MP 08/09 – D.S. de PHYSIQUE-CHIMIE n°4 – 04/12/09 (3 heures)

Exercice 1 (extrait Mines-Ponts MP 2008)

Une sphère homogène, de centre C, de rayon r et de masse m, est mobile dans un plan vertical en restant en contact avec un rail PP', de masse M, que l'on modélise par une portion de cercle de centre O et de rayon R, dont l'axe de symétrie est vertical.

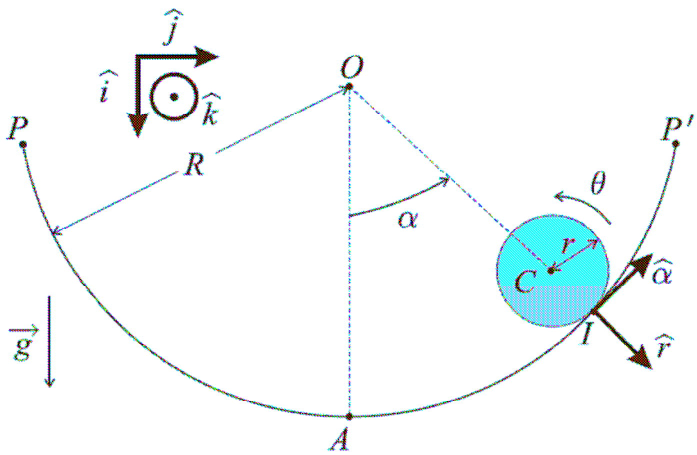


Figure 1 : Sphère mobile sur un rail fixe

Le moment d'inertie de la sphère par rapport à un axe passant par C est $J = 2mr^2/5$. Le référentiel fixe orthonormé direct $R_g = \left(O, \widehat{i}, \widehat{j}, \widehat{k}\right)$ où $\widehat{i}$ est vertical dirigé vers le bas est supposé galiléen (voir Figure 1). On pourra également utiliser les vecteurs mobiles polaires unitaires $\widehat{r}$ et $\widehat{\alpha}$ représentés sur la Figure 1. Le mouvement de la sphère est repéré par deux paramètres : l'angle α que fait $\overrightarrow{OC}$ avec $\widehat{i}$ et l'angle de rotation θ autour de l'axe horizontal qui porte $\widehat{k}$. À chaque instant t, on appelle I le point de contact de la sphère avec le rail. On note A le point du rail situé sur son axe de symétrie. L'accélération de la pesanteur est $\vec{g} = g\widehat{i}$.

La sphère roule sans glisser sur le rail fixe. Initialement, elle est au repos et $\overrightarrow{OC}$ fait un angle α_o avec $\widehat{i}$. Le système comprend deux degrés de liberté cinématiques, α et θ.

❑ **1** — Écrire la condition de roulement sans glissement de la sphère sur le rail sous la forme d'une relation linéaire liant r, R, $\dot{\theta} = d\theta/dt$ et $\dot{\alpha} = d\alpha/dt$. Contrôler la pertinence de la relation obtenue, d'une part en comparant les signes respectifs de $\dot{\theta}$ et de $\dot{\alpha}$, et d'autre part en analysant la situation lorsque $r = R$.

❑ **2** — Déterminer l'expression de l'énergie mécanique totale E_t du système. En déduire l'équation différentielle vérifiée par la fonction $\alpha(t)$.

❑ **3** — Déterminer la période T_{po} des petites oscillations.

On considère deux rails circulaires de même rayon R. Sur chaque rail, on place à l'instant initial une sphère de rayon r, de masse m en des points repérés par le même angle α_o (situation déjà représentée sur la Figure 1). Les sphères sont lâchées au même instant, avec une vitesse initiale nulle. Les deux rails sont de nature différente, de sorte que la première sphère roule sans glisser et que la seconde glisse sans rouler.

❑ **4** — En utilisant des arguments énergétiques qualitatifs, déterminer quelle est la sphère qui arrive la première au point le plus bas A. Le résultat est-il modifié si les masses des sphères sont différentes ?

❑ **5** — Établir une expression intégrale du temps τ mis par la sphère la plus rapide pour atteindre le point A. Comment peut-on, sans calcul supplémentaire, obtenir le temps τ' mis par la sphère la plus lente pour atteindre ce point ? Déterminer le rapport τ'/τ.

Exercice 2 (Extrait Concours National DEUG 2003)

On considère, dans le vide, le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ créé, au point M, par une répartition de charges à symétrie sphérique de centre O. On pose $\overrightarrow{OM} = r\,\vec{e}_r$.

Ce champ est radial et ne dépend que de r : $\vec{E}(M) = E(r)\vec{e}_r$. La valeur algébrique $E(r)$ est définie par :

$$E(r) = k/2\varepsilon_o \qquad \text{pour} \quad r \in [\,0, R\,]\,;$$
$$E(r) = k\,R^2/2\varepsilon_o\,r^2 \qquad \text{pour} \quad r \in [\,R, +\infty\,[\,;$$

k et R sont des constantes positives et ε_0 la permittivité du vide.

Compte tenu des considérations de symétrie, l'opérateur scalaire $div\ \vec{E}$ s'écrit ici sous la forme simplifiée :

$$div\,\vec{E} = \frac{1}{r^2}\,\frac{d\left[r^2E(r)\right]}{dr}$$

A- Potentiel électrostatique.

On pose, par convention, $\lim V_{(r\to\infty)} = 0$.

1) Déterminer le potentiel $V(r)$ de cette distribution de charges, pour les valeurs suivantes de r :

1.1. $r \in [\,R, +\infty\,[$;
1.2. $r \in [\,0, R]$.

2) Tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction $V(r)$.

B- Charge volumique $\rho(r)$.

1) Déterminer la charge volumique $\rho(r)$ de cette distribution de charges, pour les valeurs suivantes de r :

1.1. $r \in [\,0, R]$;
1.2. $r \in [\,R, +\infty\,[$.

2) Tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction $\rho(r)$.

C- Charge totale q_0.

1) Exprimer la charge d'une couche sphérique élémentaire, de centre O et comprise entre les sphères de rayon r et $r+dr$.

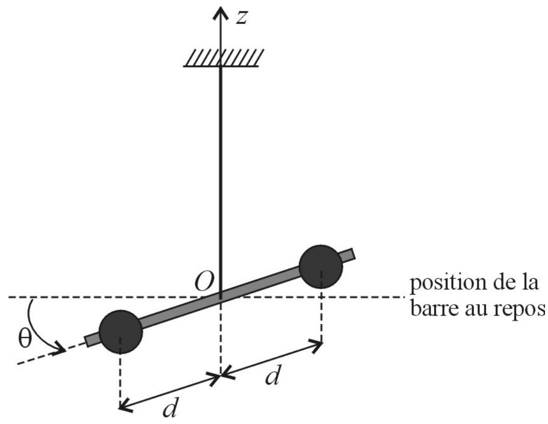
2) En déduire, en fonction de k et de R, la charge totale q_o de cette répartition de charges à symétrie sphérique.

3) Montrer que pour $r > R$, cette distribution volumique est équivalente, d'un point de vue électrostatique, à une charge électrique ponctuelle q_o placée au point O.

4) Retrouver l'expression de q_0 en appliquant le théorème de Gauss à une sphère de rayon $r > R$ quelconque.

Problème

A- Pendule de torsion



Un pendule de torsion est constitué par une barre horizontale suspendue en son centre O à l'extrémité inférieure d'un fil métallique dont l'extrémité supérieure est reliée à un support fixe. La barre peut donc tourner autour de l'axe Oz matérialisé par le fil. Cet axe vertical est orienté vers le haut.
Le fil exerce sur la barre une action mécanique de rappel dont le moment par rapport à Oz est $-C\theta$ où θ est l'angle de torsion et C la constante de raideur du fil.
La barre a un moment d'inertie J_0 par rapport à l'axe Oz. On lui ajoute deux surcharges identiques, de masse m chacune, que l'on place symétriquement par rapport à O. La distance entre les centres d'inertie des surcharges et O qui peut être modifiée est notée d. Le moment d'inertie par rapport à l'axe Oz de l'ensemble « barre + surcharges » est noté J.
Le système étant au repos (le fil ayant donc une torsion nulle) on fait tourner l'ensemble « barre + surcharges » d'un angle θ_0 autour de Oz puis on le lâche sans vitesse initiale.
Le mouvement est repéré par l'angle $\theta(t)$ entre la direction de la barre au repos et à l'instant t.

A.1) Exprimer l'énergie mécanique du système « barre + surcharges » en fonction de C, J, θ et $\dot{\theta} = d\theta/dt$.

A.2) On fait l'hypothèse qu'il n'y a aucun frottement. Donner dans ce cas la loi horaire $\theta(t)$ du mouvement de la barre et exprimer la période T_0 de son mouvement en fonction de C et J.

A.3) On fait l'hypothèse que l'action mécanique des frottements a une puissance $\mathcal{P}_{\text{frott}} = -\alpha\dot{\theta}^2$ où α est une constante positive.

a) Quelle est l'origine physique de ces frottements ?
b) Donner dans ce cas l'équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$.
c) Les oscillations sont très faiblement amorties. Exprimer la pseudo-période T du mouvement en fonction de T_0 et $\lambda = \dfrac{\alpha}{2\sqrt{JC}}$.
d) A quelle condition sur λ l'erreur relative introduite par l'approximation $T \approx T_0$ est-elle inférieure à 1% ? Cette approximation sera adoptée dans la suite.

A.4) Le raisonnement qui suit a pour but d'établir la relation entre J et d. Le système « barre + surcharges » est supposé en rotation autour de Oz avec la loi horaire $\theta(t)$. On considère l'une des deux surcharges ; soit J_1 son moment d'inertie par rapport à l'axe vertical passant par son centre d'inertie.

a) Quel est le vecteur rotation de la surcharge par rapport à son référentiel barycentrique ?
b) Exprimer son énergie cinétique barycentrique.
c) En déduire son énergie cinétique par rapport au référentiel du laboratoire.
d) Montrer que : $J = J_0 + 2J_1 + 2md^2$.

A.5) On mesure la période des oscillations pour différentes valeurs de la distance d. Les résultats sont rassemblés dans le tableau ci-dessous :

d	$10{,}0\,\text{cm}$	$15{,}0\,\text{cm}$	$18{,}0\,\text{cm}$
T_0	$10{,}8\,\text{s}$	$13{,}3\,\text{s}$	$15{,}1\,\text{s}$

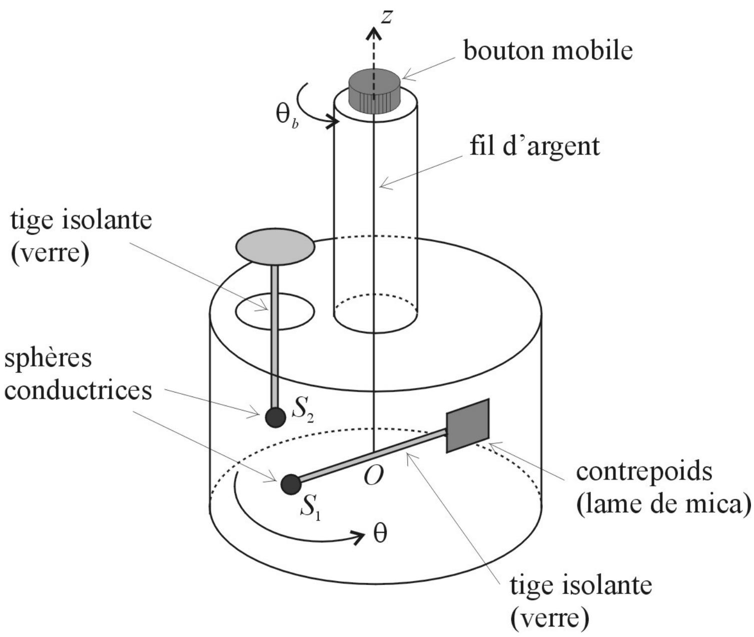
a) Trouver la valeur de C sachant que $m = 50\text{g}$.

b) La constante de raideur est données par $C = \mu \dfrac{\pi\delta^4}{32\ell}$ où μ est une caractéristique du matériau constituant le fil, δ son diamètre et ℓ sa longueur. Sachant que le fil est en argent, que $\ell = 0{,}5\,\text{m}$ et $\delta = 0{,}5\,\text{mm}$, calculer μ pour l'argent. Préciser l'unité SI de μ.

B- Balance de Coulomb

Donnée : permittivité du vide : $\varepsilon_0 = 8{,}85.10^{-12}$ S.I.

La balance de Coulomb est le dispositif expérimental qui permit à Coulomb d'établir la loi de variation de la force électrostatique entre deux charges en fonction de leur distance.

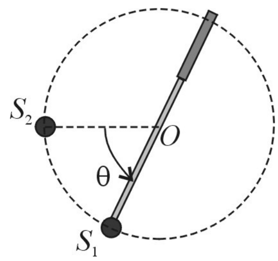


Elle comprend une tige de verre suspendue à un fil d'argent très fin, constituant un pendule de torsion. La tige porte à l'une de ses extrémités une petite sphère métallique S_1 et à l'autre une lame de mica faisant contrepoids (de sorte que le centre d'inertie de l'ensemble « tige + S_1 + contrepoids » est au point de fixation O du fil sur la tige). L'ensemble est placé dans un cylindre de verre pour être protégé des courants d'air.

Une bande de papier graduée (non représentée sur la figure) permet de repérer la position angulaire θ de la tige. L'extrémité supérieure du fil est liée à un bouton mobile, pouvant tourner autour de l'axe Oz et dont la position est repérée par l'angle θ_b. θ et θ_b sont comptés positivement dans le sens direct autour de Oz.

1ère phase de l'expérience de Coulomb : Le système est initialement au repos : $\theta = \theta_b = 0$ et la torsion du fil est nulle. On introduit alors une deuxième sphère conductrice S_2 qui a été au préalable chargée électriquement ; S_2 entre en contact avec S_1 et lui cède une partie de sa charge électrique. Dès lors S_1 porte une charge du même signe que S_2 et elle est repoussée par celle-ci, ce qui provoque la mise en rotation du pendule. Celui-ci oscille puis se stabilise à une position d'équilibre $\theta = \theta_1$.

B.1) On assimile S_1 et S_2 à des charges ponctuelles, de même valeur q ; de plus on considère que S_2 occupe la position qui est celle de S_1 lorsque $\theta = 0$ (figure ci-contre, vue de dessus).



a) Exprimer l'énergie potentielle d'interaction électrostatique entre les deux sphères en fonction de q, $a = OS_1$ et θ.

b) Exprimer l'énergie potentielle du fil de torsion en fonction de θ et C constante de raideur du fil d'argent. On rappelle que $\theta_b = 0$ dans cette phase de l'expérience.

c) En déduire une équation donnant la position d'équilibre θ_1. On ne cherchera pas à résoudre cette équation. Cet équilibre est-il stable ?

d) Exprimer la force électrostatique exercée par S_1 sur S_2. La représenter sur un schéma et calculer son moment par rapport Oz. Retrouver l'équation donnant θ_1.

e) *Application numérique :* $\theta_1 = 36°$, $C \sim 10^{-4}$ SI, $a = 12\,\text{cm}$. Quel est l'ordre de grandeur de q ?

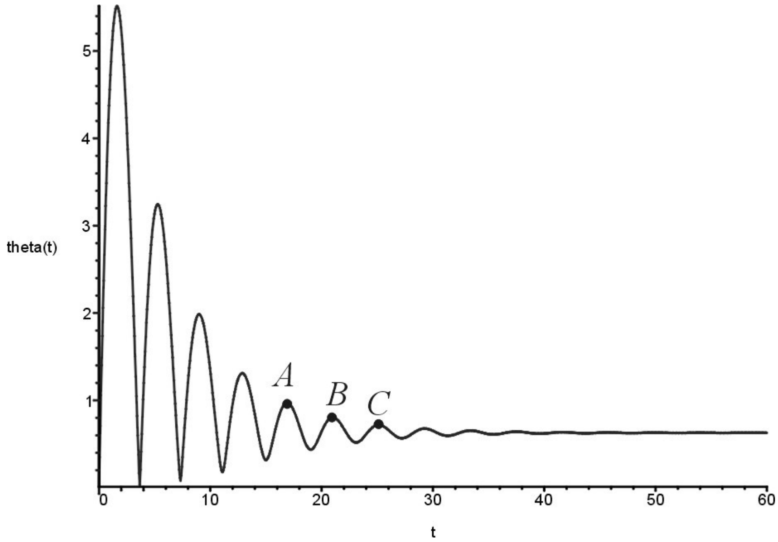
B.2) 2ème phase de l'expérience : On tourne très lentement le bouton mobile de manière à amener la sphère S_1 à la position $\theta_2 = \frac{1}{2}\theta_1 = 18°$, la position du bouton mobile est alors θ_{b2}.

a) Dans quel sens doit-on tourner le bouton mobile ?

b) Montrer que la distance S_1S_2 est pratiquement divisée par 2 lors de cette opération.

c) Dans la loi de Coulomb, la force d'interaction entre deux charges électriques est inversement proportionnelle à leur distance mutuelle élevée à une certaine puissance α (préciser laquelle). Pour confirmer expérimentalement la valeur de α quelle valeur θ_{b2} doit-on trouver ? Faire l'application numérique.

B.3) Les techniques expérimentales actuelles permettent d'enregistrer la courbe $\theta(t)$. La figure ci-contre représente θ (en radians) en fonction de t (en secondes) lors de la première phase de l'expérience.



a) La balance de Coulomb est-elle un système conservatif ? L'existence de frottements est-elle souhaitable ?

b) L'allure de la courbe pour $t > 15\text{s}$ suggère une modélisation par une équation différentielle de la forme $\ddot{\theta} + 2\lambda'\omega'_0\dot{\theta} + \omega'^2_0\theta = \omega'^2_0\theta_1$.

On donne les coordonnées de certains points :

A	B	C	
$t_A = 16,9\,\text{s}$	$t_B = 21,0\,\text{s}$	$t_C = 25,1\,\text{s}$	$t \to \infty$
$\theta_A = 0,95\,\text{rad}$	$\theta_B = 0,80\,\text{rad}$	$\theta_C = 0,72\,\text{rad}$	$\theta_1 = 0,63\,\text{rad}$

Calculer ω'_0 et λ'.

c) Exprimer ω'_0 en fonction de C, θ_1 et du moment d'inertie J de l'équipage mobile.

N.B. : on peut voir un film de cette expérience à l'adresse suivante :
http://www.ampere.cnrs.fr/parcourspedagogique/zoom/video/coulomb/video/coulomb.php

Chimie (extrait Mines-Ponts MP 2005)

Le dihydrogène peut être obtenu par électrolyse de l'eau, mais sa production la plus importante en tonnage est issue du vaporéformage du méthane. Cette transformation, réalisée à 800°C sous une pression de 35 bar, peut être décrite par l'équation de réaction suivante :

$$CH_4 + 2\ H_2O = CO_2 + 4\ H_2$$

Dans les conditions opératoires, tous les constituants sont sous forme gazeuse.

On donne les enthalpies standard de formation suivantes à 298 K :

	CH_4 (g)	H_2O (g)	CO_2 (g)	H_2 (g)
$\Delta_f H°$ (kJ.mol^{-1})	–74	–242	–393	0

1- Pourquoi l'enthalpie standard de formation du dihydrogène est-elle nulle ?

2- Calculer à T = 298 K la valeur de l'enthalpie standard attachée à l'équation de vaporéformage. Quelle approximation faut-il faire pour considérer que sa valeur ne dépend pas de la température ?

3- Quel est le signe de l'entropie standard attachée à l'équation de vaporéformage ? Justifier qualitativement la réponse. En déduire, dans le cadre de l'approximation indiquée à la question **2**, qu'il existe une température minimale au-delà de laquelle un mélange constitué des quatre constituants précédents, chacun étant à une pression partielle égale à la pression standard, évolue dans le sens de la disparition du méthane.

Remarque : la valeur de cette température minimale est de l'ordre de 630°C.

Pour évaluer les besoins énergétiques associés au vaporéformage, on pose les hypothèses suivantes :

- la transformation est effectuée dans une enceinte fermée parfaitement adiabatique, à pression constante P = 35 bar, le méthane et la vapeur d'eau étant introduits en proportions stœchiométriques,
- on suppose que la transformation est totale et que l'effet thermique dû à celle-ci se traduit uniquement par une baisse de la température des produits. Pour simplifier les calculs, les capacités thermiques molaires isobares $C_{pm}(CO_2)$ et $C_{pm}(H_2)$ sont prises constantes dans l'intervalle de température considéré. On prendra : $C_{pm}(CO_2) = 45$ J.mol^{-1}.K^{-1} et $C_{pm}(H_2) = 27$ J.mol^{-1}.K^{-1}.

4- Calculer la valeur approximative de la température finale du système dans le cadre de ces hypothèses. Commenter.

5- Quelle est l'influence d'une hausse de pression sur l'avancement de la transformation pour un système initialement en équilibre ? On justifiera rigoureusement par un calcul d'affinité.

Pour isoler le dihydrogène, il faut éliminer le dioxyde de carbone du mélange gazeux. Une des solutions adoptées est d'absorber $CO_{2(g)}$ par une solution aqueuse basique. La base employée est l'ion carbonate $CO_3^{2-}{}_{(aq)}$. On donne : $pK_A(CO_2/HCO_3^-) = 6,3$ $pK_A(HCO_3^-/CO_3^{2-}) = 10,3$ à T = 298 K.

6- (**question facultative**) Ecrire l'équation de la réaction entre le dioxyde de carbone et les ions carbonate en solution aqueuse. Justifier que cette réaction soit totale dans les conditions usuelles. Dans quel domaine de pH se trouve le système en fin de réaction si les réactifs ont été introduits initialement en proportions stœchiométriques ?

7- (**question facultative**) Ecrire les formules de Lewis de CO_2, HCO_3^- et CO_3^{2-}. Indiquer le nombre d'oxydation du carbone pour chacune de ces espèces.