

MP 08/09 – Corrigé du D.M. de PHYSIQUE-CHIMIE n°5**Problème 1****1. Interférence de deux ondes monochromatiques, planes**

- a) Oxy est un plan d'onde pour l'onde 1 qui se propage suivant Oz ; la phase onde est en tout point de Oxy nulle comme en O et : $\underline{\psi}_1(x, y) = A_0$.

La phase de l'onde 2 est : $\varphi_2(M) = \varphi_2(O) + \vec{k}_2 \cdot \vec{OM} = \vec{k}_2 \cdot \vec{OM}$ où $\vec{k}_2 = \frac{2\pi}{\lambda}(\cos\theta_0\vec{u}_z + \sin\theta_0\vec{u}_x)$. Au

point P de coordonnées $(x, y, 0)$, $\varphi_2(x, y) = \frac{2\pi}{\lambda} \sin\theta_0 x$ et :

$$\underline{\psi}_2(x, y) = A_0 \exp[i\varphi_2(x, y)] = A_0 \exp\left(i2\pi \sin\theta_0 \frac{x}{\lambda}\right).$$

- b) Les deux ondes étant cohérentes, l'amplitude en P est :

$$\underline{\psi} = \underline{\psi}_1 + \underline{\psi}_2 = A_0 \left[1 + \exp\left(i2\pi \sin\theta_0 \frac{x}{\lambda}\right) \right].$$

D'où l'éclairement en P : $E = |\underline{\psi}|^2 = 2A_0^2 \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi \sin\theta_0 x}{\lambda}\right) \right]$.

On observe des franges rectilignes parallèles à Oy . L'interfrange est : $i = \frac{\lambda}{\sin\theta_0}$.

Application numérique : $i = 12 \mu\text{m}$.

- c) A 25cm du plan Oxy l'écart angulaire entre deux franges est $\alpha \approx \frac{12 \cdot 10^{-4}}{25} = 4,8 \cdot 10^{-5}$ rad. Les franges sont trop serrées pour être distinguées à l'œil nu.

2. Réseau sinusoïdal d'amplitude

- a) $u_0 = \frac{1}{i} = \frac{\sin\theta_0}{\lambda} = 8,3 \cdot 10^4 \text{ m}^{-1}$ qui est très grand devant $u_1 = \frac{1}{l} = 500 \text{ m}^{-1}$.

- b) La transmittance du réseau est nulle pour $x > l/2$ ou $x < -l/2$. Ainsi :

$$\hat{t}(u) = \int_{-l/2}^{l/2} t(x) \exp(-i2\pi ux) dx.$$

Or : $t(x) \exp(-i2\pi ux) = \frac{1}{2} \exp(-i2\pi ux) + \frac{1}{4} \exp(-i2\pi(u - u_0)x) + \frac{1}{4} \exp(-i2\pi(u + u_0)x)$,

$$\int_{-l/2}^{l/2} \exp(-i2\pi vx) dx = \frac{\sin(\pi vl)}{\pi vl} = \hat{t}_l(v).$$

Il vient : $\hat{t}(u) = \frac{1}{2} \hat{t}_l(u) + \frac{1}{4} \hat{t}_l(u - u_0) + \frac{1}{4} \hat{t}_l(u + u_0)$.

- c) D'après le principe de Huygens-Fresnel chaque point P du réseau se comporte comme une source ponctuelle émettant dans toutes les directions de l'espace. On prend pour référence l'onde issue de O arrivant à l'infini dans la direction θ . Le supplément de marche optique de l'onde issue de $P(x, y, 0)$ arrivant à l'infini dans cette direction est $\delta = -x \sin\theta$, son déphasage par rapport à l'onde de référence est donc $\varphi = -\frac{2\pi}{\lambda} x \sin\theta$. D'autre part l'amplitude de l'onde émise par le point P est

$KA_0 t(x)$, où K est une constante complexe et A_0 l'amplitude de l'onde incidente. L'amplitude de l'onde diffractée par le réseau à l'infini dans la direction θ est finalement :

$$\underline{\psi}(\theta) = KA_0 \int_{-l/2}^{l/2} t(x) \exp\left(-i \frac{2\pi \sin\theta x}{\lambda}\right) dx = KA_0 \hat{t}\left(\frac{\sin\theta}{\lambda}\right) \approx KA_0 \hat{t}(u).$$

L'éclairement est : $E = |\underline{\psi}(\theta)|^2 = E_0 \left(\frac{1}{2} \hat{t}_1(u) + \frac{1}{4} \hat{t}_1(u - u_0) + \frac{1}{4} \hat{t}_1(u + u_0) \right)^2$ avec $E_0 = |K|^2 A_0^2$.

L'allure de $E(u)$ s'obtient facilement avec une calculatrice graphique (sur la figure ci-contre E/E_0 est donné en fonction de u/u_0) : on observe trois pics, un pic central de hauteur $0,25E_0$ pour $u=0$, deux pics symétriques pour $u = \pm u_0$ de hauteur $0,0625E_0$.

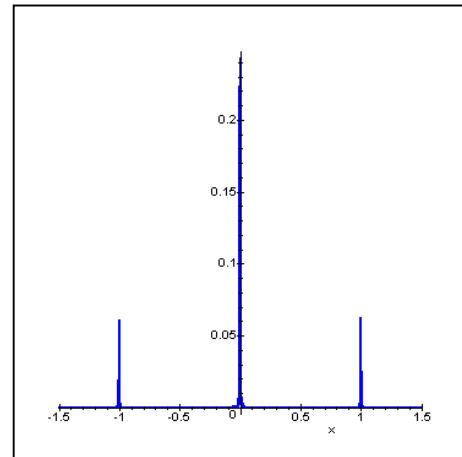
Explication : $\hat{t}_1(u)$ (fonction « sinus cardinal ») présente $u=0$ un pic central de largeur $u_1 \ll u_0$; pour $u \gg u_1$, $\hat{t}_1(u) \approx 0$. Ainsi :

$$E \approx |K|^2 A_0^2 \left(\frac{1}{4} \hat{t}_1(u)^2 + \frac{1}{16} \hat{t}_1(u - u_0)^2 + \frac{1}{16} \hat{t}_1(u + u_0)^2 \right),$$

car les doubles produits tels que $2\hat{t}_1(u)\hat{t}_1(u - u_0)$ sont

quasiment nuls puisque l'un des deux termes au moins est quasiment nul. Il existe des pics secondaires de chaque côté des pics principaux non visibles sur la figure.

Interprétation : Le réseau diffracte dans trois directions $\theta=0$, $\theta_1 = \lambda u_0$ et $\theta_{-1} = -\lambda u_0$ seulement. Un réseau de fentes infiniment fines donnerait une infinité de pics de même amplitude pour $\theta_k = k\lambda u_0$ ($k \in \mathbf{Z}$).



en

3. Fonction de transfert d'une lentille en éclairage cohérent

a) Avec les formules de conjugaison, A étant le point objet, A' le point image :

$$\frac{1}{OA'} = \frac{1}{f'} + \frac{1}{OA} = \frac{1}{0,20} + \frac{1}{-0,25} \text{ (m}^{-1}\text{)} \Rightarrow \boxed{OA' = 1 \text{ m}}$$

Le plan image est situé à 1 m derrière la lentille L .

Le grandissement transversal est : $\gamma = \frac{OA'}{OA} = \frac{1,00}{-0,25} = -4$.

La construction géométrique ne présente aucune difficulté.

L'image géométrique de S par L_C est le point à l'infini sur l'axe ; l'image de ce point par L est le foyer image F . Donc l'image de S par l'ensemble des deux lentilles est le point F .

b) Les rayons diffractés dans la direction θ convergent, après passage dans L , au point M du plan focal de coordonnées $(f \tan \theta, 0, f) \approx (f\theta, 0, f)$ dans le repère $Oxyz$ dont l'origine est le centre de la lentille et dont les axes sont définis sur la figure de l'énoncé. Les différences de marche en M sont les mêmes qu'à l'infini à cause de la condition de stigmatisme portant sur le chemin optique. Ainsi l'amplitude complexe en M est, à une constante multiplicative près, identique à l'amplitude $\underline{\psi}(\theta)$ calculée en

$$2.c) : \underline{\psi}(M) = A'_0 \hat{t}(u).$$

c) La structure périodique du réseau donne les deux faisceaux diffractés dans les directions $\theta_1 = \lambda u_0$ et $\theta_{-1} = -\lambda u_0$. Si ces deux faisceaux sont arrêtés par le diaphragme, il n'y a plus trace après la lentille L de la structure périodique du réseau. C'est le cas dès que

$$D < D_1 = 2d_0 \tan \theta_1 \approx 2d_0 \lambda u_0.$$

La plus grande fréquence spatiale passant la lentille est $u_c = \frac{D}{2d_0 \lambda}$.

La fonction de transfert de la lentille diaphragmée est : $T(u) = \begin{cases} 1 & \text{si } u < u_c \\ 0 & \text{si } u > u_c \end{cases}$.

Application numérique : $u_c = 3,2 \cdot 10^5 \text{ m}^{-1}$.

Interprétation par la diffraction par le diaphragme : Le diaphragme diffracte la lumière introduisant sur les faisceaux une ouverture angulaire supplémentaire de l'ordre de $2\lambda/D$.

Dans le plan image, l'image d'un point est donc un segment de largeur $\frac{2\lambda}{D} \times \overline{OA'} = \frac{2\lambda}{D} \times |\gamma| d_0$. Il devient donc impossible de distinguer des détails de taille inférieure à cette largeur, c'est à dire des fréquences spatiales supérieures à $\frac{D}{2d_0\lambda|\gamma|} = \frac{u_c}{|\gamma|}$ dans le plan image, ce qui correspond à la fréquence spatiale u_c dans le plan objet.

- d) On suppose $u_c > 1,5u_0$. Le diaphragme n'influe pas sur la figure de diffraction, ni sur l'image du réseau. On observe dans le plan focal image de L trois points lumineux rouges ($\lambda = 632,8 \text{ nm}$) correspondant aux trois pics d'intensité trouvés en 2.c). Un pic situé en $F(0, f, 0)$, et deux pic 4 fois moins lumineux situés aux points $Q_1(f\lambda u_0, 0, f)$ et $Q_{-1}(-f\lambda u_0, 0, f)$

4. Modulation et démodulation spatiales en amplitude

- a) L'amplitude lumineuse est multipliée par $t(x)$ à la traversée du réseau, puis par $m(x)$ à la traversée de l'objet. L'ensemble est équivalent à un objet de transmittance $t(x)m(x)$.
- b) L'étude des réseaux de fentes enseigne que les pics de diffraction sont d'autant plus étroits que le nombre de motifs éclairés est grand. L'objet présente pour simplifier des zones claires et des zones sombres. Le nombre moyen de traits du réseau à l'intérieur d'une zone claire est certainement bien plus petit que le nombre de traits total du réseau. On comprend qualitativement pourquoi les pics d'intensités sont élargis.

Le lien entre la coordonnée x dans le plan focal et la fréquence spatiale u est $x = f\theta = f\lambda u$. On a

$$\text{ainsi : } u_m = \frac{b}{2f\lambda} = \frac{2 \cdot 10^{-3}}{2 \times 20 \cdot 10^{-2} \times 632,8 \cdot 10^{-9}} = 7,9 \cdot 10^3 \text{ m}^{-1}.$$

L'amplitude diffractée dans la direction θ est à présent :

$$\underline{\psi}(\theta) = KA_0 \int_{-l/2}^{l/2} t(x)m(x) \exp(-i2\pi ux) dx \quad \text{avec} \quad u = \frac{\theta}{\lambda} \approx \frac{\sin \theta}{\lambda},$$

Or :

$$t(x)m(x) \exp(-i2\pi ux) = \frac{1}{2} m(x) \exp(-i2\pi ux) + \frac{1}{4} m(x) \exp(-i(u - u_0)x) + \frac{1}{4} m(x) \exp(-i(u + u_0)x)$$

Posons : $\hat{m}(u) = \int_{-l/2}^{l/2} m(x) \exp(-i2\pi ux) dx$. Alors :

$$\underline{\psi}(\theta) = KA_0 \left[\frac{1}{2} \hat{m}(u) + \frac{1}{4} \hat{m}(u - u_0) + \frac{1}{4} \hat{m}(u + u_0) \right].$$

Dans le plan focal, l'information contenue dans l'objet est représentée par la fonction $\hat{m}(u)$.

A la condition que cette fonction prenne des valeurs nulles en dehors d'un intervalle de la forme $[-u_m, +u_m]$ avec $u_m < u_0$ (ce qui veut dire que le pas du réseau est plus petit que les détails les plus fins de l'objet $m(x)$), la fonction $\underline{\psi}(\theta)$ contient trois répliques de $\hat{m}(u)$ centrées en $u = 0$, $u = u_0$ et $u = -u_0$.

- c) Le montage de la question 3. permet d'éliminer les deux répliques latérales si $u_c < u_0 - u_m$ et d'observer l'objet dans le plan image.

Problème 2

Partie I - Principe de la « propulsion par réaction »

I.A - Le système constitué par le chariot, l'opérateur et les n sacs n'est soumis qu'à des forces verticales, poids et réaction du sol, parce qu'il n'y a pas d'action dissipative. La composante horizontale de sa quantité de mouvement se conserve donc.

Comme la suite de cette question et la question B sont des cas particuliers de la question C, nous allons d'abord résoudre la question C.

Il est dit que la vitesse de lancement d'un sac est \vec{u} par rapport au chariot ; comme la vitesse du chariot varie au cours du lancer, \vec{u} est mal défini par cette formule. En fait, on obtient la relation donnée en I.B si on suppose que \vec{u} est la vitesse par rapport à un référentiel animé de la vitesse du chariot avant le lancer.

I.C - Considérons le système constitué par le chariot, l'opérateur et les $n-k+1$ sacs. Avant le $k^{\text{ième}}$ jet, la composante horizontale de sa quantité de mouvement est $(n-k+1)m\vec{V}_{k-1}$; après, elle vaut $(n-k)m\vec{V}_k + m(\vec{V}_{k-1} + \vec{u})$.

$$\text{D'où } (n-k+1)m\vec{V}_{k-1} = (n-k)m\vec{V}_k + m(\vec{V}_{k-1} + \vec{u}) \Rightarrow \vec{V}_k = \vec{V}_{k-1} - \frac{\vec{u}}{n-k}.$$

D'où, comme $\vec{V}_0 = \vec{0}$:

$$\text{I.A } \vec{V}_1 = -\frac{\vec{u}}{n-1}. \quad \text{I.B } \vec{V}_2 = -\left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2}\right)\vec{u}. \quad \text{I.C } \vec{u}. \quad \text{I.D } \cos\psi. \quad \text{I.E } M ; \vec{a}_k = -\frac{D_m\vec{u}}{m(n-k)}.$$

$$\text{I.F } \vec{\Pi} = (n-k)m\vec{a}_k = -D_m\vec{u}.$$

Partie II - Propulsion par moteur fusée

II.A - Considérons le système constitué à l'instant t par la fusée de masse m et de vitesse \vec{V} et à l'instant $t+dt$ par l'ensemble de la fusée de masse $m+dm$ et de vitesse $\vec{V} + d\vec{V}$ et des gaz éjectés pendant dt , de masse $-dm$ et de vitesse $\vec{V} + \vec{u}$. Le théorème de la quantité de mouvement s'écrit :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{(m+dm)(\vec{V} + d\vec{V}) - dm(\vec{V} + \vec{u}) - m\vec{V}}{dt} = \vec{R}$$

En simplifiant et en supprimant le terme quadratique par rapport aux différentielles, qui correspond à un terme négligeable devant les termes linéaires par rapport aux différentielles, on obtient :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m \frac{d\vec{V}}{dt} - \vec{u} \frac{dm}{dt} = \vec{R}$$

qu'on peut écrire :

$$m \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{R} + \vec{T} \quad \text{où } \vec{T} = \vec{u} \frac{dm}{dt} = -D_m\vec{u}$$

$$\text{II.B } m \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{u} \frac{dm}{dt} \Rightarrow d\vec{V} = \vec{u} \frac{dm}{m} \Rightarrow \vec{V}_f - \vec{V}_i = \vec{u} \int \frac{dm}{m} = \vec{u} \ln \frac{m_f}{m_i}.$$

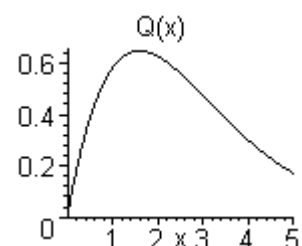
$$\text{II.C } Q = \frac{\frac{1}{2} m_f V_f^2}{\frac{1}{2} m_e u^2}$$

$$V_f = u \ln \frac{m_i}{m_f} \Rightarrow m_e = m_i - m_f = m_f [\exp(V_f / u) - 1]$$

$$Q = \frac{x^2}{\exp(x) - 1} \quad \text{où } x = V_f / u.$$

$Q(x)$ est une fonction positive de la variable x positive ; si $x \rightarrow 0, Q(x) \approx x \rightarrow 0$; si $x \rightarrow \infty, Q(x) \rightarrow 0$; donc $Q(x)$ présente un maximum pour une valeur de x strictement positive.

La courbe de droite montre que Q est toujours inférieur à 1 et qu'il passe



par un maximum pour $x = 1,5936$, ce qui traduit que, quand x est de l'ordre de 1, il y a moins d'énergie cinétique perdue.

II.D $T \approx 2mg = D_m u \Rightarrow D_m = \frac{2 \times 2 \cdot 10^6 \times 10}{4 \cdot 10^3} = 10^4$ kg/s, ce qui représente un débit considérable.

II.E - Sous réserve que le débit des gaz soit constant et suffisant pour que la poussée soit supérieure au poids :

$$\frac{dm}{dt} = -D_m \quad m = m(0) - D_m t$$

$$m \frac{dV}{dt} = -mg - u \frac{dm}{dt} \quad dV = -gdt - u \frac{dm}{m} \quad V = -gt - u \ln \frac{m}{m(0)} = -gt - u \ln[1 - D_m t / m(0)]$$

$$z = \int V dt = -\frac{1}{2} g t^2 + ut \ln(m(0)) - u \int dt \ln m$$

$$\int dt \ln m = -\frac{1}{D_m} \int dm \ln m = -\frac{1}{D_m} [m \ln m - m]_{m(0)}^{m(0) - D_m t} = -\frac{1}{D_m} [(m(0) - D_m t) \ln(m(0) - D_m t) - m(0) \ln m(0) - D_m t]$$

$$= -\frac{m(0)}{D_m} \ln[1 - D_m t / m(0)] + t[1 + \ln(m(0) - D_m t)]$$

$$z = -\frac{1}{2} g t^2 + ut[1 - \ln(1 - D_m t / m(0))] + u \frac{m(0)}{D_m} \ln[1 - D_m t / m(0)]$$

$$z = ut - \frac{1}{2} g t^2 + u[m(0) / D_m - t] \ln(1 - D_m t / m(0))$$

II.F $dE_p = mg(r)dr = \frac{mg_0 R_T^2}{r^2} dr \Rightarrow E_p / m = -\frac{g_0 R_T^2}{r} \quad E_p(r = R_T) / m = -g_0 R_T = 6,4 \cdot 10^7$ J/kg.

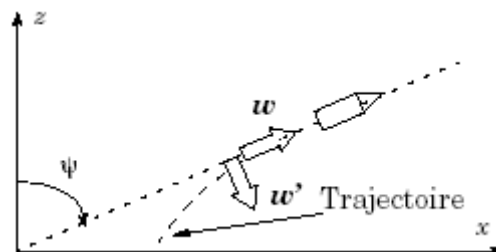
II.G - L'énergie nécessaire est le triple de l'énergie massique produite par un combustible. Comme en outre le rendement Q est inférieur à 1, il faut une quantité de combustible très supérieure à la masse qu'on veut faire échapper au champ gravitationnel terrestre.

II.H -

II.H.1) L'accélération est $\vec{a} = \frac{d}{dt}(V\vec{w}) = \frac{dV}{dt}\vec{w} + V \frac{d\vec{w}}{dt}$. Or, \vec{w}

est une fonction de $\psi(t)$: $\frac{d\vec{w}}{dt} = \frac{d\vec{w}}{d\psi} \frac{d\psi}{dt} = \frac{d\psi}{dt} \vec{w}'$. D'où

$$\vec{a} = \frac{dV}{dt} \vec{w} + V \frac{d\psi}{dt} \vec{w}'$$



II.H.2) Projétons sur la base de Frenet la loi fondamentale de la dynamique $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T}$:

$$m \frac{dV}{dt} = -mg \cos \psi + T$$

$$mV \frac{d\psi}{dt} = mg \sin \psi$$

II.I -

II.I.1) L'idée que le rapport T/m est constant dans le temps est peu réaliste, car le débit des gaz est constant et la masse varie d'un facteur de l'ordre de 3 pendant la combustion d'un étage. Par contre, elle simplifie le calcul qui suit et donne une idée de l'évolution possible ; le résultat est plus réaliste si on se limite au début de la poussée, où le rapport n'a pas eu le temps de varier.

II.I.2) Prenons le rapport membre à membre des équations de II.H.2 : $\frac{1}{V} \frac{dV}{d\psi} = \frac{-\cos \psi + q}{\sin \psi}$.

II.J -

$$\ln \frac{V}{V_0} = \int_{V_0}^V \frac{dV}{V} = \int_{\pi/2}^{\psi} \frac{-\cos \psi + q}{\sin \psi} d\psi = [q \ln |\tan(\psi/2)| - \ln |\sin \psi|]_{\pi/2}^{\psi} = q \ln \tan(\psi/2) - \ln \sin \psi$$

$$V = V_0 \frac{\tan^q(\psi/2)}{\sin \psi}$$

II.K - On pourrait faire basculer un peu de la verticale la fusée au moyen d'ailerons ; ensuite, le poids amplifierait cette inclinaison, ce qui permettrait de prendre naturellement l'orbite de transfert. La fusée suit ensuite cette orbite de façon balistique jusqu'à son apogée qui est à l'altitude recherchée. Alors une nouvelle accélération permet de prendre l'orbite circulaire.

Une autre stratégie est de tirer verticalement pour traverser l'atmosphère. Une fois l'atmosphère traversée, la fusée bascule et accélère horizontalement, prenant l'orbite de transfert.

La première méthode est plus simple que la seconde, elle ne nécessite pas de manœuvre de basculement. Le point principal est de savoir si elle est plus économique en carburant.

Partie V - Vaisseau spatial dans un champ newtonien

V.A - La force est centrale, son moment en O est nul ; d'après le théorème du moment cinétique, ce moment est la dérivée du moment cinétique \vec{L}_O par rapport au temps. Donc \vec{L}_O est une constante du mouvement.

V.B - Soit P la position du vaisseau ; \vec{OP} est perpendiculaire à \vec{L}_O , donc le vaisseau se meut dans le plan fixe passant par O et perpendiculaire à \vec{L}_O .

L'aire balayée par OP est proportionnelle au temps.

$$\mathbf{V.C} \quad \vec{g}(P) = -\frac{GMm\vec{OP}}{r^3}$$

$$\mathbf{V.D} \quad dE_p = -m\vec{g}(P) \cdot d\vec{P} = \frac{GMm dr}{r^2} \Rightarrow E_p = -\frac{GMm}{r} \text{ en choisissant l'énergie potentielle nulle à l'infini.}$$

V.E - L'équilibre sur une orbite circulaire de rayon r_0 implique $m \frac{V_0^2}{r_0} = \frac{GMm}{r_0^2}$, d'où

$$E_m = \frac{1}{2} m V_0^2 - \frac{GMm}{r_0} = -\frac{GMm}{2r_0}, \text{ qui est négatif, comme il se doit pour un état lié.}$$

$$T_{rev} = \frac{2\pi r_0}{V_0} = \frac{2\pi r_0}{\sqrt{\frac{GM}{r_0}}} = 2\pi \sqrt{\frac{r_0^3}{GM}}$$

V.F $\Delta E_m = -\frac{GMm}{2r_0} + \frac{GMm}{R_T}$ en négligeant l'énergie cinétique due à la rotation de la Terre autour de l'axe

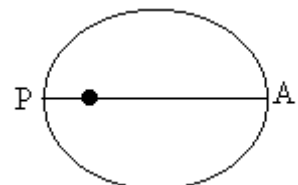
des Pôles. Comme $mg_0 = \frac{GMm}{R_T^2}$, $GM = g_0 R_T^2$,

$$\Delta E_m / m = g_0 R_T^2 (1/R_T - 1/2r_0) = 10 \times (6,4 \cdot 10^6)^2 (1/6400000 - 1/1400000) = 3,5 \cdot 10^7 \text{ J/kg}$$

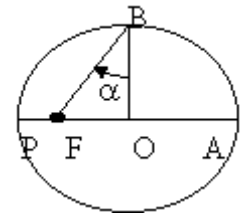
V.G - Si $1 \text{ kWh} = 3,6 \cdot 10^6 \text{ J}$ revient environ à $0,15 \text{ €}$, le coût théorique de la satellisation d'un kg de charge utile serait de $\frac{3,5 \cdot 10^7 \times 0,15}{3,6 \cdot 10^6} = 1,4 \text{ €}$ par kg. Le coût réel est mille fois plus grand, ce qui signifie que le coût essentiel est celui du matériel.

$$\mathbf{V.H} \quad r_A = \frac{p}{1-e} \quad r_P = \frac{p}{1+e} \quad 2a = r_A + r_P \Rightarrow a = \frac{p}{1-e^2}$$

V.I $T_{orb} = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{GM}}$ qu'on retrouve en remplaçant r_0 par a dans l'expression de la question V.E.



V.J - Comme la vitesse et la distance sont les mêmes que pour un mouvement circulaire, l'énergie est la même : la trajectoire est une ellipse de demi grand axe $a = r_0$. Le point considéré de la trajectoire étant à la distance a du foyer, il est un des sommets B du petit axe de l'ellipse.



L'angle α entre la direction de la vitesse et celle qu'elle aurait pour un mouvement circulaire est aussi l'angle entre les directions perpendiculaires, soit $\alpha = (BO, BF)$;

$e = \frac{c}{a} = \frac{OF}{BF} = \sin \alpha$; l'expression de V.H $a = \frac{p}{1-e^2}$ et les formules $r_A = a + c = a(1+e)$ et $r_p = a - c = a(1-e)$ montrent que $p = r_0 \cos^2 \alpha$ $r_A = r_0(1 + \sin \alpha)$ $r_p = r_0(1 - \sin \alpha)$.

Partie VI - Vitesse de libération

VI.A - Le vaisseau échappe au champ gravitationnel de l'astre si son énergie est positive soit si

$$\frac{1}{2}mV_1^2 - \frac{GMm}{r_0} \geq 0 \quad V_1 \geq \sqrt{\frac{2GM}{r_0}}.$$

VI.B.1) option 1 : Exprimons la conservation de l'énergie entre le départ et l'infini :

$$\frac{1}{2}m(5V_0)^2 - \frac{GMm}{r_0} = \frac{1}{2}mV_\infty^2.$$

L'équilibre sur l'orbite circulaire implique que $m \frac{V_0^2}{r_0} = \frac{GMm}{r_0^2} \Rightarrow \frac{GMm}{r_0} = mV_0^2$. D'où : $V_\infty = \sqrt{\frac{23}{2}}V_0$.

VI.B.2) option 2 : La conservation de l'énergie, qui est égale à l'énergie potentielle à une distance égale au grand axe, permet de calculer ce grand axe :

$$\frac{1}{2}m(V_0/2)^2 - \frac{GMm}{r_0} = -\frac{GMm}{2a} \Rightarrow \frac{GMm}{2a} = \frac{GMm}{r_0} - \frac{GMm}{8r_0} \Rightarrow a = \frac{4}{7}r_0$$

Il n'y a qu'au périhélie et à l'apogée que le rayon vecteur est perpendiculaire à la vitesse. Donc le point de départ est l'apogée : $r_A = r_0$ $V_A = V_0/2$.

La valeur de a et la conservation du moment cinétique entre l'apogée et le périhélie montrent que :

$$r_A + r_p = 2a \Rightarrow r_p = r_0/7 ; r_A V_A = r_p V_p \Rightarrow V_p = \frac{7}{2}V_0.$$

Pour que la manœuvre réussisse, il faut que le rayon de l'astre soit inférieur à r_p .

VI.B.3) Au périhélie, on fait passer la vitesse de $7V_0/2$ à $7V_0/2 + 7V_0/2 = 7V_0$. La nouvelle trajectoire est une branche d'hyperbole, car l'énergie est positive, comme le montre le calcul qui suit, et la nouvelle vitesse finale (« à l'infini ») est telle que

$$\frac{1}{2}m(7V_0)^2 - \frac{GMm}{r_0/7} = \frac{1}{2}mV_\infty^2 \Rightarrow \frac{1}{2}mV_\infty^2 = \frac{1}{2}mV_0^2(7^2 - 2 \times 7) \Rightarrow V_\infty = \sqrt{35}V_0$$

VI.B.4) La deuxième option permet d'obtenir une vitesse à l'infini plus grande, ce qui peut paraître paradoxal, puisqu'on a utilisé une partie du budget vitesse pour freiner. Il est plus efficace de produire une variation de vitesse près d'un astre que loin de lui.

Partie VII - Rentrée dans l'atmosphère

VII.A - Le vaisseau est soumis à la force de freinage de l'air $\frac{1}{2}C_x \rho S V^2$ et au poids ; ce dernier est négligeable si le freinage est efficace. On obtient alors la formule de l'énoncé en supposant l'atmosphère isotherme, d'où $\rho = \rho_0 \exp(-z/H)$, où $H = 8 \text{ km}$, et en posant $\tau = C_x/2$.

VII.B $dz/dt = -V \cos \psi$.

$$\frac{dV}{dz} = \frac{dV}{dt} \frac{dt}{dz} = \frac{1}{V \cos \psi} \tau S V^2 \rho_0 \exp(-z/H)$$

$$\frac{dV}{dz} = \frac{\tau S V \rho_0 \exp(-z/H)}{\cos \psi}$$

VII.C - Séparons les variables et intégrons :

$$\frac{dV}{V} = \frac{\tau S \rho_0}{\cos \psi} \exp(-z/H) dz$$

$$\ln \frac{V}{V_i} = \frac{\tau S \rho_0}{\cos \psi} [\exp(-z/H) - \exp(-z_i/H)]$$

$$\frac{V}{V_i} = \exp\left(\frac{\tau S \rho_0}{\cos \psi} [\exp(-z/H) - \exp(-z_i/H)]\right)$$

VII.D $\frac{V}{V_i} = \exp\left(\frac{\tau S \rho_0}{\cos \psi} \exp(-z/H)\right)$

VII.E - La formule admise par l'énoncé s'obtient en remplaçant V dans l'expression de la question VII.A par l'expression obtenue en VII.D.

Soit $y = -\frac{z}{H} - \frac{2\alpha\rho_0 H}{\cos \psi} \exp(-z/H)$. La norme de l'accélération est une fonction croissante de y , donc elle est maximum quand y est maximum.

$$\frac{dy}{dz} = -\frac{1}{H} + \frac{2\alpha\rho_0}{\cos \psi} \exp(-z/H)$$

$$\frac{dy}{dz} > 0 \Leftrightarrow \frac{2\alpha\rho_0}{\cos \psi} \exp(-z/H) > \frac{1}{H} \Leftrightarrow z < H \ln \frac{2\alpha\rho_0 H}{\cos \psi}$$

La réponse à la question posée est donc plus compliquée que l'énoncé le laisse supposer. Deux cas :

- si $2\alpha\rho_0 H < \cos \psi$, l'accélération est maximum pour $z = 0$: $\gamma_{\max} = \alpha\rho_0 V_i^2 \exp\left\{-\frac{2\alpha\rho_0 H}{\cos \psi}\right\}$
- si $2\alpha\rho_0 H > \cos \psi$, l'accélération est maximum pour $z = H \ln \frac{2\alpha\rho_0 H}{\cos \psi}$: $\gamma_{\max} = \frac{V_i^2 \cos \psi}{2H} \exp(-1)$

VII.F - Application numérique :

VII.F.1) $2\alpha\rho_0 H = 64\rho_0$, avec ρ_0 de l'ordre de $1,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, donc il faut considérer le deuxième cas.

$$\gamma_{\max} < 10g \text{ si } \cos \psi < \frac{20Hg}{V_i^2 \exp(-1)} = 0,068 \quad \psi > 86,1^\circ. \text{ Commentaire : voir F3.}$$

VII.F.2) Supposons α égal pour la navette spatiale et pour Apollo XIII.

$$\cos \psi < \frac{6Hg}{V_i^2 \exp(-1)} = 0,0204 \quad \psi > 88,83^\circ. \text{ Commentaire : voir F3.}$$

VII.F.3) Si ψ est trop proche de $\pi/2$, il faut tenir compte du poids et de la rotondité de la Terre. C'est particulièrement le cas pour la navette spatiale, puisqu'on veut $\gamma_{\max} < 3g$, donc le poids n'est pas négligeable.

VII.F.4) Un astronaute doit résister à de fortes accélérations, d'où l'appel aux pilotes d'avions de chasse. Toutefois, pour explorer la Lune, il aurait été préférable d'envoyer des géologues plutôt que des pilotes d'avions, qui ont moins bien su examiner les roches sur place.

VII.F.5) La coiffe du vaisseau peut être recouverte de matériaux réfractaires dont l'ablation absorbe une grande chaleur ou plus simplement être constituée d'un matériau résistant aux hautes températures.

ChimieA-1 Fer α

A1*a Volume minimum redonnant le cristal par translation dans trois directions indépendantes. Longueurs des arêtes et angles entre les arêtes.

A1*b Cube d'arête a : 1 atome à chaque sommet et un atome au centre.

$$A1*c \quad N = 8/8 + 1 = 2$$

A1*d Atomes tangents suivant une grande diagonale du cube : $4R_\alpha = a_\alpha \sqrt{3}$.

$$C_{cc} = 2(4/3)\pi R_\alpha^3 / a_\alpha^3 = \pi \sqrt{3} / 8 \approx 0,68.$$

$$A1*e \quad \rho_\alpha = 2M(\text{Fe}) / (N_A a_\alpha^3) \quad \text{d'où} \quad a_\alpha = 286,768 \approx 287 \text{ pm}$$

$$A1*f \quad R_\alpha(20) = 124,174 \approx 124 \text{ pm}$$

A-2 Influence de la température

A2*a Le coefficient de dilatation isobare

$$\alpha = (1/V)(\partial V / \partial T)_P \approx [2 / (0,1321 + 0,1271)] [(0,1321 - 0,1271) / (910 - 20)] = 4,335 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$$

$$A2*b \quad a_\alpha(20) = 286,768 \text{ pm} \quad \text{et} \quad a_\alpha(910) = 290,482 \text{ pm}$$

$$A2*c \quad R_\alpha(910) = 125,782 \text{ pm} \approx 126 \text{ pm}. \quad \text{On a bien} [R_\alpha(910) + R_\alpha(20)] / 2 = 124,978 \approx 125 \text{ pm}$$

A-3 Fer γ

A3*a Cube d'arête a : 1 atome à chaque sommet et un atome au centre de chaque face.

$$A3*b \quad N = 8/8 + 6/2 = 4$$

A3*c Atomes tangents suivant une d'une face du cube : $4R_\alpha = a_\alpha \sqrt{2}$.

$$C_{fcc} = 4(4/3)\pi R_\gamma^3 / a_\gamma^3 = \pi / (3\sqrt{2}) \approx 0,74.$$

$$A3*d \quad a_\gamma = 364,867 \approx 365 \text{ pm}$$

$$A3*e \quad v_{(\gamma)910} = M_A a^3 / (4M) = 0,1309 \text{ cm}^3 \text{ g}^{-1}.$$

A-4 Sites octaédriques

A4*a Site octaédrique non régulier car toutes les arêtes n'ont pas la même longueur : a ou $a\sqrt{3}/2$.

A4*b La distance minimale entre deux atomes de fer opposés est a :

$$a = 2R_\alpha + 2R_{M\alpha} = 4 R_\alpha / \sqrt{3} \quad \text{d'où} \quad R_{M\alpha} = 19,3 \text{ pm}.$$

A4*c Au centre du cube et au milieu de chaque arête. Réguliers.

$$A4*d \quad a = 2R_\gamma + 2R_{M\gamma} = 4 R_\gamma / \sqrt{2} \quad \text{d'où} \quad R_{M\gamma} = 53,4 \text{ pm}.$$

A4*e La solubilité par insertion entraîne une déformation, beaucoup plus grande dans la ferrite.

A-5 Insertion du carbone

A5*a $a'_\alpha = 2(R_\alpha + R_c) = 404 \text{ pm}$ et $\Delta V/V = (a'/a)^3 - 1 = 1,74$.

A5*b $a'_\gamma = 2(R_\gamma + R_c) = 412 \text{ pm}$ et $\Delta V/V = (a'/a)^3 - 1 = 0,44$.

A5*c La formation de l'austénite entraîne beaucoup moins de déformation que celle de la ferrite.

A5*d Il y a $N' = 1 + 12/4 = 4$ sites octaédriques par maille, occupé chacun par x carbone :
 $0,0133 = 4xM(C) / [4xM(C) + 4M(Fe)]$ d'où $x = 0,0627$ et il y a $4x \approx 0,25$ atomes de C.

A5*e $\rho' = [4xM(C) + 4M(Fe)] / [N_A a'^3] = 5378 \text{ kg m}^{-3}$, plus léger que le fer.