

MP 08/09 D.M. de PHYSIQUE n°9 pour le 15/12/08**1<sup>er</sup> problème** (Concours Spécial T')**Disque chargé.**Données :  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  SI $c = 299\,792\,458$  m.s<sup>-1</sup>.

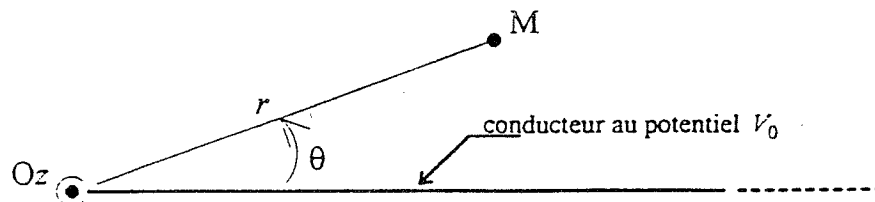
En coordonnées cylindriques :

$$\operatorname{div}(A_r, A_\theta, A_z) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\theta) + \frac{\partial}{\partial z} (A_z).$$

**A POTENTIEL ET CHAMP AU VOISINAGE DU BORD D'UN CONDUCTEUR MINCE.**

Pour étudier le potentiel et le champ électrostatique au voisinage du bord d'un conducteur mince, on modélise celui-ci, localement, par un demi-plan conducteur d'épaisseur négligeable.

Le demi-plan est défini par :  $\theta = 0$  ou  $2\pi$ ,  $r \geq 0$  ( en coordonnées cylindriques).



On cherche, au voisinage du bord (c'est à dire au voisinage de l'axe Oz), le potentiel sous la forme :

$$V(r, \theta, z) = V_0 + f(r) \times g(\theta),$$

où  $f$  et  $g$  sont des fonctions de  $r$  et  $\theta$  telles que le potentiel  $V$  tend vers  $V_0$  quand on se rapproche du conducteur.

L'espace autour du conducteur est le vide.

1. En utilisant l'expression du potentiel proposée ci-avant, calculer  $E_r, E_\theta, E_z$  : composantes du champ électrostatique en coordonnées cylindriques. Établir ensuite l'équation qui relie nécessairement  $r, f, f', f'', g$  et  $g''$ . Mettre cette dernière relation sous la forme :

$$H(r) = K(\theta).$$

2. Après avoir justifié que :  $g(0) = g(2\pi) = 0$ , trouver les valeurs possibles pour  $K(\theta)$ . On choisira pour  $K$  la valeur pour laquelle l'équipotentielle  $V = V_0$  est limitée au seul demi-plan conducteur.
3. Expliciter alors l'équation vérifiée par  $f(r)$ , en chercher des solutions sous la forme :

$$f(r) = r^t.$$

Après avoir justifié que :  $f(0) = 0$ , choisir la valeur convenable pour  $t$  et donner l'expression du potentiel (avec une constante arbitraire).

4. Donner les équations polaires des équipotentielles. Tracer quelques équipotentielles dans un plan perpendiculaire à l'axe  $Oz$  ; comment s'appellent ces courbes ?
5. Calculer les équations polaires des lignes de champ, en tracer quelques unes . Comment s'appellent ces courbes ?
6. Calculer  $\sigma_1(r)$  et  $\sigma_2(r)$  : densités surfaciques de charge sur chaque face du demi-plan conducteur,  $\sigma_1$  pour  $\theta = 0^+$  et  $\sigma_2$  pour  $\theta = 2\pi^-$  .

Le comportement de  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  pour  $r$  proche de 0 vous suggère-t-il quelques remarques, vous rappelle-t-il un phénomène électrostatique bien connu ?

## B DISQUE CONDUCTEUR.

Un disque conducteur mince, de rayon  $a$ , seul dans l'espace, porte la densité surfacique de charge :

$$\sigma(r) = (\sigma_1 + \sigma_2) = \frac{\gamma}{\sqrt{a^2 - r^2}} \quad (r : \text{distance au centre du disque}).$$

1. L'énoncé propose une expression explicite de la densité de charge portée par le conducteur. Cette expression est-elle a priori nécessaire ? Pourrait-on proposer pour  $\sigma$  une autre fonction de la variable  $r$  ?
2. Calculer la charge totale  $Q$  portée par le disque. Calculer le potentiel  $V_0$  au centre du disque.  
Application numérique : calculer  $\frac{Q}{V_0}$  pour  $a = 1$  m.
3. L'expression de  $\sigma(r)$  utilisée ici est-elle compatible avec les résultats obtenus à la question A.6 ?

### C DISQUE CHARGÉ.

On envisage un disque mince, de rayon  $a$ , non conducteur a priori, portant une densité surfacique de charge  $\sigma(r)$  ne dépendant que de la distance  $r$  au centre du disque.

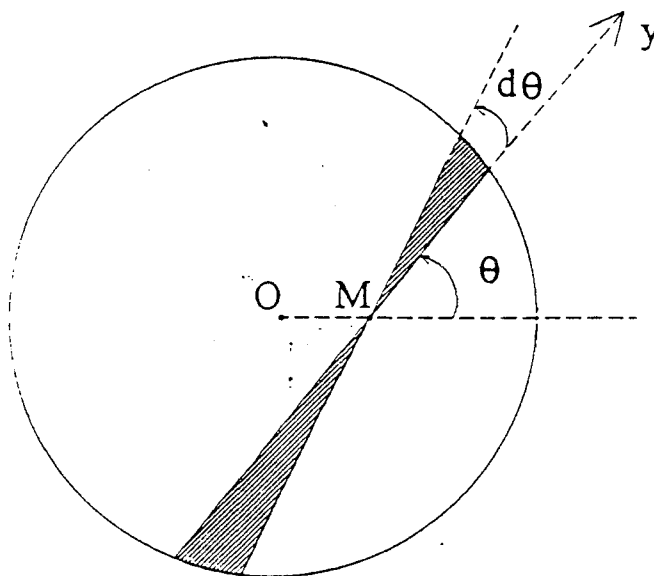
On définit à partir de  $\sigma(r)$  une fonction  $\lambda(x)$  par :

$$\lambda(x) = \int_{y=-\sqrt{a^2-x^2}}^{y=+\sqrt{a^2-x^2}} \sigma(\sqrt{x^2+y^2}) dy \quad (\text{pour : } -a \leq x \leq +a).$$

1. Donner une signification physique à la fonction  $\lambda(x)$ . Expliciter la charge totale  $Q$  du disque à l'aide d'une intégrale faisant intervenir la fonction  $\lambda(x)$ .
2. On cherche le potentiel créé par  $\sigma$  en un point  $M$  du disque situé à une distance  $r (= OM)$  du centre.  
Évaluer en premier lieu la contribution des charges de la zone hachurée de la figure ci-après, comprises entre  $\theta$  et  $\theta + d\theta$ . Montrer que cette contribution se met sous la forme :

$$dV' = C \lambda(r \sin \theta) d\theta \quad (\text{préciser la constante } C).$$

En déduire le potentiel  $V(r)$  à l'aide d'une intégrale faisant intervenir la fonction  $\lambda$ .



3. On suppose que le disque est conducteur, son potentiel valant  $V_0$ . Trouver la fonction  $\lambda$  correspondant à ce cas en admettant que la relation qui exprime  $V(r)$  à partir de la fonction  $\lambda$  garantit l'unicité de la fonction  $\lambda$  dès lors que  $V(r)$  est connue.  
En déduire la charge totale du disque en fonction de  $V_0$ .
4. Calculer la fonction  $\lambda$  associée à la densité surfacique  $\sigma(r) = \frac{\gamma}{\sqrt{a^2 - r^2}}$  proposée dans la partie B.  
Conclure quant à la validité de cette proposition.

# PHYSIQUE

Calculatrices autorisées.

## Gravitation, gravimétrie et géodésie spatiale

La connaissance du champ de pesanteur terrestre est fort utile dans de multiples domaines scientifiques. Sa variabilité spatiale nous renseigne sur la constitution interne de notre planète, sa variabilité temporelle sur les mouvements verticaux de la surface de la Terre. Les domaines d'application sont nombreux : de la prospection archéologique et minière, à l'étude des marées terrestres et l'orbitographie satellitaire. Après quelques généralités sur la gravitation (I), nous nous intéresserons, dans ce problème, à la notion de géoïde (II) puis à différentes méthodes de mesures : les unes permettent une détermination locale du champ de pesanteur (III), l'autre qui, grâce aux satellites artificiels, apporte une solution à la mesure globale du champ gravitationnel terrestre (IV).

Ces quatre parties sont assez largement indépendantes. Les vecteurs sont représentés en gras. Le gal représente l'unité utilisée en géodésie et en géophysique pour exprimer l'accélération de la pesanteur :  $1 \text{ gal} = 10^{-2} \text{ m.s}^{-2}$ .

Données numériques :	
Constante de gravitation universelle	$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$
Permittivité électrique du vide	$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$
Masse de la Terre	$M_T = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$
Rayon de la Terre	$R_T = 6,38 \cdot 10^3 \text{ km}$ (quand on supposera la Terre sphérique)

## Partie I - Attraction gravitationnelle et champ de pesanteur terrestre

### I.A - Le champ de gravitation terrestre

I.A.1) Exprimer la force électrostatique  $F_{1/2}^e$  exercée par une charge ponctuelle  $q_1$  sur une charge ponctuelle  $q_2$  et faire un schéma précisant clairement les notations utilisées. En déduire le champ électrostatique  $E$  créé par une charge ponctuelle  $q$ .

I.A.2) Énoncer le théorème de Gauss de l'électrostatique.

# Filière MP

I.A.3) Exprimer la force gravitationnelle  $F_{1/2}^g$  exercée par une masse ponctuelle  $m_1$  sur une masse ponctuelle  $m_2$ . En déduire le champ gravitationnel  $G$  créé par une masse ponctuelle  $m$ .

I.A.4) Dresser un tableau présentant les analogies entre les grandeurs électrostatiques et les grandeurs gravitationnelles. En déduire le théorème de Gauss pour le champ gravitationnel créé par une distribution de masses quelconques.

I.A.5) Application : dans un premier temps, on assimile la Terre à une sphère de centre  $O$ , de rayon  $R_T$  et de masse  $M_T$  uniformément répartie dans tout le volume.

a) Déterminer le champ gravitationnel terrestre  $G_T$  en tout point  $M$  de l'espace et représenter graphiquement  $\|G_T\|$  en fonction de  $r = OM$ .

b) Calculer  $G_0 = \|G_T\|$  à la surface de la Terre.

En réalité la masse  $M_T$  n'est pas uniformément répartie. Dans un modèle plus élaboré dans lequel on suppose la symétrie sphérique conservée, les variations de  $\|G_T\|$  sont représentées sur la figure 1 avec  $R_1 = 3,50 \cdot 10^3 \text{ km}$ .

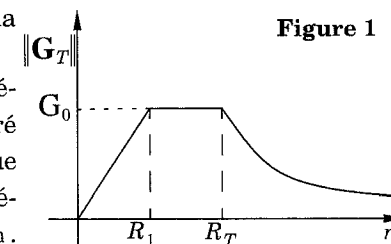


Figure 1

c) Justifier que le champ gravitationnel à la surface de la Terre n'est pas modifié.

d) Justifier que dans ce modèle, on considère le noyau terrestre ( $0 < r < R_1$ ) comme homogène. Calculer sa masse volumique moyenne.

e) Dans le manteau terrestre ( $R_1 < r < R_T$ ), la masse volumique est-elle supposée fonction croissante ou décroissante de  $r$ ? Justifier.

### I.B - Le champ de pesanteur terrestre

En première approximation, le poids  $mg$  d'un point matériel de masse  $m$  est la résultante de la force de gravitation exercée par la Terre et de la force d'inertie d'entraînement du référentiel terrestre par rapport au référentiel géocentrique.

I.B.1) Définir un référentiel galiléen. Définir les référentiels géocentrique et terrestre.

PHYSIQUE

où  $g_B$  est en milligal,  $h$  en mètre et  $\mu$  en  $\text{kg} \cdot \text{dm}^{-3}$ . Vérifier l'adéquation numérique aux questions précédentes.

d) Le gravimètre balistique permet de déterminer la valeur de  $g_0$  avec une précision relative de  $10^{-9}$ . En utilisant la correction à l'air libre, à quelle élévation  $l$  correspond cette variation relative ?

e) Comment doit-on choisir  $d$  par rapport à  $l$  pour que l'hypothèse  $g$  uniforme soit satisfaite pour l'expérience ?

**Partie IV - Mesure du champ de gravitation terrestre et de ses variations globales : l'accéléromètre SUPERSTAR**

Il s'agit d'un accéléromètre électrostatique de grande précision (plage de mesure variant entre  $10^{-6} \cdot g$  et quelques  $10^{-8} \cdot g$ ) utilisé dans le domaine spatial et développé par l'ONERA. Trois de ces accéléromètres sont actuellement en orbite dans des satellites ayant pour mission d'améliorer la connaissance du géoïde terrestre et notamment ses variations saisonnières. Le principe en est le suivant : une masse d'épreuve est maintenue en lévitation par des forces électrostatiques produites par des électrodes. On mesure la force nécessaire au maintien de la position de cette masse au centre de l'accéléromètre (lui-même placé au centre d'inertie du satellite) ; on connaît alors l'accélération du satellite et par mesure combinée de positionnement de celui-ci, on accède au champ de gravitation terrestre.

**IV.A - Obtention de la lévitation électrostatique**

IV.A.1) Nous modélisons un condensateur plan par deux plans conducteurs, parallèles, de surface  $S$ , distants de  $e$  (faible devant les dimensions caractéristiques de chaque plan), placés dans le vide et soumis à la différence de potentiel  $U$ .

a) Exprimer la densité volumique d'énergie électrostatique dans le condensateur en fonction de  $U$ ,  $e$  et  $\epsilon_0$ .

b) Exprimer l'énergie totale du condensateur. En déduire l'expression de sa capacité.

c) Application numérique : on donne  $S = 16 \text{ cm}^2$  et  $e = 60 \mu\text{m}$ . Calculer la capacité.

IV.A.2) Un condensateur plan est soumis à une d.d.p. constante  $U$  (figure 8). On admettra que cha-

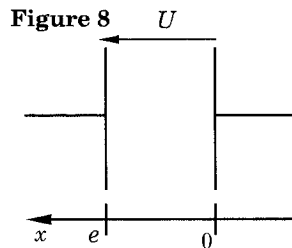


Figure 8

PHYSIQUE

que armature de surface  $S$  subit une force électrostatique dirigée vers l'espace inter-armatures et de norme

$$\frac{\sigma^2 S}{2\epsilon_0}$$

(où  $\sigma$  représente la densité surfacique de charge de l'armature chargée positivement). Donner les expressions vectorielles de ces forces en fonction de  $U$ ,  $S$ ,  $e$  et  $\epsilon_0$ .

IV.A.3) Mise en pratique dans l'accéléromètre : la masse d'épreuve est un parallélépipède en alliage de titane, de dimension  $4 \times 4 \times 1(\text{cm})$ , de masse  $m = 72 \text{ g}$  et portée à un potentiel  $V_p$ . La suspension électrostatique est réalisée par l'intermédiaire de 6 canaux de commande (pour les 6 degrés de liberté de la masse) et d'asservissement agissant séparément selon les 3 axes de l'accéléromètre.

On constitue des paires d'électrodes, formant autant de condensateurs, en plaçant vis-à-vis des faces de la masse d'épreuve des plaques portées à des potentiels différents. Nous allons nous intéresser dans toute la suite de cette partie au contrôle et à la mesure de l'accélération selon une seule direction (figure 9).

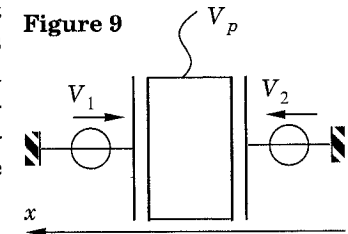


Figure 9

a) En supposant la géométrie du système parfaitement symétrique, en appelant  $S$  la surface des électrodes en regard et  $e$  la distance qui les sépare, exprimer la résultante des forces électrostatiques  $F_{\text{esx}}$  s'exerçant sur la masse d'épreuve et colinéaires à l'axe  $x$ .

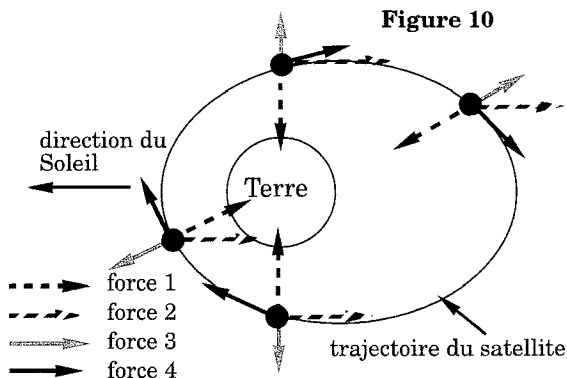
b) Dans le cas où  $V_2 = -V_1 = V$ , donner l'expression simplifiée de  $F_{\text{esx}}$  en fonction de  $V$ ,  $V_p$ ,  $S$ ,  $e$  et  $\epsilon_0$ .

**IV.B - Accéléromètre et mesure de forces de surface**

En dehors de toute phase de poussée, le satellite est soumis, en plus de la force de gravitation terrestre, à des forces dites de surface qui comportent principalement : la force de traînée aérodynamique, la pression de radiation solaire et la pression de radiation terrestre (due à l'albédo).

IV.B.1) Rappeler l'origine des deux dernières forces.

IV.B.2) Ces quatre forces sont représentées figure 10 (l'échelle de leurs intensités n'est pas respectée) pour différentes positions du satellite sur sa trajectoire. Identifier ces forces en vous justifiant.



On cherche à déterminer les tensions de type  $V$  à appliquer aux électrodes pour maintenir la masse d'épreuve immobile par rapport à l'accéléromètre. On rappelle que celui-ci est placé au centre d'inertie du satellite.

IV.B.3) En appelant respectivement  $a_S$  et  $G_T$  l'accélération du satellite dans le référentiel géocentrique (supposé galiléen) et le champ de gravitation terrestre, exprimer la condition d'équilibre de la masse d'épreuve dans le référentiel lié au satellite.

IV.B.4) En appelant respectivement  $a_{Sx}$  et  $G_{Tx}$  les projections des grandeurs précédentes selon l'axe  $x$ , déterminer la tension  $V$  (appelée tension de suspension) à appliquer sur les électrodes placées selon cette direction, pour maintenir la masse d'épreuve à l'équilibre.

Le suivi de la position du satellite par le GPS (Global Positioning System) permet de déterminer  $a_{Sx}$  et donc de remonter à l'information  $G_{Tx}$ . Au cours de son mouvement, le satellite subit des forces variables. La masse d'épreuve aurait donc tendance à s'écartier de sa position d'équilibre. L'objectif des 6 boucles d'asservissement est de déterminer à chaque instant les tensions à appliquer sur les différents jeux d'électrodes pour maintenir l'équilibre de la masse d'épreuve.

### IV.C - Contrôle en position de la masse d'épreuve

Le détecteur de position utilisé dans le dispositif de contrôle est un détecteur capacitif.

On superpose au signal  $V_p$  utilisé précédemment et appliqué à la masse d'épreuve, une tension sinusoïdale  $V_d = V_{d0} \cos \omega t$ . Les condensateurs (formés par la masse d'épreuve et les électrodes qui leur font face) de capacité  $C_1$  et  $C_2$  forment un pont grâce à un transformateur différentiel. Après démodulation synchrone, la sortie analogique est proportionnelle au déplacement  $x$  de la masse (voir figure 11). L'amplificateur opérationnel est considéré comme idéal.

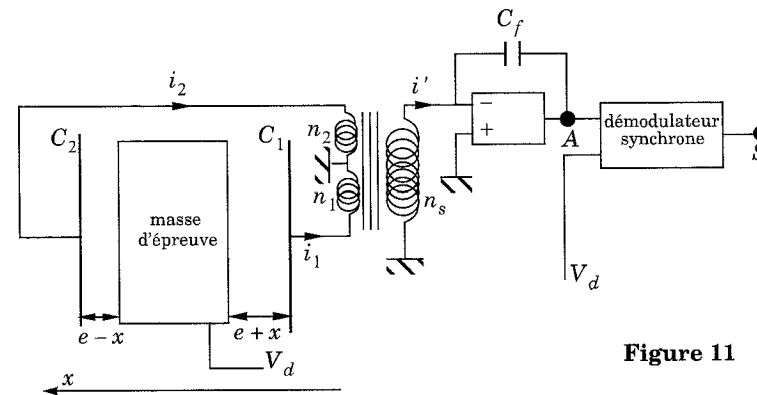


Figure 11

IV.C.1) Exprimer  $\Delta C = C_2 - C_1$  pour un déplacement  $x$  de la masse d'épreuve. À quelle condition sur  $x$  la relation reliant  $\Delta C$  à  $x$  est-elle linéaire ? Quelle est cette relation ? Cette condition sera supposée réalisée par la suite.

IV.C.2) On admettra que le circuit secondaire du transformateur différentiel se comporte comme une source de courant délivrant le courant  $i' = i_2 - i_1$ . Exprimer alors  $V_A$  en fonction de  $\Delta C$ ,  $C_f$  et  $V_d$  (on négligera les impédances des bobinages face à celle des condensateurs et on ne s'intéressera qu'à la partie variable de  $V_A$ ).

IV.C.3) Le démodulateur synchrone est composé d'un multiplieur analogique et d'un filtre passe-bas (figures 12 et 13).

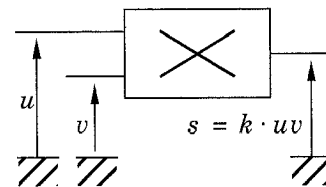


Figure 12 : multiplieur

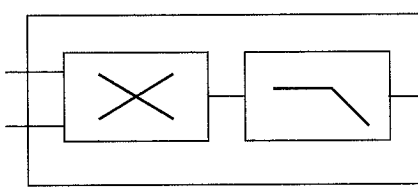


Figure 13 : démodulateur synchrone

Donner l'expression du signal  $s(t)$  en sortie du multiplieur.

À quelle condition sur la pulsation de coupure (notée  $\omega_{PB}$ ) du filtre passe-bas,  $V_S$  est-il un signal continu ? Exprimer dans ce cas  $V_S$  en fonction de  $\Delta C$ ,  $C_f$ ,  $V_{d0}$  et  $k$ .

IV.C.4) Finalement on obtient une relation du type :  $V_S = -\beta x$  avec  $\beta > 0$ . Donner l'expression de  $\beta$  en fonction de  $k$ ,  $S$ ,  $C_f$ ,  $e$ ,  $\epsilon_0$  et  $V_{d0}$ .

... FIN ...