sei  $X$  eine Menge. Eine Familie  $\mathcal{T}$  von Teilmengen von  $X$  heißt *Topologie* auf  $X$ , wenn die folgenden Axiome erfüllt sind:

- (1) Es ist  $\emptyset \in \mathcal{T}$  und  $X \in \mathcal{T}$ .
- (2) Sind  $U \in \mathcal{T}$  und  $V \in \mathcal{T}$ , so ist auch  $U \cap V \in \mathcal{T}$ .
- (3) Ist  $I$  eine Indexmenge und  $U_i \in \mathcal{T}$  für alle  $i \in I$ , so ist auch  $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$ .

Ein *topologischer Raum* ist ein Paar  $(X, \mathcal{T})$ , wobei  $X$  eine Menge und  $\mathcal{T}$  eine Topologie auf  $X$  ist.

Die Teilmengen von  $X$ , die zu  $\mathcal{T}$  gehören, heißen *offene Mengen*. Eine Teilmenge  $A \subseteq X$  heißt *abgeschlossen*, wenn ihr Komplement offen ist, also zur Topologie gehört.

DEFINITION 63.2. Ein topologischer Raum  $X$  heißt *hausdorffsch*, wenn es zu je zwei verschiedenen Punkten  $x, y \in X$  zwei offene Mengen  $U$  und  $V$  gibt mit  $x \in U$ ,  $y \in V$  und  $U \cap V = \emptyset$ .



DEFINITION 63.3. Es sei  $(X, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum. Ein System  $\mathcal{C}$  von offenen Mengen in  $X$  heißt *Basis der Topologie*, wenn man jede offene Menge in  $\mathcal{T}$  als Vereinigung von offenen Mengen aus  $\mathcal{C}$  erhalten kann.

DEFINITION 63.4. Es sei  $(X, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum. Man sagt, dass  $X$  eine *abzählbare Basis* besitzt, wenn es eine Basis der Topologie gibt, die nur aus abzählbar vielen offenen Mengen besteht.

Im  $\mathbb{R}^n$  gibt es überabzählbar viele offene Mengen, es gibt aber eine abzählbare Basis, nämlich alle offenen Bälle  $U(P, r)$ , deren Mittelpunktskoordinaten und deren Radien rationale Zahlen sind.

DEFINITION 63.5. Eine Abbildung

$$\varphi : X \longrightarrow Y$$

zwischen topologischen Räumen  $X$  und  $Y$  heißt *stetig*, wenn Urbilder von offenen Mengen wieder offen sind.

Diese Definition stimmt wegen Satz 20.3 mit der Definition für metrische Räume überein.

DEFINITION 63.6. Zwei topologische Räume  $X$  und  $Y$  heißen *homöomorph*, wenn es eine bijektive stetige Abbildung

$$\varphi : X \longrightarrow Y$$

gibt, deren Umkehrabbildung  $\varphi^{-1}$  ebenfalls stetig ist.

DEFINITION 63.7. Sei  $(X, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum und  $Y \subseteq X$  eine Teilmenge. Folgende Vorschrift definiert eine Topologie  $\mathcal{T}_Y$  auf  $Y$ : Für eine Teilmenge  $U \subseteq Y$  gilt  $U \in \mathcal{T}_Y$  genau dann, wenn es eine in  $X$  offene Menge  $V \in \mathcal{T}$  gibt, so dass  $V \cap Y = U$  gilt. Es lässt sich leicht nachweisen, dass  $\mathcal{T}_Y$  eine Topologie ist. Sie heißt *Unterraumtopologie* (oder *induzierte Topologie*), und der topologische Raum  $(Y, \mathcal{T}_Y)$  heißt ein *Unterraum* von  $(X, \mathcal{T})$ .

## Borel-Mengen

DEFINITION 63.8. Sei  $(M, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum. Dann nennt man die von  $\mathcal{T}$  erzeugte  $\sigma$ -Algebra die *Menge der Borel-Mengen* von  $M$ .

Insbesondere nennt man im  $\mathbb{R}^n$  die durch die Topologie zur euklidischen Metrik definierte  $\sigma$ -Algebra die *Menge der Borel-Mengen*. Dies ist ein extrem reichhaltiger Begriff; es ist nämlich gar nicht einfach, eine Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  anzugeben, die keine Borel-Menge ist.

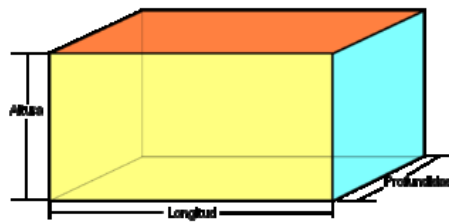
LEMMA 63.9. *Die folgenden Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$  sind Borel-Mengen.*

- (1) *Alle offenen Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$ .*
- (2) *Alle abgeschlossenen Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$ .*

- (3) Alle abzählbaren Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$ .
- (4) Alle abgeschlossenen Kugeln  $B(x, \epsilon)$  und alle offenen Kugeln  $U(x, \epsilon)$ .
- (5) Alle abgeschlossenen Quader  $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$  und alle offenen Quader  $]a_1, b_1[ \times \cdots \times ]a_n, b_n[$ .

*Beweis.* (1) folgt aus der Definition der Borel-Mengen. (2) folgt aus (1), da eine  $\sigma$ -Algebra mit einer Menge auch stets deren Komplement enthält, und die abgeschlossenen Mengen die Komplemente der offenen Mengen sind. (3). Einpunktige Mengen im  $\mathbb{R}^n$  sind abgeschlossen und daher Borel-Mengen. Damit ist auch jede abzählbare Punktmenge als eine abzählbare Vereinigung von einpunktigen Teilmengen eine Borel-Menge. (4) und (5) sind Spezialfälle von (1) und (2).  $\square$

Wie gesagt, Borel-Mengen sind ein recht umfassender Begriff. Andererseits wird die  $\sigma$ -Algebra der Borel-Mengen bereits durch die Menge aller Quader erzeugt, also durch diejenigen Teilmengen, für die unmittelbar ein sinnvoller Volumenbegriff existiert.



LEMMA 63.10. Die Menge der Borel-Mengen im  $\mathbb{R}^n$  stimmt mit der von der Menge aller offenen Quader erzeugten  $\sigma$ -Algebra überein. Dabei kann man sich sogar auf die Menge der offenen Quader mit rationalen Eckpunkten beschränken.

*Beweis.* Wir beweisen den Zusatz. Es genügt zu zeigen, dass jede offene Menge im  $\mathbb{R}^n$  sich als eine abzählbare Vereinigung von achsenparallelen offenen Quadern mit rationalen Eckpunkten schreiben lässt. Da die Menge der rationalen Zahlen abzählbar ist, ist auch die Menge aller Quader mit rationalen Ecken abzählbar. Wir müssen daher nur zeigen, dass jede offene Menge eine Vereinigung von offenen Quadern mit rationalen Ecken ist. Sei dazu  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und sei  $x \in U$  ein Punkt. Daher gibt es ein  $\epsilon > 0$ , das wir rational wählen können, mit

$$x = (x_1, \dots, x_n) \in U(x, \epsilon) \subseteq U.$$

Jede Koordinate  $x_i$  ist eine reelle Zahl, und damit der Limes einer Folge von rationalen Zahlen. Sei

$$y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{Q}^n$$

mit

$$d(x_i, y_i) < \frac{\epsilon}{3n}.$$

für alle  $i = 1, \dots, n$ . Damit ist einerseits

$$x \in Q = ]y_1 - \frac{\epsilon}{3n}, y_1 + \frac{\epsilon}{3n} [ \times \cdots \times ]y_n - \frac{\epsilon}{3n}, y_n + \frac{\epsilon}{3n} [$$

und andererseits gilt für  $z \in Q$  die Beziehung

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} < \epsilon,$$

also  $z \in U(x, \epsilon)$ . Damit ist  $x \in Q \subseteq U(x, \epsilon) \subseteq U$ . Die Vereinigung dieser so konstruierten Quader ist genau  $U$ .  $\square$

LEMMA 63.11. *Es seien  $X$  und  $Y$  topologische Räume, die wir als Messräume mit den zugehörigen  $\sigma$ -Algebren der Borelmengen auffassen. Dann ist jede stetige Abbildung*

$$\varphi : X \longrightarrow Y$$

*messbar.*

*Beweis.* Nach Definition bedeutet die Stetigkeit, dass das Urbild  $\varphi^{-1}(V)$  von jeder offenen Menge  $V \subseteq Y$  offen in  $X$  ist. Nach Definition ist das Mengensystem der offenen Mengen einer Topologie ein Erzeugendensystem für die  $\sigma$ -Algebra der Borelmengen. Nach Lemma 62.13 ist somit  $\varphi$  messbar.  $\square$

## Maße und Maßräume

In der Praxis gibt man einen Flächeninhalt in Quadratmeter  $m^2$  und ein Volumen in Kubikmeter  $m^3$  an. Diese Einheiten legen die Skala fest, auf der dann mit nichtnegativen reellen Zahlen gemessen wird. Als Wertemenge für ein Maß bieten sich demnach die nichtnegativen reellen Zahlen an. Besitzt der Gesamtraum  $\mathbb{R}^3$  ein Volumen? Sicherlich keines, das durch eine reelle Zahl ausgedrückt werden könnte. Daher erlaubt man bei einem Maß auch den Wert  $\infty$ , und setzt

$$\overline{\mathbb{R}}_{\geq} = \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\} \text{ und } \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}.$$

Das bedeutet nicht, dass wir die reellen Zahlen ändern, sondern dass wir im maßtheoretischen Kontext mit einer bestimmten Mengenerweiterung der reellen Zahlen arbeiten. Einen Teil der Rechenoperationen dehnen wir auf die zusätzlichen Symbole aus, aber nicht alles, wobei man sich von der maßtheoretischen Zweckmäßigkeit leiten lässt. Die Ordnungsrelation wird durch

$$-\infty < r < \infty$$

für jede reelle Zahl  $r$  ausgedehnt. Wir setzen

$$r + \infty = \infty \text{ und } r - \infty = -\infty$$

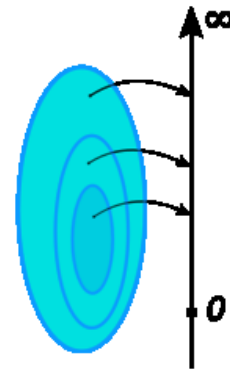
für  $r \in \mathbb{R}$ . Der Ausdruck  $\infty + (-\infty)$  ist nicht definiert. Für positive reelle Zahlen ist  $r \cdot \infty = \infty$ , und wir setzen  $0 \cdot \infty = 0$ .

DEFINITION 63.12. Es sei  $M$  eine Menge und  $\mathcal{P}$  ein Mengen-Präring auf  $M$ . Dann heißt eine Abbildung

$$\mu : \mathcal{P} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}, T \longmapsto \mu(T),$$

ein *Prämaß* auf  $M$ , wenn folgende Bedingung erfüllt ist. Für jede abzählbare Familie von paarweise disjunkten Teilmengen  $T_i, i \in I$ , aus  $\mathcal{P}$ , für die  $\bigcup_{i \in I} T_i$  ebenfalls zu  $\mathcal{P}$  gehört, gilt

$$\mu\left(\bigcup_{i \in I} T_i\right) = \sum_{i \in I} \mu(T_i).$$



DEFINITION 63.13. Es sei  $M$  eine Menge und  $\mathcal{A}$  eine  $\sigma$ -Algebra auf  $M$ . Ein Prämaß auf  $M$  nennt man ein *Maß*.

Ein Maß unterscheidet sich also von einem Prämaß nicht durch die strukturellen Eigenschaften, sondern lediglich durch Eigenschaften des Definitionsbereiches. Letztlich ist man an Maßen interessiert, doch Prämaße sind für deren Konstruktion wichtige Zwischenschritte.

DEFINITION 63.14. Eine Menge  $M$ , auf der eine  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{A}$  und ein Maß

$$\mu : \mathcal{A} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}, T \longmapsto \mu(T),$$

erklärt ist, heißt ein *Maßraum*. Man schreibt dafür kurz  $(M, \mathcal{A}, \mu)$ .

Mit der folgenden Definition ist die Wahrscheinlichkeitstheorie ein Spezialfall der Maßtheorie.

DEFINITION 63.15. Ein *Wahrscheinlichkeitsraum* ist ein Maßraum  $(M, \mathcal{A}, \mu)$  mit  $\mu(M) = 1$ .

### Beispiele für diskrete Maße

Wir besprechen kurz einige „diskrete Maße“. Das für uns wichtigste Maß, das *Borel-Lebesgue-Maß* auf dem  $\mathbb{R}^n$ , ist kein diskretes Maß, sondern ein „stetiges Maß“.

BEISPIEL 63.16. Es sei  $M$  eine Menge und es sei

$$b : M \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, x \longmapsto b_x,$$

eine Funktion, die wir *Belegungsfunktion* nennen. Dann wird für jede Teilmenge  $T \subseteq M$  durch die Zuordnung

$$\beta(T) := \sum_{x \in T} b_x$$

ein Maß auf  $(M, \mathfrak{P}(M))$  definiert. Dabei ist die Summe als der Grenzwert zu interpretieren, falls die Familie  $b_x, x \in T$ , summierbar ist, und andernfalls

als  $\infty$ . Dass es sich dabei um ein Maß handelt folgt aus dem großen Umordnungssatz, und zwar gilt die Summationseigenschaft sogar für beliebige disjunkte Vereinigungen, nicht nur für abzählbare. Wenn die Belegungsfunktion für jedes  $x$  einen positiven Wert annimmt, so folgt aus Aufgabe 61.11, dass das Maß jeder überabzählbaren Menge den Wert  $\infty$  zuweist. Wenn andererseits die Belegungsfunktion für jedes  $x$  den Wert 0 annimmt, so liegt das *Nullmaß* vor, d.h. jede Menge hat das Maß 0. Insbesondere kann man über diesen Weg kein Maß auf  $\mathbb{R}$  gewinnen, das zugleich dem Einheitsintervall den Wert 1 und jedem einzelnen Punkt das gleiche Maß zuweist.

Von diesen *Summationsmaßen* bekommen wiederum einige einen eigenen Namen.

DEFINITION 63.17. Auf einer Menge  $M$  nennt man das auf  $(M, \mathfrak{P}(M))$  durch

$$z(T) = \begin{cases} \#(T), & \text{falls } T \text{ endlich,} \\ \infty & \text{sonst,} \end{cases}$$

definierte Maß das *Zählmaß* auf  $M$ .

Das Zählmaß ist das Summationsmaß zur konstanten Belegungsfunktion  $b = 1$ . In den folgenden Beispielen besitzen nicht alle Punkte dasselbe Maß.

DEFINITION 63.18. Es sei  $M$  eine Menge und  $x \in M$  ein Punkt. Das auf  $(M, \mathfrak{P}(M))$  durch

$$\delta_x(T) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in T, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

definierte Maß heißt das im Punkt  $x$  konzentrierte *Dirac-Maß* auf  $M$ .

## Abbildungsverzeichnis

Quelle = Hausdorff space.svg, Autor = Toby Bartels (= Benutzer Fibonacci auf Commons), Lizenz = copyleft	2
Quelle = Ortoedro.png, Autor = Benutzer Tomruen auf Commons, Lizenz = PD	3
Quelle = Measure illustration.png, Autor = Benutzer Oleg Alexandrov auf Commons, Lizenz = PD	5