MP 08/09 – Corrigé du D.S. de PHYSIQUE n°5

Partie I

1) a) $\boxed{\mathrm{div}\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\ ,\ \mathrm{div}\,\vec{B} = 0\ ,\ \vec{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\ ,\ \vec{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}}$

b) $\underline{\mathrm{div}\,\vec{B} = 0}$ $\Rightarrow$ il existe $\vec{A}$ tel que $\underline{\vec{B} = \vec{\mathrm{rot}}\,\vec{A}}$

$\underline{\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{E} + \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \vec{0}}$ $\Leftrightarrow$ $\vec{\mathrm{rot}}\left(\vec{E} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = \vec{0}$

$\Rightarrow$ il existe V tel que $\underline{\vec{E} = -\vec{\mathrm{grad}}\,V - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}}$

c) Pour calculer $\vec{\mathrm{rot}}\left(\frac{1}{2}\vec{B}\wedge\vec{r}\right)$ prenons un repère Oxyz tel que $\vec{B} = B\vec{u}_z$. Alors :

$$\frac{1}{2}\vec{B}\wedge\vec{r} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix}0\\0\\B\end{vmatrix}\wedge\begin{vmatrix}x\\y\\z\end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix}-By\\Bx\\0\end{vmatrix}$$

et $$\vec{\mathrm{rot}}\left(\frac{1}{2}\vec{B}\wedge\vec{r}\right) = \begin{vmatrix}\partial/\partial x\\\partial/\partial y\\\partial/\partial z\end{vmatrix}\wedge\begin{vmatrix}-\frac{1}{2}By\\\frac{1}{2}Bx\\0\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}0\\0\\\frac{1}{2}B-\left(-\frac{1}{2}B\right)\end{vmatrix} = \vec{B}$$

Donc $\underline{\frac{1}{2}\vec{B}\wedge\vec{r}\text{ est un potentiel vecteur possible}}$

d) $\underline{\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \vec{0}}$ car c'est un champ uniforme

$$\underline{\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{r}} = \begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\\frac{\partial}{\partial y}\\\frac{\partial}{\partial z}\end{vmatrix}\wedge\begin{vmatrix}x\\y\\z\end{vmatrix} = \underline{\vec{0}}$$

donc $\underline{\mathrm{div}\,\vec{A}} = \mathrm{div}\left(\frac{1}{2}\vec{B}\wedge\vec{r}\right) = \frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{r} - \frac{1}{2}\vec{r}\cdot\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \underline{0}$

2) a) * $\underline{(M, \vec{u}_\rho, \vec{u}_z)\text{ est plan de symétrie}}$ donc :

$\vec{B}(M) \parallel \vec{u}_\theta$ car $\vec{B}$ est un pseudo-vecteur

$\vec{A}(M) \perp \vec{u}_\theta$ car $\vec{A}$ est un vrai vecteur

②

* $(M, \vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$ est plan d'antisymétrie donc :

$$\vec{B}(M) \perp \vec{u}_z \quad \text{et} \quad \vec{A}(M) \,//\, \vec{u}_z$$

Conclusion pour les symétries : $\vec{B}(M) = B(\rho,\theta,z)\,\vec{u}_\theta$

$\vec{A}(M) = A(\rho,\theta,z)\,\vec{u}_z$

* Invariance par translation // à Oz et par rotation autour de Oz donc $B(\rho,\theta,z)$ et $A(\rho,\theta,z)$ ne dépendent ni de z, ni de θ.

Conclusion : $\boxed{\vec{B}(M) = B(\rho)\,\vec{u}_\theta \quad \text{et} \quad \vec{A}(M) = A(\rho)\,\vec{u}_z}$

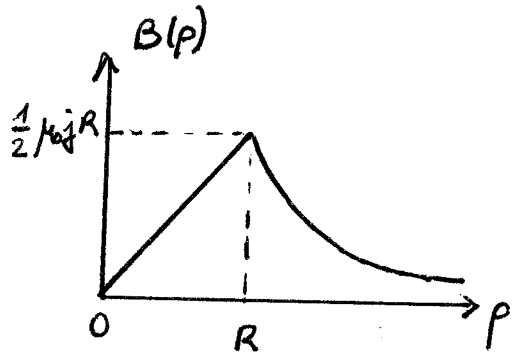
b) Théorème d'Ampère pour un cercle d'axe Oz, de rayon ρ quelconque orienté dans le sens direct autour de Oz :

$$2\pi\rho\, B(\rho) = \mu_0\, I_{enlacé}$$

avec $I_{enlacé} = \begin{cases} \pi\rho^2 j & \text{si } \rho < R \\ \pi R^2 j & \text{si } \rho > R \end{cases}$

Donc :

$$B(\rho) = \begin{cases} \frac{1}{2}\mu_0 j \rho & \text{si } \rho < R \\ \frac{1}{2}\mu_0 j \frac{R^2}{\rho} & \text{si } \rho > R \end{cases}$$



c) On a $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} = \vec{B}$ soit, d'après la formule du rotationnel en cylindriques :

$$-\frac{dA(\rho)}{d\rho}\,\vec{u}_\theta = B(\rho)\,\vec{u}_\theta$$

D'où

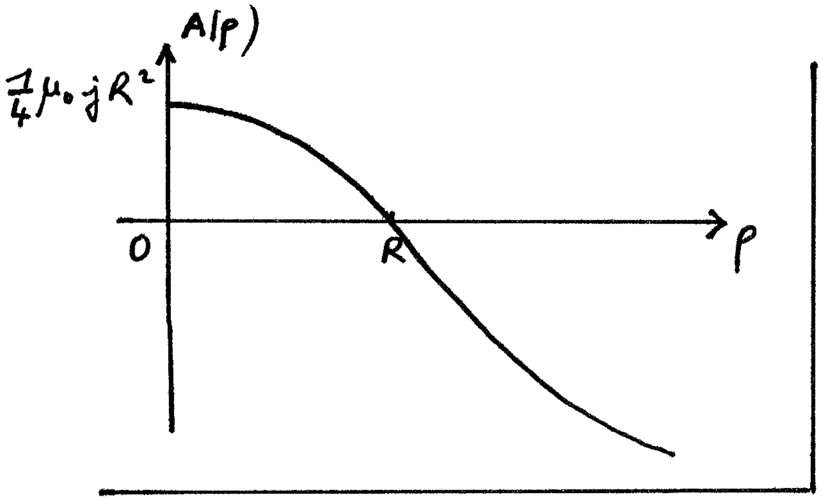
$$A(\rho) = \begin{cases} -\frac{1}{4}\mu_0 j \rho^2 + C & \text{si } \rho < R \\ -\frac{1}{2}\mu_0 j R^2 \ln\rho + C' & \text{si } \rho > R \end{cases}$$

$A(\rho)$ est <u>continue</u> et $A(R) = 0$ donc : $C = \frac{1}{4}\mu_0 j R^2$

$C' = \frac{1}{2}\mu_0 j R^2 \ln R$

Finalement :

$$\boxed{A(\rho) = \begin{cases} \frac{1}{4}\mu_0 j\,(R^2-\rho^2) & \text{si } \rho < R \\ -\frac{1}{2}\mu_0 j R^2 \ln\frac{\rho}{R} & \text{si } \rho > R \end{cases}}$$



NB : $A(\rho)$ est $\mathcal{C}^1$ et a un point d'inflexion en $\rho = R$ correspondant au maximum de $B(\rho)$

d) <u>Non, car $\vec{B}$ n'est pas uniforme</u>

3) a) Théorème d'Ampère pour le contour $TT'U'U$? Il faut d'abord étudier la symétrie.

- Pour tout point M, <u>$(M, \vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$ est plan de symétrie</u> donc $\vec{B}(M)$ (pseudo-vecteur) est // à $\vec{u}_z$
- Il y a invariance par rotation autour de Oz et par translation selon Oz donc $\vec{B}(M).\vec{u}_z$ ne dépend ni de θ, ni de z.

Conclusion : $\underline{\vec{B}(M) = B(\rho)\,\vec{u}_z}$

Le théorème d'Ampère pour $TT'U'U$ s'écrit :

$$\ell B(\rho) + 0 + 0 + 0 = \mu_0 I_{enlacé} = \mu_0 (n\ell) I$$

donc $B(\rho) = \mu_0 n I$ (indépendant de $\rho < R$), soit :

$$\boxed{\vec{B}_{int} = \mu_0 n I\,\vec{u}_z}$$

b) $\forall M$, <u>$(M, \vec{u}_\rho, \vec{u}_z)$ est plan d'antisymétrie</u> donc $\vec{A}(M) // \vec{u}_\theta$

D'après les invariances : $\underline{\vec{A}(M) = A(\rho)\,\vec{u}_\theta}$.

1ère méthode : d'après le formulaire

$$\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{A} = \vec{B} \iff \frac{1}{\rho}\frac{d(\rho A(\rho))}{d\rho} = B(\rho)$$

Donc :

$$\frac{d}{d\rho}(\rho A(\rho)) = \begin{cases} \mu_0 n I \rho & \text{si } \rho < R \\ 0 & \text{si } \rho > R \end{cases}$$

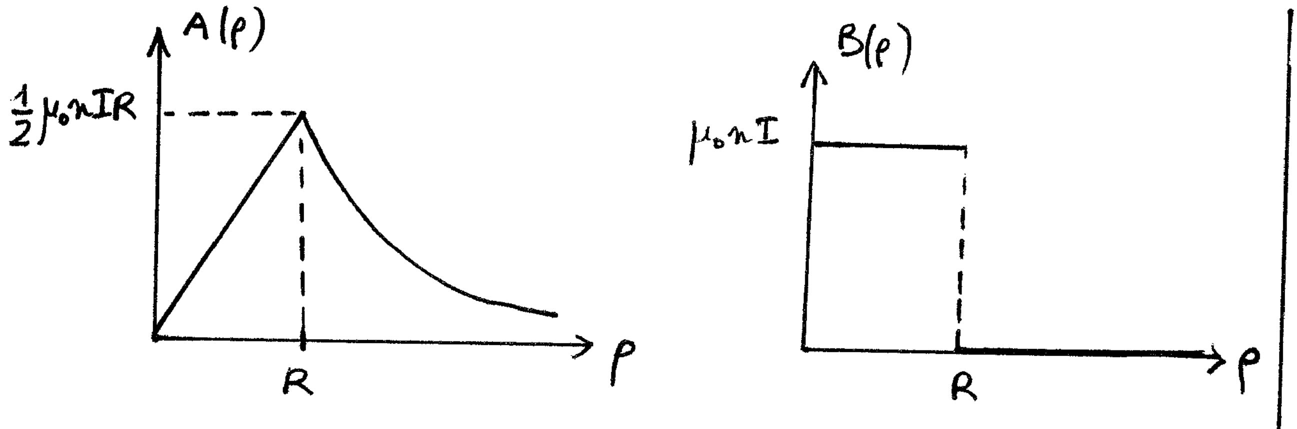
$$\Rightarrow \quad A(\rho) = \begin{cases} \frac{1}{2}\mu_0 n I \rho + \frac{C}{\rho} & \text{si } \rho < R \\ \frac{C'}{\rho} & \text{si } \rho > R \end{cases}$$

$A(\rho)$ définie en $\rho = 0$ donc $C = 0$, continue en $\rho = R$ donc $C' = \frac{1}{2}\mu_0 n I R^2$

Ainsi :

$$\boxed{A(\rho) = \begin{cases} \frac{1}{2}\mu_0 n I \rho & \text{si } \rho < R \\ \frac{1}{2}\mu_0 n I \frac{R^2}{\rho} & \text{si } \rho > R \end{cases}}$$

d)



2ème méthode (préconisée par l'énoncé) :

$$\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{A} = \vec{B} \iff \mathcal{C}_A(\Gamma) = \Phi_B(\mathcal{S})$$

On prend pour Γ un cercle d'axe Oz et rayon ρ orienté dans le sens direct autour de Oz. La relation s'écrit :

$$2\pi\rho\, A(\rho) = \begin{cases} \pi\rho^2 \times \mu_0 n I & \text{si } \rho < R \\ \pi R^2 \times \mu_0 n I & \text{si } \rho > R \end{cases}$$

D'où le même résultat.

c) Oui pour $\rho < R$ (champ uniforme), non pour $\rho > R$.

4) a) Pour $\rho < R$:

$$\boxed{\vec{B}_{int} = \mu_0 n\, i(t)\, \vec{u}_z}$$

$$\vec{E}_{int} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{0} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\mu_0 n\, i(t) \rho\, \vec{u}_\theta\right)$$

$$\boxed{= -\frac{1}{2}\mu_0 n \frac{di}{dt} \rho\, \vec{u}_\theta}$$, conforme à l'énoncé avec $\boxed{k = \mu_0 n}$

b) - $w_{m,int} = \frac{1}{2\mu_0} B_{int}^2$

$$= \boxed{\frac{k^2}{2\mu_0} i^2(t)} = \frac{1}{2}\mu_0 n^2 i^2(t)$$

- $W_m = w_{m,int} \times \pi R^2 L = \boxed{\frac{k^2}{2\mu_0}\pi R^2 L\, i^2(t)}$

car $w_{m,int}$ est uniforme

- $\vec{\Pi}_{int} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}_{int} \wedge \vec{B}_{int} = \frac{1}{\mu_0}\left(-\frac{1}{2}k\frac{di}{dt}\rho\,\vec{u}_\theta\right) \wedge \left(k\, i\, \vec{u}_z\right)$

$$\boxed{= -\frac{k^2}{2\mu_0}\, i \frac{di}{dt}\rho\, \vec{u}_\rho}$$

- $\Phi_\Pi = \iint_{\mathcal{C}\text{: cylindre de rayon } R \text{ et longueur } L} \vec{\Pi}_{int} \cdot d\vec{S} = \iint_{\mathcal{C}} -\frac{k^2}{2\mu_0} i \frac{di}{dt} R\, dS$

$$= -\frac{k^2}{2\mu_0} i \frac{di}{dt} R \times 2\pi R L$$

$$\boxed{= -\frac{k^2}{\mu_0} i \frac{di}{dt} \pi R^2 L}$$

c) $\boxed{\Phi_\Pi = -\frac{dW_m}{dt}}$ <u>L'énergie entrant dans le solenoïde par rayonnement y est stockée sous forme d'énergie magnétique.</u>

d) - $w_{el,int} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_{int}^2$

$$= \boxed{\frac{1}{8}k^2\varepsilon_0\left(\frac{di}{dt}\right)^2\rho^2}$$

- $W_{el,int} = \iiint_{solenoïde} w_{el,int}\, d\tau =$

$$= \int_{\rho=0}^{R}\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{z=-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \frac{1}{8}k^2\varepsilon_0\left(\frac{di}{dt}\right)^2\rho^2 \times d\rho\,\rho d\theta\, dz$$

$$= \frac{1}{8}k^2\varepsilon_0\left|\frac{di}{dt}\right|^2\left(\int_0^R \rho^3 d\rho\right) \times 2\pi \times L$$

$$= \boxed{\frac{\pi k^2\varepsilon_0}{16}\left(\frac{di}{dt}\right)^2 L R^4}$$

e) Il faut : $L \ll \frac{2\pi}{\omega} \times c$ soit $\boxed{\omega \ll \frac{2\pi c}{L}}$

f) $\langle W_m\rangle = \frac{k^2}{4\mu_0}\pi R^2 L\, I_0^2$, $\langle W_{el}\rangle = \frac{\pi k^2\varepsilon_0}{32}(I_0\omega)^2 L R^4$

car $\langle i^2(t)\rangle = \frac{1}{2}I_0^2$, $\left\langle\left(\frac{di}{dt}\right)^2\right\rangle = \frac{1}{2}(I_0\omega)^2$

$$\frac{\langle W_{el}\rangle}{\langle W_m\rangle} = \frac{1}{8}\varepsilon_0\mu_0\omega^2R^2 = \boxed{\frac{\omega^2R^2}{8c^2}}$$

<u>Ce rapport est $\ll 1$</u>, car il est $\ll \frac{\omega^2 L^2}{8c^2}$ lui même $\ll \frac{\pi^2}{2} \sim 1$

Partie 2

1) Les forces agissant sur la masse m dans le référentiel $\mathcal{R}$:

- son poids : $m g \vec{u}_z$
- l'action du ressort : $-k(\Delta l_{eq} + z)\vec{u}_z$ où Δl_{eq} est l'allongement du ressort à l'équilibre
- l'action de l'amortisseur : $-\mu \dfrac{dz}{dt}\vec{u}_z$
- la force d'inertie d'entraînement : $-m\vec{a} = ma\vec{u}_z$ car $\mathcal{R}$ est non galiléen

Le théorème de la résultante cinétique s'écrit, dans $\mathcal{R}$:

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = mg - k(\Delta l_{eq} + z) - \mu\frac{dz}{dt} + ma$$

Mais $z = 0$ est solution (équilibre) donc $k\Delta l_{eq} = mg$.

Il reste :

$$\boxed{m\frac{d^2z}{dt^2} + \mu\frac{dz}{dt} + kz = ma}$$

2) L'équation précédente s'écrit :

$$m(j\omega)^2\underline{z} + \mu(j\omega)\underline{z} + k\underline{z} = m\underline{a}$$

soit $$\underline{z} = \frac{m}{-m\omega^2 + j\mu\omega + k}\underline{a}$$

donc $$\boxed{\underline{H}(j\omega) = \frac{\frac{m}{k}}{1 + j\frac{\mu}{k}\omega - \frac{m\omega^2}{k}}}$$

qui est de la forme annoncée avec : $\boxed{H_0 = \dfrac{m}{k},\ \omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}} \text{ et } \xi = \dfrac{\mu}{2\sqrt{mk}}}$

AN : $\underline{H_0 = 2{,}49 \cdot 10^{-6}\ s^2}$, $\underline{\omega_0 = 634{,}1\ rad.s^{-1}}$, $\underline{\xi = 1{,}23}$

3) Posons $x = \dfrac{\omega}{\omega_0}$.

$$G(x) = |\underline{H}| = \frac{H_0}{\sqrt{(1-x^2)^2 + 4\xi^2 x^2}}$$

- $\dfrac{d}{dx}\left((1-x^2)^2 + 4\xi^2 x^2\right) = \dfrac{d}{dx}\left(1 + (4\xi^2 - 2)x^2 + x^4\right)$

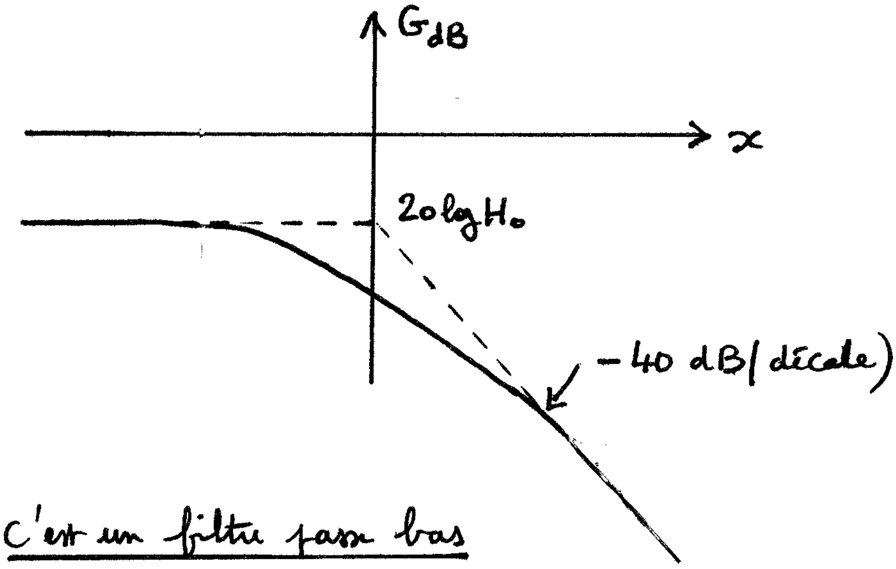
$= 2x\,\big(\underbrace{(4\xi^2-2)}_{>0} + 2x^2\big)$ ne s'annule jamais sauf en $x=0$

donc $\underline{G(x) \text{ est décroissante}}$.

- Si $x \ll 1$, $G(x) \approx H_0$ et $G_{dB} \approx 20 \log H_0$

Si $x \gg 1$, $G(x) \approx \dfrac{H_0}{x^2}$ et $G_{dB} \approx 20 \log H_0 - 40 \log x$

-



<u>C'est un filtre passe bas</u>

4) On veut $\underline{H}$ quasiment réel, ce qui est le cas pour $\underline{\omega \ll \omega_0}$

Alors $z \approx H_0 a$. (car $\underline{H} \approx H_0$).

5) $\boxed{C_0 = \varepsilon_0 \dfrac{S}{\delta} = 141 \text{ pF}}$

6) $\boxed{C_1 = \varepsilon_0 \dfrac{S}{\delta + z}}$, $\boxed{C_2 = \varepsilon_0 \dfrac{S}{\delta - z}}$

$$\Delta C = \varepsilon_0 S \left(\frac{1}{\delta - z} - \frac{1}{\delta + z}\right) = \boxed{\frac{2\varepsilon_0 S z}{\delta^2 - z^2}}$$

Pour $z \ll \delta$, $\Delta C \simeq \dfrac{2\varepsilon_0 S}{\delta^2} z$. $\boxed{\chi = \dfrac{2\varepsilon_0 S}{\delta^2} = 2{,}82.10^{-6}\ F.m^{-1}}$

7) $q = -C_1(v_1 - 0) - C_2(v_2 - 0)$

$\boxed{q = -(C_1 v_1 + C_2 v_2)}$

Si $v_2 = -v_1$ et si le déplacement z est faible :

$q = (C_2 - C_1) v_1 = \Delta C v_1 = \boxed{\chi v_1 z}$

8) $E_i = \dfrac{v_i}{\delta} \sim \dfrac{15\,V}{100.10^{-6}\,m} = \boxed{150.10^3\ V.m^{-1}}$

Le champ est environ $\frac{1}{20}$ du champ disruptif de l'air.

Si z reste faible, l'épaisseur $\delta - z$ (ou $\delta + z$) ne sera jamais assez faible pour que l'on dépasse le champ maximal.

9) $W_{e_i} = \frac{1}{2} C_i v_i^2 = \boxed{\frac{1}{2}\varepsilon_0 \dfrac{S}{\delta \pm z} v_i^2}$

$W_{el} = W_{e1} + W_{e2} = \boxed{\frac{1}{2}\varepsilon_0 S \left(\dfrac{v_1^2}{\delta + z} + \dfrac{v_2^2}{\delta - z}\right)}$

10) et 11) $\vec{F}_{el} = \dfrac{dW_{el}}{dz}\vec{u}_z$

$$= -\frac{1}{2}\varepsilon_0 S \left(\frac{v_1^2}{(\delta+z)^2} - \frac{v_2^2}{(\delta-z)^2}\right)\vec{u}_z$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 S}{\delta^2}\left(\frac{-v_1^2}{(1+\frac{z}{\delta})^2} + \frac{v_2^2}{(1-\frac{z}{\delta})^2}\right)\vec{u}_z$$

$$= \boxed{\frac{1}{2}\frac{C_0}{\delta}\left(-\frac{v_1^2}{(1+\frac{z}{\delta})^2} + \frac{v_2^2}{(1-\frac{z}{\delta})^2}\right)\vec{u}_z}$$

12) Si $z \ll \delta$, $\vec{F}_{el} \simeq \frac{1}{2}\dfrac{C_0 v_1^2}{\delta}\left(-1 + \dfrac{2z}{\delta} + 1 + \dfrac{2z}{\delta}\right)\vec{u}_z$

soit $\boxed{\vec{F}_{el} \approx 2\frac{C_0 v_1^2}{\delta} z \vec{u}_z}$

$$v_1^2 = U^2 \sin^2(\omega_1 t) = \underbrace{\frac{1}{2}U^2}_{\text{composante continue}} - \underbrace{\frac{1}{2}U^2\cos(2\omega_1 t)}_{\text{fréquence } 2f_1 = 20\,kHz}$$

13) $2f_1 \gg \frac{\omega_0}{2\pi} \simeq 100\,Hz$ donc la composante variable sera coupée par le filtre passe-bas.

Alors il reste : $\vec{F}_{el} \approx \frac{C_0 U^2}{\delta} z \vec{u}_z$

soit $\boxed{K_{el} = \frac{C_0 U^2}{\delta} = 3{,}2\ N.m^{-1}}$

14) Il faut remplacer k par $k - K_{el}$.

$$\boxed{\begin{aligned} H'_0 &= \frac{m}{k - K_{el}} = 3.10^{-6}\ s^2 \\ \omega'_0 &= \sqrt{\frac{k - K_{el}}{m}} = 607\ rad.s^{-1} \\ \text{et } \xi' &= \frac{\mu}{\sqrt{m(k-K_{el})}} = 1{,}3 \end{aligned}}$$

15) $z_{max} = 0{,}3\,\delta$

$\boxed{a_{max} = z_{max}/H'_0 = 11\ m.s^{-2}}$

Partie 3

1) $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,V = -E\,\vec{u}_z$, uniforme

$\Rightarrow V = Ez + C^{te}$. Ainsi : $U = V_{(z=L)} - V_{(z=0)} = EL$,

soit $\boxed{E = \dfrac{U}{L} = 3{,}0.10^4\ V.m^{-1}}$

2) $\boxed{\vec{F}_{EM} = (-e)\left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}\right)}$

3) On applique le principe fondamental de la dynamique à l'électron e_i :

$$m_e \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_{EM} - \mu\vec{v}$$

soit en projection :

$$\begin{cases} m_e \dfrac{dv_x}{dt} = -eBv_y - \mu v_x & (1) \\ m_e \dfrac{dv_y}{dt} = eBv_x - \mu v_y & (2) \\ m_e \dfrac{dv_z}{dt} = eE - \mu v_z & (3) \end{cases}$$

4) (3) a pour solution : $v_z(t) = \dfrac{eE}{\mu} + Ce^{-\frac{t}{\tau}}$

avec $\tau = \dfrac{m_e}{\mu}$

C.I. : $v_z(0) = \vec{v}_e \cdot \vec{u}_z$ donc

$$\boxed{v_z(t) = \left(\vec{v}_e \cdot \vec{u}_z - \frac{eE}{\mu}\right) e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{eE}{\mu}}$$

$$\boxed{v_{lim} = \frac{eE}{\mu} = 5{,}0.10^4\ m.s^{-1}}$$

Si $\vec{v}_e \cdot \vec{u}_z \ll v_{lim}$, $v_z(t) \simeq v_{lim}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$

La condition est : $\forall t > T, \quad e^{-\frac{t}{\tau}} < \frac{1}{100} \iff t > \tau \ln 100$

$$\boxed{T = \tau \ln(100) \approx 4{,}6\,\tau = 4{,}3 \cdot 10^{-1}\,s}$$

5) (1) + i(2) donne :

$$m_e \frac{du}{dt} = (ieB - \mu)u \iff \frac{du}{dt} = \left(-\frac{1}{\tau} + i\omega_e\right)u$$

La solution est :

$$u(t) = C \exp\left(\left(-\frac{1}{\tau} + i\omega_e\right)t\right) = Ce^{-\frac{t}{\tau}} e^{i\omega_e t}$$

La C.I. : $u(0) = \vec{v_e} \cdot \vec{u_x} = C$.

Il vient ainsi :

$$\underline{v_x(t)} = \mathrm{Re}\,(u(t)) = \boxed{\vec{v_e} \cdot \vec{u_x}\, e^{-\frac{t}{\tau}} \cos(\omega_e t)}$$

$$\underline{v_y(t)} = \mathrm{Im}\,(u(t)) = \boxed{\vec{v_e} \cdot \vec{u_x}\, e^{-\frac{t}{\tau}} \sin(\omega_e t)}$$

6) Pour $t > T$, $e^{-\frac{t}{\tau}} < \frac{1}{100}$, on peut donc dire que :

$$v_x \simeq 0, \quad v_y \simeq 0 \quad \text{et} \quad v_z \simeq v_{lim}$$

donc l'électron e_i a pratiquement un <u>mouvement rectiligne et uniforme pour $t > T$</u>

Alors : $\Delta t \approx \dfrac{L - z}{v_{lim}}$ soit $\boxed{z \approx L - v_{lim}\,\Delta t}$

La mesure de Δt permet de trouver la coordonnée z du lieu d'émission de e_i.

7) a) $\boxed{W' = eU' = 2{,}4 \cdot 10^{-16}\,J}$ (énergie apportée à un électron par la différence de potentiel U')

b) Nombre d'ionisations :

$$\boxed{N = \frac{1}{2} \frac{W'}{E_i} = \frac{1}{2} \frac{2{,}4 \cdot 10^{-16}}{1520 \cdot 10^{3}} \times \mathcal{N}_A \simeq 48}$$

8) a) <u>Symétries</u> :

$(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ et $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ sont plans de symétrie donc $\vec{E}_f(M)$, vrai vecteur, est $/\!/ \ \vec{u}_r$.

<u>Invariances</u> : par translation parallèlement à Oz et par rotation autour de Oz donc $\|\vec{E}_f(M)\|$ ne dépend ni de z ni de θ, de même que $V_f(M)$

Finalement :

$$\boxed{\vec{E}_f(M) = E_f(r)\,\vec{u}_r} \quad \text{et} \quad \boxed{V_f(M) = V_f(r)}$$

b) Théorème de Gauss pour un cylindre d'axe Oz, de rayon $r > a$ quelconque et hauteur h :

$$2\pi r h \times E_f(r) = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

soit
$$\boxed{E_f(r) = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 h r} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}} \quad (\text{pour } r > a)$$

De plus : $\vec{E}_f = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V_f = -\dfrac{dV_f}{dr}\,\vec{u}_r$ donc

$$\boxed{V_f(r) = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln r + C} \quad (\text{pour } r > a)$$

c) <u>Pour $r < a$</u>, on est dans le métal du fil donc :

$$\boxed{\vec{E}_f = \vec{0}} \quad \text{et} \quad \boxed{V_f(r) = C^{te} = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln R + C}$$

9) a) En utilisant le résultat du 8) et le <u>théorème de superposition</u> on trouve :

$$V(M) = -\frac{\lambda_+}{2\pi\varepsilon_0} \ln r_1 - \frac{\lambda_-}{2\pi\varepsilon_0} \ln r_2 + C$$

$$\boxed{V(M) = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 h} \ln \frac{r_2}{r_1}} + \cancel{C} = 0 \text{ d'après l'énoncé}$$

b) La différence de potentiel entre les deux fils est :

$$V_1 - V_2 = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 h}\left(\ln\left(\frac{d-a}{a}\right) - \ln\left(\frac{a}{d-a}\right)\right)$$

$$= \frac{q}{\pi\varepsilon_0 h}\ln\left(\frac{d-a}{a}\right)$$

d'où la capacité :

$$\boxed{C = \frac{q}{V_1 - V_2} = \frac{\pi\varepsilon_0 h}{\ln\left(\frac{d-a}{a}\right)} = 0{,}40.10^{-13}\,F}$$

10) . $\boxed{q_0 = CW = 4{,}0.10^{-14}\,C}$

. Charge des e^- de l'avalange : $10^5 \times 48 \times (e) = -1{,}6.10^{-14}\,C$

$$\boxed{q_1 = 4{,}0.10^{-14} - 1{,}6.10^{-14} = 2{,}4.10^{-14}\,C}$$

11) $U_R = Ri = R\frac{dq}{dt} = R\frac{d}{dt}\left(C(W - U_R)\right) = -RC\frac{dU_R}{dt}$

$U_R + RC\frac{dU_R}{dt} = 0$ donc $U_R(t) = U_R(0)\,e^{-\frac{t}{RC}}$

A $t = 0$, $q = q_1$, $U_R(0) = W - \frac{q_1}{C} = \frac{q_0 - q_1}{C}$

Finalement : $\boxed{U_R(t) = \frac{q_0 - q_1}{C}\exp\left(-\frac{t}{RC}\right)}$

12) 1 seul électron n'est pas suffisant pour que q_1 soit notablement différent de q.

Lorsque e_i arrive au voisinage de la grille il déclenche une avalanche sur 1 fil horizontal et 1 fil vertical. En déterminant ces fils, on peut donner les coordonnées x et y de ce point.