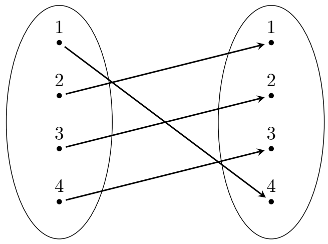
1 Transitive Relation

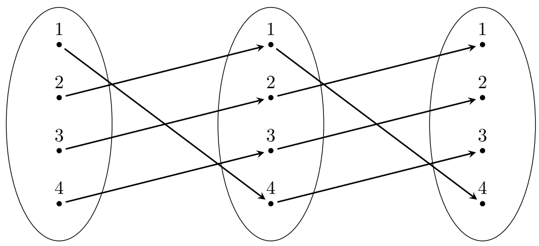
1. Finding Transitive Closure (1)
   $X = \{1,2,3,4\}$ 위의 관계 $R_1 = \{(1,4),(2,1),(3,2),(4,3)\}$의 transitive closure를 찾는 문제이다.

   (a) 관계 R_1을 다음 그림을 사용하여 나타내고, 관계 행렬 A를 구하시오.



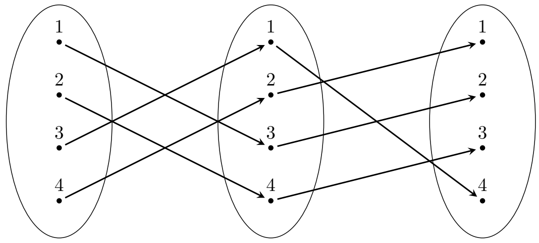
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_1 = \{(1,4),(2,1),(3,2),(4,3)\}$$

   (b) 합성관계 $R_2 = R_1 \circ R_1$을 다음 그림을 사용하여 나타내고 관계 행렬 A^2을 구하고 R_2를 R_1과 비교하여 추가된 관계를 순서쌍의 집합으로 쓰시오.



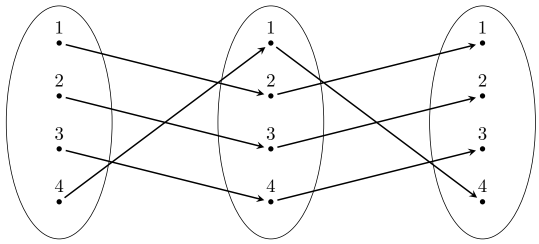
$$\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \{(1,3),(2,4),(3,1),(4,2)\}$$

   (c) 합성관계 $R_3 = R_1 \circ (R_1 \circ R_1) = R_1 \circ R_2$을 다음 그림을 사용하여 나타내고 관계 행렬 A^3을 구하고 R_3를 R_1과 비교하여 추가된 관계를 순서쌍의 집합으로 쓰시오.



$$\mathbf{A}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_3 = \{(1,2),(2,3),(3,4),(4,1)\}$$

(d) 합성관계 $R_4 = R_1 \circ (R_1 \circ (R_1 \circ R_1)) = R_1 \circ R_3$을 다음 그림을 사용하여 나타내고 관계 행렬 A^4을 구하고 R_4를 R_1과 비교하여 추가된 관계를 순서쌍의 집합으로 쓰시오.



$$\mathbf{A}^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_4 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$$

(e) 다음 조건들을 만족시키는 i와 k를 각각 구하시오.

- $(i,1) \in R_1$ and $(1,k) \in R_1$
  $i = 2, \quad k = 4$

- $(i,2) \in R_1$ and $(2,k) \in R_1$
  $i = 3, \quad k = 1$

- $(i,3) \in R_1$ and $(3,k) \in R_1$
  $i = 4, \quad k = 2$

- $(i,4) \in R_1$ and $(4,k) \in R_1$
  $i = 1, \quad k = 3$

- transitive relation을 위해서 존재해야 하는 관계들 즉 (i,k)들의 집합을 쓰시오.
  $\{(2,4),(3,1),(4,2),(1,3)\}$

(f) 다음 조건들을 만족시키는 i와 k를 각각 구하시오.

- $(i, 1) \in R_2$ and $(1, k) \in R_1$
  $i = 3, \quad k = 4$

- $(i, 2) \in R_2$ and $(2, k) \in R_1$
  $i = 4, \quad k = 1$

- $(i, 3) \in R_2$ and $(3, k) \in R_1$
  $i = 1, \quad k = 2$

- $(i, 4) \in R_2$ and $(4, k) \in R_1$
  $i = 2, \quad k = 3$

- transitive relation을 위해서 존재해야 하는 관계들 즉 (i, k)들의 집합을 쓰시오.
  $\{(3, 4), (4, 1), (1, 2), (2, 3)\}$

(g) 다음 조건들을 만족시키는 i와 k를 각각 구하시오.

- $(i, 1) \in R_3$ and $(1, k) \in R_1$
  $i = 4, \quad k = 4$

- $(i, 2) \in R_3$ and $(2, k) \in R_1$
  $i = 1, \quad k = 1$

- $(i, 3) \in R_3$ and $(3, k) \in R_1$
  $i = 2, \quad k = 2$

- $(i, 4) \in R_3$ and $(4, k) \in R_1$
  $i = 3, \quad k = 3$

- transitive relation을 위해서 존재해야 하는 관계들 즉 (i, k)들의 집합을 쓰시오.
  $\{(4, 4), (1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$

(h) $A + A^2 + A^3 + A^4$를 구하고 non-zero element들을 1로 바꾸시오.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \mathbf{A}^3 + \mathbf{A}^4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) R_1의 transitive closure를 구하여 관계 행렬로 표시하시오.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

cf) wxMaxima results

```
(%i2)  A : matrix(
        [0,0,0,1],
        [1,0,0,0],
        [0,1,0,0],
        [0,0,1,0]
       );
```

$$(\%o2) \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

```
(%i3)  A2 : A.A;
```

$$(\%o3) \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

```
(%i4)  A3 : A.A.A;
```

$$(\%o4) \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

```
(%i5)  A4 : A.A.A.A;
```

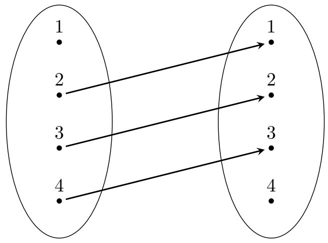
$$(\%o5) \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
(%i6)  A+A2+A3+A4;
```

$$(\%o6) \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

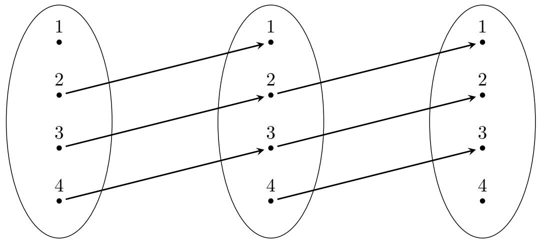
2. Finding Transitive Closure (2)
   $X = \{1, 2, 3, 4\}$ 위의 관계 $R_1 = \{(2, 1), (3, 2), (4, 3)\}$의 transitive closure를 찾는 문제이다.

   (a) 관계 R_1을 다음 그림을 사용하여 나타내고, 관계 행렬 A를 구하시오.



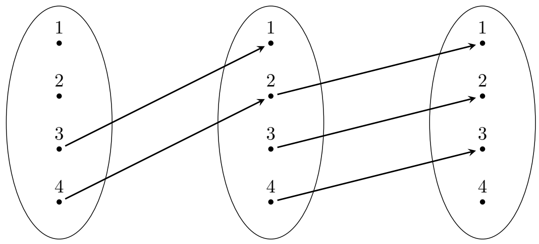
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_1 = \{(2, 1), (3, 2), (4, 3)\}$$

   (b) 합성관계 $R_2 = R_1 \circ R_1$을 다음 그림을 사용하여 나타내고 관계 행렬 A^2을 구하고 R_2를 R_1과 비교하여 추가된 관계를 순서쌍의 집합으로 쓰시오.



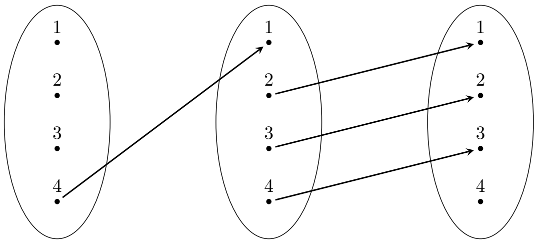
$$\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \{(3, 1), (4, 2)\}$$

   (c) 합성관계 $R_3 = R_1 \circ (R_1 \circ R_1) = R_1 \circ R_2$을 다음 그림을 사용하여 나타내고 관계 행렬 A^3을 구하고 R_3를 R_1과 비교하여 추가된 관계를 순서쌍의 집합으로 쓰시오.



$$\mathbf{A}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_3 = \{(4,1)\}$$

(d) 합성관계 $R_4 = R_1 \circ (R_1 \circ (R_1 \circ R_1)) = R_1 \circ R_3$을 다음 그림을 사용하여 나타내고 관계 행렬 A^4을 구하고 R_4를 R_1과 비교하여 추가된 관계를 순서쌍의 집합으로 쓰시오.



$$\mathbf{A}^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_4 = \{\}$$

(e) 다음 조건들을 만족시키는 i와 k를 각각 구하시오.

- $(i,1) \in R_1$ and $(1,k) \in R_1$
  $i = 2, \quad k = n/a$

- $(i,2) \in R_1$ and $(2,k) \in R_1$
  $i = 3, \quad k = 1$

- $(i,3) \in R_1$ and $(3,k) \in R_1$
  $i = 4, \quad k = 2$

- $(i,4) \in R_1$ and $(4,k) \in R_1$
  $i = n/a, \quad k = 3$

- transitive relation을 위해서 존재해야 하는 관계들 즉 (i,k)들의 집합을 쓰시오.
  $\{(3,1),(4,2)\}$

(f) 다음 조건들을 만족시키는 i와 k를 각각 구하시오.

- $(i,1) \in R_2$ and $(1,k) \in R_1$
  $i = 3, \quad k = n/a$

- $(i,2) \in R_2$ and $(2,k) \in R_1$
  $i = 4, \quad k = 1$

- $(i,3) \in R_2$ and $(3,k) \in R_1$
  $i = n/a, \quad k = 2$

- $(i,4) \in R_2$ and $(4,k) \in R_1$
  $i = n/a, \quad k = 3$

- transitive relation을 위해서 존재해야 하는 관계들 즉 (i,k)들의 집합을 쓰시오.
  $\{(4,1)\}$

(g) 다음 조건들을 만족시키는 i와 k를 각각 구하시오.

- $(i,1) \in R_3$ and $(1,k) \in R_1$
  $i = 4, \quad k = n/a$

- $(i,2) \in R_3$ and $(2,k) \in R_1$
  $i = n/a, \quad k = 1$

- $(i,3) \in R_3$ and $(3,k) \in R_1$
  $i = n/a, \quad k = 2$

- $(i,4) \in R_3$ and $(4,k) \in R_1$
  $i = n/a, \quad k = 3$

- transitive relation을 위해서 존재해야 하는 관계들 즉 (i,k)들의 집합을 쓰시오.
  $\{\}$

(h) $A + A^2 + A^3 + A^4$를 구하고 non-zero element들을 1로 바꾸시오.

$$\begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 1&0&0&0\\ 0&1&0&0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 1&0&0&0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

$$= \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \mathbf{A}^3 + \mathbf{A}^4 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 1&0&0&0\\ 1&1&0&0\\ 1&1&1&0 \end{pmatrix}$$

(i) R_1의 transitive closure를 구하여 관계 행렬로 표시하시오. $\begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 1&0&0&0\\ 1&1&0&0\\ 1&1&1&0 \end{pmatrix}$

cf) wxMaxima results

```
(%i7)  A : matrix(
        [0,0,0,0],
        [1,0,0,0],
        [0,1,0,0],
        [0,0,1,0]
       );
```

$$(\%o7) \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

```
(%i8)  A2 : A.A;
```

$$(\%o8) \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

```
(%i9)  A3 : A.A.A;
```

$$(\%o9) \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

```
(%i10) A4 : A.A.A.A;
```

$$(\%o10) \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

```
(%i11) A+A2+A3+A4;
```

$$(\%o11) \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$