

Mathematik für Anwender I

Klausur

Dauer: Zwei volle Stunden + 10 Minuten Orientierung, in denen noch nicht geschrieben werden darf.

Es sind keine Hilfsmittel erlaubt.

Alle Antworten sind zu begründen.

Es gibt insgesamt 64 Punkte. Es gilt die Sockelregelung, d.h. die Bewertung pro Aufgabe(nteil) beginnt bei der halben Punktzahl.

Zum Bestehen braucht man 16 Punkte, ab 32 Punkten gibt es eine Eins.

Tragen Sie auf dem Deckblatt und jedem weiteren Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer leserlich ein.

Viel Erfolg!

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Ich erkläre mich durch meine Unterschrift einverstanden, dass mein Klausurergebnis mit meiner Matrikelnummer im Internet bekanntgegeben wird.

Unterschrift:

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	Σ
mögliche Pkt.:	4	4	3	5	4	5	6	4	4	3	4	4	4	4	6	64
erhaltene Pkt.:																

Note:

AUFGABE 1. (4 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

- (1) Eine
- injektive*
- Abbildung

$$f : M \longrightarrow N.$$

- (2) Eine
- surjektive*
- Abbildung

$$f : M \longrightarrow N.$$

- (3) Die
- Dimension*
- eines
- K
- Vektorraums
- V
- (
- V
- besitze ein endliches Erzeugendensystem).

- (4) Der
- Kern*
- einer linearen Abbildung
- $\varphi : V \rightarrow W$
- zwischen zwei
- K
- Vektorräumen
- V
- und
- W
- .

- (5) Der
- Limes*
- (oder
- Grenzwert*
-) einer reellen Folge
- $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$
- .

- (6) Die
- Stetigkeit*
- einer Abbildung

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

in einem Punkt $a \in \mathbb{R}$.

- (7) Die
- eulersche Zahl*
- e
- .

- (8) Eine
- lineare inhomogene*
- gewöhnliche Differentialgleichung.

Lösung

- (1) Die Abbildung

$$f : M \longrightarrow N$$

ist injektiv, wenn für je zwei verschiedene Elemente $x, y \in M$ auch $f(x)$ und $f(y)$ verschieden sind.

- (2) Die Abbildung

$$f : M \longrightarrow N$$

ist surjektiv, wenn es für jedes Element $y \in N$ (mindestens) ein $x \in M$ gibt mit $f(x) = y$.

- (3) Unter der Dimension eines Vektorraums
- V
- versteht man die Anzahl der Elemente in einer Basis von
- V
- .

- (4) Man nennt

$$\text{kern } \varphi := \{v \in V \mid \varphi(v) = 0\}$$

den Kern von φ .

- (5) Man sagt, dass die Folge den Limes
- x
- besitzt, wenn folgende Eigenschaft erfüllt ist.

Zu jedem positiven $\epsilon > 0$, $\epsilon \in \mathbb{R}$, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $n \geq n_0$ die Abschätzung

$$|x_n - x| \leq \epsilon$$

gilt.

(6) Eine Abbildung

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

heißt stetig in a , wenn für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass

$$f (]x - \delta, x + \delta[) \subseteq]f(x) - \epsilon, f(x) + \epsilon[$$

gilt.

(7) Die eulersche Zahl ist durch

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

definiert.

(8) Eine Differentialgleichung der Form

$$y' = g(t)y + h(t)$$

mit zwei auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ definierten Funktionen $t \mapsto g(t)$ und $t \mapsto h(t)$ heißt inhomogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung.

AUFGABE 2. (4 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze.

- (1) Das *Injektivitätskriterium für lineare Abbildungen*.
- (2) Das *Leibnizkriterium für alternierende Reihen*.
- (3) Der *Mittelwertsatz der Differentialrechnung*.
- (4) Die *Stammfunktion der Umkehrfunktion*.

Lösung

- (1) Es sei K ein Körper und es seien V und W zwei K -Vektorräume.
Es sei

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

eine K -lineare Abbildung. Dann ist φ injektiv genau dann, wenn kern $\varphi = 0$ ist.

- (2) Sei $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine fallende Nullfolge von nichtnegativen reellen Zahlen.
Dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x_k$.

- (3) Sei $a < b$ und sei

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige, auf $]a, b[$ differenzierbare Funktion. Dann gibt es ein $c \in]a, b[$ mit

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

- (4) Es sei $f : [a, b] \rightarrow [c, d]$ eine bijektive differenzierbare Funktion und es sei F eine Stammfunktion von f . Dann ist

$$G(y) := yf^{-1}(y) - F(f^{-1}(y))$$

eine Stammfunktion der Umkehrfunktion f^{-1} .

AUFGABE 3. (3 Punkte)

Zwei Personen, A und B , liegen unter einer Palme, A besitzt 2 Fladenbrote und B besitzt 3 Fladenbrote. Eine dritte Person C kommt hinzu, die kein Fladenbrot besitzt, aber 5 Taler. Die drei Personen werden sich einig, für die 5 Taler die Fladenbrote untereinander gleichmäßig aufzuteilen. Wie viele Taler gibt C an A und an B ?

Lösung

Es gibt insgesamt 5 Fladenbrote, so dass also jede Person $\frac{5}{3}$ Brote isst. Somit gibt A genau $\frac{1}{3}$ Brot an C ab und B gibt $\frac{4}{3}$ Brote an C ab. B gibt also 4-mal soviel ab wie A und bekommt daher 4 Taler, und A bekommt einen Taler von C .

AUFGABE 4. (5 Punkte)

Zeige durch Induktion über n , dass es zu natürlichen Zahlen a, n mit $a > 0$ natürliche Zahlen q, r mit $r < a$ und mit

$$n = aq + r$$

gibt.

Lösung

Es sei $a > 0$ fixiert. Der Induktionsanfang ergibt sich direkt mit $q = 0$ und $r = n = 0$. Für den Induktionsschluss sei die Aussage für n bewiesen, d.h. wir haben eine Darstellung $n = aq + r$ mit $r < a$ und müssen eine ebensolche Darstellung für $n + 1$ finden. Wenn $r < a - 1$ ist, so ist

$$n + 1 = aq + r + 1$$

und wegen $r + 1 < a$ ist dies eine gesuchte Darstellung. Ist hingegen $r = a - 1$, so ist

$$n + 1 = aq + r + 1 = aq + a = a(q + 1) + 0,$$

und dies ist eine gesuchte Darstellung.

AUFGABE 5. (4 Punkte)

Es seien die beiden komplexen Polynome

$$P = X^3 - 2iX^2 + 4X - 1 \text{ und } Q = iX - 3 + 2i$$

gegeben. Berechne $P(Q)$ (es soll also Q in P eingesetzt werden).

Lösung

$$\begin{aligned} P(Q) &= Q^3 - 2iQ^2 + 4Q - 1 \\ &= (iX - 3 + 2i)^3 - 2i(iX - 3 + 2i)^2 + 4(iX - 3 + 2i) - 1 \\ &= -iX^3 + 3i^2(-3 + 2i)X^2 + 3i(-3 + 2i)^2X + (-3 + 2i)^3 \\ &\quad - 2i(i^2X^2 + 2(-3 + 2i)iX + (-3 + 2i)^2) + 4iX - 12 + 8i - 1 \\ &= -iX^3 + 9X^2 - 6iX^2 + 3i(9 - 4 - 12i)X - 27 + 54i + 36 - 8i \\ &\quad + 2iX^2 - 12X + 8iX - 18i - 24 + 8i + 4iX - 13 + 8i \\ &= -iX^3 + (9 - 4i)X^2 + (24 + 27i)X - 28 + 44i. \end{aligned}$$

AUFGABE 6. (5 Punkte)

Es sei

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

die durch die Matrix $M = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ (bezüglich der Standardbasis) festgelegte lineare Abbildung. Bestimme die beschreibende Matrix zu φ bezüglich der Basis $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Lösung

Es ist

$$\varphi \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 14 \end{pmatrix}$$

und

$$\varphi \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

Diese Bildvektoren müssen wir bezüglich der Basis ausdrücken. Der Ansatz

$$\begin{pmatrix} 9 \\ 14 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

bzw.

$$9 = a + 4b \text{ und } 14 = 4a + 2b$$

führt auf

$$-19 = -7a$$

und damit auf $a = \frac{19}{7}$ und $b = \frac{11}{7}$. Der Ansatz

$$\begin{pmatrix} 22 \\ 14 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

bzw.

$$22 = c + 4d \text{ und } 14 = 4c + 2d$$

führt auf

$$-6 = -7c$$

und damit auf $c = \frac{6}{7}$ und $d = \frac{37}{7}$. Daher ist die beschreibende Matrix von φ bezüglich der Basis $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ gleich

$$\begin{pmatrix} \frac{19}{7} & \frac{6}{7} \\ \frac{11}{7} & \frac{37}{7} \end{pmatrix}.$$

AUFGABE 7. (6 (2+4) Punkte)

Es sei K ein Körper, V und W seien K -Vektorräume und

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

sei eine K -lineare Abbildung.

- a) Zeige, dass der Kern von φ ein Untervektorraum von V ist.
- b) Beweise das Injektivitätskriterium für eine lineare Abbildung.

Lösung

a) Bei einer linearen Abbildung ist $\varphi(0) = 0$, also ist $0 \in \text{kern } \varphi$. Seien $u, v \in \text{kern } \varphi$. Dann ist $\varphi(u+v) = \varphi(u) + \varphi(v) = 0 + 0 = 0$, also $u+v \in \text{kern } \varphi$. Für $v \in \text{kern } \varphi$ und $a \in K$ ist schließlich

$$\varphi(av) = a\varphi(v) = a0 = 0,$$

also $av \in \text{kern } \varphi$. Damit ist der Kern ein Untervektorraum von V .

b) Wenn die Abbildung injektiv ist, so kann es neben $0 \in V$ keinen anderen Vektor $v \in V$ mit $\varphi(v) = 0$ geben. Also ist $\varphi^{-1}(0) = 0$. Sei umgekehrt $\text{kern } \varphi = 0$ und seien $v_1, v_2 \in V$ gegeben mit $\varphi(v_1) = \varphi(v_2)$. Dann ist wegen der Linearität

$$\varphi(v_1 - v_2) = \varphi(v_1) - \varphi(v_2) = 0.$$

Daher ist $v_1 - v_2 \in \text{kern } \varphi$ und damit $v_1 = v_2$.

AUFGABE 8. (4 (2+2) Punkte)

a) Bestimme, ob die komplexe Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 2 + 5i & 1 - 2i \\ 3 - 4i & 6 - 2i \end{pmatrix}$$

invertierbar ist.

b) Finde eine Lösung für das inhomogene lineare Gleichungssystem

$$M \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 54 + 72i \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Lösung

a) Wir berechnen die Determinante der Matrix. Diese ist

$$\begin{aligned} \det M &= (2 + 5i)(6 - 2i) - (3 - 4i)(1 - 2i) \\ &= 12 + 10 + 30i - 4i - (3 - 8 - 4i - 6i) \\ &= 27 + 36i. \end{aligned}$$

Insbesondere ist die Matrix invertierbar.

b) Es ist

$$\begin{pmatrix} 54 + 72i \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} \det M \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Daher können wir direkt eine Lösung angeben, nämlich

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 6 - 2i \\ -(3 - 4i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 - 4i \\ -6 + 8i \end{pmatrix}.$$

Es ist ja

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 + 5i & 1 - 2i \\ 3 - 4i & 6 - 2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2(6 - 2i) \\ 2(-3 + 4i) \end{pmatrix} &= 2 \begin{pmatrix} (2 + 5i)(6 - 2i) + (1 - 2i)(-3 + 4i) \\ (3 - 4i)(6 - 2i) + (6 - 2i)(-3 + 4i) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \det M \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

AUFGABE 9. (4 Punkte)

Entscheide, ob die Folge

$$x_n := \frac{3 \sin^4 n - 7n^3 + 11n}{5n^3 - 4n^2 - \cos n}$$

in \mathbb{R} konvergiert und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

Lösung

Wir erweitern den Bruch mit $1/n^3$ ($n \geq 1$) und schreiben

$$\frac{3 \sin^4 n - 7n^3 + 11n}{5n^3 - 4n^2 - \cos n} = \frac{3 \frac{\sin^4 n}{n^3} - 7 \frac{n^3}{n^3} + 11 \frac{n}{n^3}}{5 \frac{n^3}{n^3} - 4 \frac{n^2}{n^3} - \frac{\cos n}{n^3}} = \frac{3 \frac{\sin^4 n}{n^3} - 7 + 11 \frac{1}{n^2}}{5 - 4 \frac{1}{n} - \frac{\cos n}{n^3}}$$

Dabei konvergieren $11 \frac{1}{n^2}$ und $-4 \frac{1}{n}$ gegen 0 und wegen $-1 \leq \sin n, \cos n \leq 1$ konvergieren auch $\frac{\sin^4 n}{n^3}$ und $\frac{\cos n}{n^3}$ gegen 0. Somit konvergiert die Folge gegen $-\frac{7}{5}$.

AUFGABE 10. (3 Punkte)

Bestimme die Ableitung der Funktion

$$\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto f(x) = \frac{\ln(2x^2)}{7^x}.$$

Lösung

Wir verwenden die Darstellung $7^x = e^{x \ln(7)}$. Aufgrund der Quotientenregel und der Kettenregel ist

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{\ln(2x^2)}{e^{x \ln(7)}} \right)' \\ &= \frac{e^{x \ln(7)} \frac{1}{2x^2} 4x - \ln(2x^2) \ln(7) e^{x \ln(7)}}{(e^{x \ln(7)})^2} \\ &= \frac{2e^{x \ln(7)} x^{-1} - \ln(2x^2) \ln(7) e^{x \ln(7)}}{e^{2x \ln(7)}} \\ &= \frac{2e^{x \ln(7)} - x \ln(2x^2) \ln(7) e^{x \ln(7)}}{x e^{2x \ln(7)}} \\ &= \frac{2 - x \ln(2x^2) \ln(7)}{x 7^x}. \end{aligned}$$

AUFGABE 11. (4 Punkte)

Bestimme die lokalen und globalen Extrema der Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto f(t) = t^2 e^{-t}.$$

Lösung

Die erste Ableitung ist

$$f'(t) = (2t - t^2) e^{-t} = t(2 - t) e^{-t},$$

deren Nullstellen sind 0 und 2. Die zweite Ableitung ist

$$f''(t) = (t^2 - 4t + 2) e^{-t},$$

so dass $f''(0) > 0$ und $f''(2) < 0$ ist. Daher liegt in 0 ein (isoliertes) lokales Minimum mit dem Wert $f(0) = 0$ und in 2 ein (isoliertes) lokales Maximum mit dem Wert $4 \cdot e^{-2}$ vor. Da für $t \neq 0$ sowohl t^2 als auch e^{-t} positiv sind, liegt in 0 auch das globale Minimum vor. Für $t \rightarrow -\infty$ wächst die Funktion hingegen gegen $+\infty$, sodass in 2 kein globales Maximum vorliegt.

AUFGABE 12. (4 Punkte)

Bestimme die Taylor-Reihe der Funktion

$$f(x) = e^{x^2} - x$$

im Entwicklungspunkt $a = 1$ bis zur Ordnung 4 (man gebe also das Taylor-Polynom vom Grad 4 zum Entwicklungspunkt 1 an, wobei die Koeffizienten in einer möglichst einfachen Form angegeben werden sollen).

Lösung

Wir berechnen zuerst die Ableitungen, diese sind

$$f'(x) = 2xe^{x^2} - 1,$$

$$f''(x) = 2e^{x^2} + 2x2xe^{x^2} = (2 + 4x^2) e^{x^2},$$

$$f'''(x) = (8x) e^{x^2} + 2x(2 + 4x^2) e^{x^2} = (12x + 8x^3) e^{x^2},$$

$$f''''(x) = (12 + 24x^2) e^{x^2} + 2x(12x + 8x^3) e^{x^2} = (12 + 48x^2 + 16x^4) e^{x^2}.$$

Somit ist

$$f(1) = e - 1, f'(1) = 2e - 1, f''(1) = 6e, f'''(1) = 20e, f''''(1) = 76e.$$

Das Taylor-Polynom vom Grad 4 zum Entwicklungspunkt 1 ist demnach

$$e - 1 + (2e - 1)(x - 1) + 3e(x - 1)^2 + \frac{10e}{3}(x - 1)^3 + \frac{19e}{6}(x - 1)^4$$

AUFGABE 13. (4 Punkte)

Bestimme eine Stammfunktion von $\sin^3 x$.

Lösung

$$\begin{aligned}
 \int_0^x \sin^3 t \, dt &= \int_0^x \sin t \cdot \sin^2 t \, dt \\
 &= \int_0^x \sin t \cdot (1 - \cos^2 t) \, dt \\
 &= \int_0^x \sin t \, dt - \int_0^x (\sin t \cos t) \cos t \, dt \\
 &= \int_0^x \sin t \, dt - \left(\frac{\sin^2 t}{2} \cos t \right) \Big|_0^x - \frac{1}{2} \left(\int_0^x \sin^3 t \, dt \right).
 \end{aligned}$$

Durch Multiplikation mit 2 und Umstellen erhält man

$$\begin{aligned}
 3 \int_0^x \sin^3 t \, dt &= 2 \int_0^x \sin t \, dt - \sin^2 x \cos x \\
 &= -2 \cos x - \sin^2 x \cos x.
 \end{aligned}$$

Also ist

$$-\frac{2}{3} \cos x - \frac{1}{3} \sin^2 x \cos x$$

eine Stammfunktion von $\sin^3 x$.

AUFGABE 14. (4 Punkte)

Bestimme eine Stammfunktion von

$$\frac{x^3 + x}{x^2 - 1}$$

für $x > 1$.

Lösung

Es handelt sich um eine rationale Funktion, bei der der Zählergrad größer als der Nennergrad ist. Daher führen wir zuerst die Division mit Rest durch, diese liefert

$$x^3 + x = (x^2 - 1)x + 2x$$

bzw.

$$\frac{x^3 + x}{x^2 - 1} = x + 2\frac{x}{x^2 - 1}.$$

Eine Stammfunktion des hinteren Summanden ist

$$\ln(x^2 - 1),$$

daher ist insgesamt

$$\frac{1}{2}x^2 + \ln(x^2 - 1)$$

eine Stammfunktion von $\frac{x^3+x}{x^2-1}$.

AUFGABE 15. (6 (4+2) Punkte)

a) Bestimme eine Lösung der Differentialgleichung

$$y' = \frac{t^3}{y^2}, \quad y > 0, \quad t > 0,$$

mit dem Lösungsansatz für getrennte Variablen.

b) Bestimme die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = \frac{t^3}{y^2} \quad \text{mit} \quad y(1) = 1.$$

Lösung

a) Wir setzen $g(t) = t^3$ und $h(y) = \frac{1}{y^2}$. Eine Stammfunktion von $g(t)$ ist $G(t) = \frac{1}{4}t^4$ und eine Stammfunktion von $\frac{1}{h(y)} = y^2$ ist $H(y) = \frac{1}{3}y^3$. Die Umkehrfunktion von H ist

$$H^{-1}(z) = \sqrt[3]{3z}.$$

Daher ist

$$y(t) = \sqrt[3]{\frac{3}{4}t^4} = \sqrt[3]{\frac{3}{4}}t^{4/3}$$

eine Lösung der Differentialgleichung.

b) Wir machen den Ansatz $H(y) = \frac{1}{3}y^3 + c$ mit der Umkehrfunktion

$$H^{-1}(z) = \sqrt[3]{3z - 3c},$$

was zur Lösung(sschar) $y(t) = \sqrt[3]{\frac{3}{4}t^4 - 3c}$ führt. Aus

$$1 = y(1) = \sqrt[3]{\frac{3}{4}1 - 3c}$$

folgt $c = -\frac{1}{12}$. Also ist

$$y(t) = \sqrt[3]{\frac{3}{4}t^4 + \frac{1}{4}}$$

die Lösung des Anfangswertproblems.