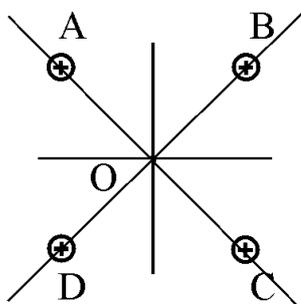
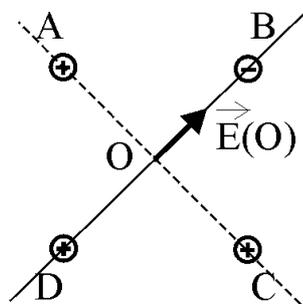


MP 08/09 – Corrigé du D.M. de PHYSIQUE n°8**1^{ère} partie**

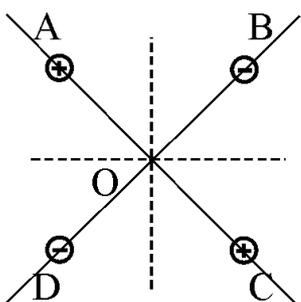
1.a) Sur la figure ci-dessous les plans dont la trace est représentée en trait plein sont des plans de symétrie passant par O ($\vec{E}(O)$ leur appartient) et les plans dont la trace est en pointillé des plans d'antisymétrie passant par O ($\vec{E}(O)$ leur est orthogonal).



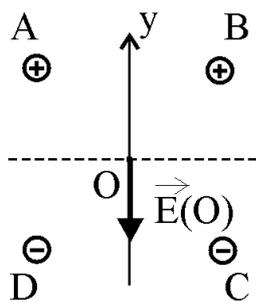
i)



ii)



iii)



iv)

1.b) On utilise le théorème de superposition : le champ électrique est la somme des 4 champs créés par les 4 charges.

$$\text{ii) } \vec{E}(O) = \underbrace{\vec{E}_A(O) + \vec{E}_C(O)}_{\text{champs opposés}} + \underbrace{\vec{E}_B(O) + \vec{E}_D(O)}_{\text{champ égaux}} = 2\vec{E}_B(O) = 2 \frac{q}{4\pi\epsilon_0 OB^2} \vec{u}_{OB} \text{ soit } \boxed{\vec{E}(O) = \frac{q}{\pi\epsilon_0 a^2} \vec{u}_{OB}}$$

$$\text{iv) } \vec{E}(O) = \vec{E}_A(O) + \vec{E}_B(O) + \vec{E}_C(O) + \vec{E}_D(O) = 4(\vec{E}_A \cdot \vec{u}_y) \vec{u}_y = 4 \left(-\frac{q}{4\pi\epsilon_0 (a/\sqrt{2})^2} \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \vec{u}_y$$

$$\text{soit } \boxed{\vec{E}(O) = \frac{-q\sqrt{2}}{\pi\epsilon_0 a^2} \vec{u}_y}$$

2.a) $q_A < 0, q_B > 0, q_C > 0$ et $q_D > 0$. En effet :

- Si les lignes de champ divergent à partir d'un point M, la charge placée en M est positive : la géométrie des lignes de champ entraîne que le flux du champ à travers une petite surface entourant M est positif ce qui indique la présence d'une charge positive en M d'après le théorème de Gauss. C'est le cas de B, C, et D.

- Si, inversement, les lignes de champ convergent vers un point M, la charge placée en M est négative (le flux du champ électrique à travers une petite surface entourant cette charge est négatif). C'est le cas de A..

La force électrique est ainsi **attractive entre A et B, et répulsive entre C et D.**

2.b) En M (resp. N) divergent (resp. convergent) quatre lignes de champ orthogonales qui sont orthogonales deux à deux quand elles ne sont pas dans le prolongement l'une de l'autre. Le champ en M (resp. N), tangent à deux directions différentes, est nécessairement nul : $\vec{E}(M) = \vec{E}(N) = \vec{0}$.

2.c) En mesurant les longueurs sur la figure nous trouvons $\frac{MB}{MA} \approx 1,4$ et $\frac{ND}{NC} \approx 1,4$.

$$\vec{E}_A(M) + \vec{E}_B(M) = 0 \text{ donc } \|\vec{E}_A(M)\| = \|\vec{E}_B(M)\| \text{ soit } \frac{q_A}{4\pi\epsilon_0 MA^2} = \frac{q_B}{4\pi\epsilon_0 MB^2}. \text{ Donc : } \frac{q_B}{q_A} = \left(\frac{MB}{MA}\right)^2 \approx 2.$$

3.a) Vrai : Le potentiel décroît le long d'une ligne de champ car $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V$ est un vecteur pointant dans la direction où V diminue.

3.b) Faux : Par exemple, à la question 2), la norme de \vec{E} croît de M à A.

3.c) Faux : Si on place un dipôle $\vec{p} = p\vec{u}_z$ à l'origine O :

$$V = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \text{ et } \vec{E} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 \cos \theta \vec{u}_r + \sin \theta \vec{u}_\theta)$$

(en coordonnées sphériques). Alors $\|\vec{E}\| = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sqrt{3 \cos^2 \theta + 1}$. On peut avoir $V = \text{constante}$ sans avoir

$\|\vec{E}\| = \text{constante}$.

3.d) Vrai, c'est une propriété générale du gradient d'un champ scalaire U et des surfaces U=constante.

$$\mathbf{4.a) i) } Q_{\text{int}}(r) = \iiint_{P \in \mathcal{S}(r)} \rho(P) d\tau_P = \int_{r'=0}^r \int_{\theta'=0}^{\pi} \int_{\phi'=0}^{2\pi} \rho(r') dr' (r'd\theta') (r \sin \theta d\phi') \text{ soit } \boxed{Q_{\text{int}}(r) = \int_{r'=0}^r \rho(r') 4\pi r'^2 dr'}$$

N.B. : Le résultat peut être trouvé immédiatement en disant que le volume de la couche comprise entre les sphères de rayons r' et $r'+dr'$ est $4\pi r'^2 dr'$

ii) Par symétrie, le potentiel créé ne dépend que de r, distance à O et s'écrit $V(r)$. On en déduit, en utilisant les coordonnées sphériques, la forme du champ créé : $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V = -\frac{dV}{dr} \vec{u}_r = E(r)\vec{u}_r$.

Le flux de ce champ à travers la sphère $\mathcal{S}(r)$ de centre O et rayon r est :

$$\Phi(r) = \oiint_{\mathcal{S}(r)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oiint_{\mathcal{S}(r)} (E(r)\vec{u}_r) \cdot (dS\vec{u}_r) = \oiint_{\mathcal{S}(r)} E(r) \cdot dS = E_i(r) \oiint_{\mathcal{S}(r)} dS = 4\pi r^2 E(r)$$

D'après le théorème de Gauss : $\Phi(r) = \frac{Q_{\text{int}}(r)}{\epsilon_0}$, où $Q_{\text{int}}(r)$ est la charge contenue à l'intérieur de $\mathcal{S}(r)$.

$$\text{Donc : } \boxed{E(r) = \frac{Q_{\text{int}}(r)}{4\pi\epsilon_0 r^2}}$$

Il est bon de retenir ce résultat : le champ électrique, créé en un point M par une distribution de charge à symétrie sphérique, est égal au champ que créerait en M une charge ponctuelle placée au centre et égale à la somme de toutes les charges qui sont plus près du centre que M.

$$\text{iii) } \text{div}(E(r)\vec{u}_r) = \frac{1}{r^2} \frac{d(r^2 E(r))}{dr} = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{Q_{\text{int}}(r)}{4\pi\epsilon_0} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} (4\pi r^2 \rho(r)) = \frac{\rho(r)}{\epsilon_0}$$

L'équation de Maxwell-Gauss est donc bien vérifiée.

$$\mathbf{4.b) i) } \text{ En utilisant 4.a.ii) on a : } \boxed{E_1(2R) = E_2(2R) = E_3(2R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 (2R)^2}}$$

Le champ créé par chaque sphère en son 'extérieur et égal au champ que créerait une charge ponctuelle Q placée en son centre.

ii) De même $\boxed{0 = E_3(R/2) < E_1(R/2) < E_2(R/2)}$ car $Q_{\text{int},3}(R/2) < Q_{\text{int},1}(R/2) < Q_{\text{int},2}(R/2)$

iii) Dans la sphère 2 les charges sont plus proches du centre que dans la sphère 1. Dans la sphère 3 les charges sont plus éloignées du centre que dans la sphère 1 (et plus précisément à distance R de celui-ci).

Donc :

$$\boxed{\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} = V_3(0) < V_1(0) < V_2(0)}$$

iv) On a : $E_i(r) = -\frac{dV_i}{dr}$, donc : $V_i(R) = \int_R^\infty E_i(r)dr$. Or, pour $r \geq R$, $E_i(r) = \frac{Q_{\text{int},i}(r)}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ pour

$i = 1, 2$ ou 3 . Donc : $\boxed{V_1(R) = V_2(R) = V_3(R) = \int_R^\infty \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}}$

2^{ème} partie

1.a. O' étant un autre point origine, $\sum_{i=1}^n q_i \overrightarrow{O'S_i} = \sum_{i=1}^n q_i (\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OS_i}) = \underbrace{\left(\sum_{i=1}^n q_i\right)}_{=0} \overrightarrow{O'O} + \sum_{i=1}^n q_i \overrightarrow{OS_i} = \sum_{i=1}^n q_i \overrightarrow{OS_i}$.

1.b. Dans le cas de deux charges, $(-q)$ en S_1 et $(+q)$ en S_2 , on trouve en prenant $O = S_1$: $\vec{p} = q\overrightarrow{S_1S_2}$.

1.c.1. Au niveau du noyau d'hydrogène : 1 proton soit une charge $(+e)$; au niveau du noyau de fluor : 9 protons et 10 électrons soit une charge $(-e)$.

1.c.2. Le moment dipolaire de la molécule a pour norme : $\|\vec{p}\| = ed = 1,47 \cdot 10^{-29} \text{ C.m} = 4,4 \text{ D}$.

1.c.3. On suppose que le doublet électronique mis en commun par les atomes d'hydrogène et de fluor forme un nuage électronique dont le barycentre est G . Dans ce modèle la molécule comporte : une charge $(+e)$ au niveau de H , une charge $(+e)$ au niveau de F et une charge

$(-2e)$ au niveau de G . G se trouve sur la droite HF , entre H et F

et plus près de F qui est le plus électronégatif des deux atomes. On a



$$\vec{p} = (+e)\overrightarrow{FF} + (+e)\overrightarrow{FH} + (-2e)\overrightarrow{FG} \Rightarrow \|\vec{p}\| = ed - 2eFG \Rightarrow FG = \frac{d}{2} - \frac{\|\vec{p}\|}{2e} = 0,27 \cdot 10^{-10} \text{ m}.$$

2.a. D'après la loi de Coulomb : $V(M) = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 S_1 M} + \frac{+q}{4\pi\epsilon_0 S_2 M} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)$.

2.b. Pour tout point M on a : $r_i^2 = \overrightarrow{S_i M}^2 = (\overrightarrow{S_i O} + \overrightarrow{OM})^2 = S_i O^2 + 2\overrightarrow{S_i O} \cdot \overrightarrow{OM} + OM^2$.

Si $r \gg a$, dans la somme précédente le terme le troisième est beaucoup plus grand que les deux autres. On

peut écrire, en se limitant au premier ordre entre $\frac{a}{r} \ll 1$ (rappel : $\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r}$) :

$$r_i^2 = r^2 \left(\underbrace{\frac{S_i O^2}{r^2}}_{2^{\text{ème}} \text{ ordre}} + 2 \underbrace{\frac{\overrightarrow{S_i O} \cdot \vec{e}_r}{r}}_{1^{\text{er}} \text{ ordre}} + 1 \right) \approx r^2 \left(1 + 2 \frac{\overrightarrow{S_i O} \cdot \vec{e}_r}{r} \right) \Rightarrow \frac{1}{r_i} \approx \frac{1}{r} \left(1 + 2 \frac{\overrightarrow{S_i O} \cdot \vec{e}_r}{r} \right)^{-\frac{1}{2}} \approx \frac{1}{r} \left(1 - \frac{\overrightarrow{S_i O} \cdot \vec{e}_r}{r} \right).$$

Il vient alors :

$$V(M) \approx V_d(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{r} + \frac{\overrightarrow{S_1 O} \cdot \vec{e}_r}{r^2} + \frac{1}{r} - \frac{\overrightarrow{S_2 O} \cdot \vec{e}_r}{r^2} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\overrightarrow{S_1 S_2} \cdot \vec{e}_r}{r^2} \right) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{e}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2} \text{ soit } V(M) \approx V_d(M) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}.$$

3.a. En utilisant l'expression du gradient en coordonnées sphériques on trouve :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f(r)) = \frac{df}{dr} \vec{e}_r \quad \text{soit en particulier} \quad \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{1}{r^3}\right) = -\frac{3}{r^4} \vec{e}_r = -\frac{3\vec{r}}{r^5}.$$

En utilisant l'expression du gradient en coordonnées cartésiennes, en notant $\vec{p} = p_x \vec{e}_x + p_y \vec{e}_y + p_z \vec{e}_z$:

$$\vec{p} \cdot \vec{r} = p_x x + p_y y + p_z z \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{\text{grad}}(\vec{p} \cdot \vec{r}) = p_x \vec{e}_x + p_y \vec{e}_y + p_z \vec{e}_z = \vec{p}.$$

3.b. Nous pouvons alors calculer, en utilisant la première relation d'analyse vectorielle fournie par l'énoncé :

$$\begin{aligned} \vec{E}(M) &= -\overrightarrow{\text{grad}} V_d(M) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \overrightarrow{\text{grad}}\left((\vec{p} \cdot \vec{r}) \frac{1}{r^3}\right) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[(\vec{p} \cdot \vec{r}) \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{1}{r^3}\right) + \frac{1}{r^3} \overrightarrow{\text{grad}}(\vec{p} \cdot \vec{r}) \right] \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[(\vec{p} \cdot \vec{r}) \left(\frac{-3\vec{r}}{r^5}\right) + \frac{1}{r^3} \vec{p} \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2 \vec{p}}{r^5} \end{aligned}$$

formule attendue par l'énoncé avec $k_1 = 3$.

3.c. On se place en coordonnées sphériques d'axe Oz parallèle au moment dipolaire puisque $\vec{p} = q\vec{S}_1\vec{S}_2 = qa\vec{e}_z = p\vec{e}_z$.

1^{ère} méthode : $\vec{p} = p \cos \theta \vec{e}_r - p \sin \theta \vec{e}_\theta$ et $\vec{p} \cdot \vec{r} = pr \cos \theta$, l'expression précédente du champ électrique devient :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3p \cos \theta r \vec{e}_r - r^2 (p \cos \theta \vec{e}_r - p \sin \theta \vec{e}_\theta)}{r^5} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{2p \cos \theta}{r^3} \vec{e}_r + \frac{p \sin \theta}{r^3} \vec{e}_\theta \right).$$

Donc : $E_r = \frac{2p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}$, $E_\theta = \frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}$ et $E_\varphi = 0$.

2^{ème} méthode : on écrit le potentiel en coordonnées sphériques : $V_d(M) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$, puis on en

calcule le gradient à l'aide de la formule du gradient en coordonnées sphériques :

$$E_r = -\frac{\partial V_d}{\partial r} = \frac{2p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}, \quad E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V_d}{\partial \theta} = \frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad \text{et} \quad E_\varphi = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V_d}{\partial \varphi} = 0.$$

3.d. $\tan \beta = \frac{E_\theta}{E_r} = \frac{1}{2} \tan \theta$.

3.e. Nous pouvons généraliser la question : on se place dans un plan méridien (plan contenant Oz) et on souhaite trouver les points où le champ électrique est perpendiculaire à Oz . Il en est ainsi si :

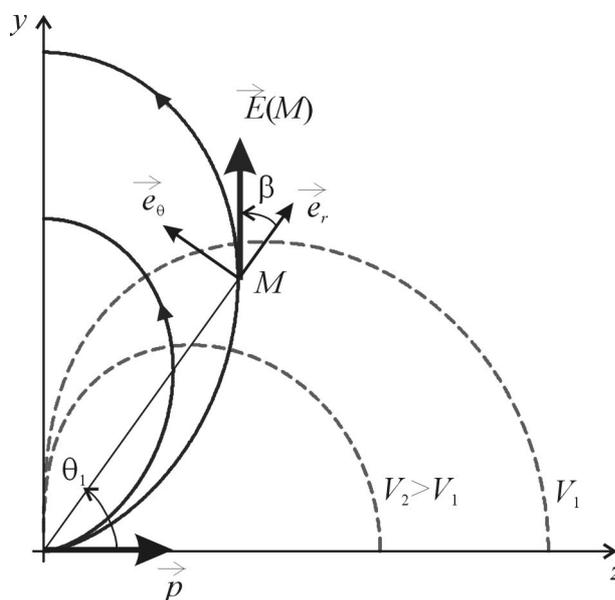
$$\beta = \frac{\pi}{2} - \theta \quad (\text{cf. figure ci-dessous})$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\tan \theta} = \frac{1}{2} \tan \theta \quad \Leftrightarrow \tan \theta = \sqrt{2}.$$

L'angle cherché, dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, est :

$$\theta_1 = \arctan \sqrt{2} \approx 0,96 \text{ rad} = 54,7^\circ.$$

4.a. Une surface équipotentielle est une surface sur laquelle le potentiel électrique garde une valeur constante V_0 . Son équation en coordonnées sphériques est ici :



$$\frac{\cos \theta}{r^2} = \text{constante} \quad \text{où} \quad \text{constante} = \frac{4\pi\epsilon_0 V_0}{p}$$

4.b. Une ligne de champ est une ligne tangente en chacun de ses points au champ électrique existant en ce point. Pour en trouver l'équation on exprime la proportionnalité entre le champ électrique $\vec{E}(M)$ et le déplacement élémentaire \overrightarrow{dl}_M le long de la ligne en ce point. En coordonnées sphériques cela s'écrit (puisque $\overrightarrow{dl}_M = dr\vec{e}_r + rd\theta\vec{e}_\theta + r\sin\theta d\varphi\vec{e}_\varphi$) :

$$\frac{dr}{E_r} = \frac{rd\theta}{E_\theta} = \frac{r\sin\theta d\varphi}{E_\varphi}$$

Dans le cas du dipôle on a donc :

$$\frac{dr}{2p\cos\theta} = \frac{rd\theta}{p\sin\theta} \quad \text{et} \quad d\varphi = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \frac{dr}{r} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} d\theta \quad \text{et} \quad d\varphi = 0$$

$$\Leftrightarrow r = (\text{constante}) \times \sin^2\theta \quad \text{et} \quad \varphi = \text{constante.}$$

4.c. Cf. figure ci-contre : équipotentiels en pointillés et lignes de champ en trait plein.

5.a. $\vec{R}_f = (-q)\vec{E}(S_1) + q\vec{E}(S_2) = -q\vec{E}_e + q\vec{E}_e = \vec{0}$. L'action exercée par le champ uniforme est un couple de moment :

$$\begin{aligned} \vec{\Gamma} &= \overrightarrow{OS_1} \wedge (-q\vec{E}_e) + \overrightarrow{OS_2} \wedge (q\vec{E}_e) = q(\overrightarrow{OS_2} - \overrightarrow{OS_1}) \wedge \vec{E}_e \\ &= q\overrightarrow{S_1S_2} \wedge \vec{E}_e = \vec{p} \wedge \vec{E}_e \end{aligned}$$

5.b. $U = -\|\vec{p}\| \|\vec{E}_e\| \cos\gamma$ où $\gamma = (\vec{E}_e, \vec{p})$. On constate que le dipôle placé dans le champ extérieur \vec{E}_e est :

- En équilibre stable (U minimale) lorsque $\gamma = 0$, c'est-à-dire lorsque le dipôle est parallèle au champ électrique extérieur ;
- en équilibre instable (U maximale) lorsque $\gamma = \pi$, c'est-à-dire lorsque le dipôle est antiparallèle au champ électrique extérieur.

On peut facilement constater que le couple $\vec{\Gamma}$ s'annule pour les positions précédentes et tend à amener le dipôle dans la position d'équilibre stable.

3^{ème} partie

1.a) Le problème est invariant par translation suivant les axes Oy et Oz donc le champ électrique ne dépend que de x . Il vérifie l'équation différentielle :

$$\Delta \vec{E} - \frac{\vec{E}}{\lambda_D^2} = \frac{d^2 \vec{E}}{dx^2} - \frac{\vec{E}}{\lambda_D^2} = \vec{0}$$

La solution en est :

$$\vec{E} = \vec{\alpha} e^{-x/\lambda_D} + \vec{\beta} e^{x/\lambda_D} \quad \text{où} \quad \vec{\alpha} \text{ et } \vec{\beta} \text{ sont des vecteurs constants.}$$

Pour $x \rightarrow \infty$, $\vec{E} \rightarrow \vec{0}$, valeur d'équilibre électrostatique dans un conducteur, on a donc $\vec{\beta} = \vec{0}$. En $x = 0$ le champ électrique dans le conducteur vaut $E_0 \vec{e}_x$ puisque c'est la valeur du champ extérieur au voisinage de la surface et que, en présence de charges volumiques seulement, le champ électrique est continu. On en déduit que $\vec{\alpha} = E_0 \vec{e}_x$.

Finalement le champ électrique dans le conducteur est : $\vec{E} = E_0 e^{-x/\lambda_D} \vec{e}_x$.

1.b) On en déduit par l'équation de Maxwell-Gauss, l'expression de la densité volumique de charge :

$$\rho = \epsilon_0 \text{div} \vec{E} = \epsilon_0 \frac{dE_x}{dx} \quad \text{soit} \quad \rho = \rho_0 e^{-x/\lambda_D} \quad \text{avec} \quad \rho_0 = -\frac{\epsilon_0 E_0}{\lambda_D}$$

$$1.c) \sigma = \int_{x=0}^{\infty} \rho dx = \int_{x=0}^{\infty} \rho_0 e^{-x/\lambda_D} dx = \left[-\rho_0 \lambda_D e^{-x/\lambda_D} \right]_{x=0}^{\infty} = \rho_0 \lambda_D$$

soit $\sigma = \rho_0 \lambda_D = -\epsilon_0 E_0$. On retrouve l'expression du **théorème de Coulomb**.

2.a) Le plan Oxy est plan d'antisymétrie pour la distribution de charge. En effet, si M' est le symétrique de M sur la figure 2a de l'énoncé on a :

$$\sigma(M') = \sigma_0 \cos(\pi - \theta) = -\sigma_0 \cos \theta = -\sigma(M).$$

Par suite, \vec{E}_m , champ électrique en O , est orthogonal à Oxy et $\vec{E}_m = E_m \vec{e}_z$.

Remarque : On peut aussi utiliser les plans de symétrie Oxz et Oyz .

Calculons ce champ. L'élément de surface $dS = R^2 \sin \theta d\theta d\phi$ autour de M porte la charge $\sigma(M)dS$ et crée en O le champ électrique

$$d\vec{E} = -\frac{\sigma(M)dS}{4\pi\epsilon_0 R^2} \vec{e}_r$$

dont la composante « utile » suivant \vec{e}_z est

$$dE_z = -\frac{\sigma(M)dS}{4\pi\epsilon_0 R^2} \cos \theta = -\frac{\sigma_0}{4\pi\epsilon_0} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta d\phi.$$

Il vient :

$$E_m = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} dE_z = -\frac{\sigma_0}{4\pi\epsilon_0} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta d\phi = -\frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \underbrace{\int_{\theta=0}^{\pi} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta}_{=2/3} = -\frac{\sigma_0}{3\epsilon_0}$$

Conclusion : Le champ au centre de la sphère est $\vec{E}_m = -\frac{\sigma_0}{3\epsilon_0} \vec{e}_z$.

On admet que le champ créé par les charges surfaciques a cette valeur en tout point intérieur à la sphère.

Le champ électrique total dans le matériau est la superposition du champ appliqué et du champ créé par les

charges surfaciques qui apparaissent : $\vec{E} = \vec{E}_a + \vec{E}_m = \left(E_a - \frac{\sigma_0}{3\epsilon_0} \right) \vec{e}_z$

2.b) Le doublet défini dans l'énoncé est constitué d'une charge $dq = \sigma(M)dS$ placée en M et de la charge $\sigma(M')dS' = -\sigma(M)dS = -dq$ placée en M' ; il a pour moment dipolaire :

$$\begin{aligned} \vec{dp} &= \sigma(M)dS \vec{M}'\vec{M} = (\sigma_0 \cos \theta)(R^2 \sin \theta d\theta d\phi)(2R \cos \theta \vec{e}_z) \\ &= 2\sigma_0 R^3 \cos^2 \theta \sin \theta d\theta d\phi \vec{e}_z \end{aligned}$$

On en déduit le moment dipolaire électrique total de la sphère :

$$\vec{p} = \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{\phi=0}^{2\pi} \vec{dp} = 2\sigma_0 R^3 \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{\phi=0}^{2\pi} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta d\phi,$$

où apparaît une intégrale double analogue à celle calculée à la question précédente (noter que l'on intègre

pour θ allant de 0 à $\pi/2$ seulement). Il vient : $\vec{p} = \frac{4\pi\sigma_0 R^3}{3} \vec{e}_z$.

Le moment dipolaire volumique est : $\vec{P} = \frac{\vec{p}}{4\pi R^3/3} = \sigma_0 \vec{e}_z$.

Le champ total à l'intérieur de la sphère peut s'exprimer par $\vec{E} = \vec{E}_a - \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}$.

3.c) Si le matériau est un conducteur, à l'équilibre, $\vec{E} = \vec{0}$ et $\vec{P} = 3\epsilon_0 \vec{E}_a$, résultat indépendant de la nature physique du matériau conducteur.

Chimie

C.1.

C.1.1. D'après la loi de Hess : $\Delta_r H^0(T_0) = -197\,800 \text{ J.mol}^{-1}$.C.1.2. De même on obtient $\Delta_r S^0(T_0) = -188,2 \text{ J.mol}^{-1}$ et $\Delta_r G^0(T_0) = \Delta_r H^0(T_0) - T_0 \Delta_r S^0(T_0) = -141\,690 \text{ J.mol}^{-1}$ C.1.3. Par définition de la constante d'équilibre : $K^0(T_0) = \exp\left(-\frac{\Delta_r G^0(T_0)}{RT_0}\right) = 6,6 \cdot 10^{24}$.

C.2. D'après la loi de Kirchhoff :

$$\frac{d\Delta_r H^0}{dT} = \Delta_r C_p^0 \quad \text{d'où} \quad \Delta_r H^0(T_1) = \Delta_r H^0(T_0) + \Delta_r C_p^0(T_1 - T_0) = -197\,800 + 3,4T = -196\,260 \text{ J.mol}^{-1}$$

C.3. L'augmentation de température à pression constante déplace l'équilibre dans le sens endothermique (loi de Van't Hoff, principe de modération). Ici on a donc déplacement dans le sens indirect avec formation de dioxyde de soufre.

C4. D'après la loi de Chatelier (principe de modération), une augmentation de pression à température constante déplace l'équilibre dans le sens d'une diminution du nombre de moles de gaz. On a donc un déplacement dans le sens direct : formation de trioxyde de soufre. Le taux de conversion augmente.

C.5. Par la définition de la constante d'équilibre : $\Delta_r G^0(T_1) = -RT_1 \ln K^0(T_1) = -57\,465 \text{ J.mol}^{-1}$

C.6.

C.6.1. Ecrivons un tableau d'avancement (quantités de matière en mol) :

	2SO ₂	+ O ₂	=	2SO ₃	N ₂	Total gaz
E. I.	100	50		0	0	150
E. Q.	100-2ξ ₁	50-ξ ₁		2ξ ₁		150-ξ ₁
E. F.	4	2		96		102

C.6.2. D'après la loi de Dalton : $P_{SO_3} = x_{SO_3} P_1 = \frac{96}{102} P_1$, $P_{O_2} = x_{O_2} P_1 = \frac{2}{102} P_1$ et $P_{SO_2} = x_{SO_2} P_1 = \frac{4}{102} P_1$.C.6.3. D'après la loi de Guldberg et Waage : $K^0(T_1) = \frac{P_{SO_3}^2 P^\circ}{P_{SO_2}^2 P_{O_2} P^\circ} = \left(\frac{x_{SO_3}}{x_{SO_2}}\right)^2 \frac{P^\circ}{x_{O_2} P_1}$ on en déduit $P_1 = 2,94 \text{ bar}$.

C.7.1.

C.7.1.1. Ecrivons un tableau d'avancement (quantités de matière en mol) :

	2SO ₂	+ O ₂	=	2SO ₃	N ₂	Total gaz
E I	8	12		0	80	100
E	8-2ξ ₂	12-ξ ₂		2ξ ₂	80	100-ξ ₂
E F	0,02*8	8,08		0,98*8=7,84	80	96,08

C.7.1.2. L'avancement est donné par $\xi_2 = 3,92 \text{ mol}$.C.7.1.3. et C.7.1.4. On suppose l'équilibre atteint. On procède comme à la question C.6. La température étant de 750K on a toujours la constante d'équilibre égale à 10 050. On obtient $P_2 = 2,84 \text{ bar}$.C.7.1.5. La transformation est *isobare* donc le transfert thermique (ou « chaleur échangée ») reçu par le convertisseur est égale à sa variation d'enthalpie : $Q = \Delta H$. De plus la réaction est *isobare et isotherme* donc : $\Delta H = \xi_2 \Delta_r H^0(T_1)$. Finalement : $Q = \xi_2 \Delta_r H^0(T_1)$.

C.7.2.

C.7.2.1. On a $2\xi_3 = 0,60*8 \text{ mol}$ soit $\xi_3 = 2,4 \text{ mol}$.

	2SO ₂	+ O ₂	=	2SO ₃	N ₂	Total gaz
E I	8	12		0	80	100
E	8-2 ξ ₃	12-ξ ₃		2 ξ ₃	80	100- ξ ₃
E F	3,2	9,6		0,6*8=4,8	80	97,6

C.7.2.2. La réaction est *isobare et adiabatique* : la variation d'enthalpie au cours de la transformation est $\Delta H = 0$. Pour calculer ΔH on imagine un chemin fictif en deux étapes, menant du même état initial au même état final :

1) réaction *isobare et isotherme* à T_1 :

$$\Delta H_1 = \xi_3 \Delta_r H^\circ(T_1),$$

2) échauffement *isobare* de T_1 à T_2 :

$$\Delta H_2 = C_{P, \text{produits finaux}} (T_2 - T_1) = \left(3,2 C_{P_{SO_2}}^0 + 9,6 C_{P_{O_2}}^0 + 4,8 C_{P_{SO_3}}^0 + 80 C_{P_{N_2}}^0 \right) (T_2 - T_1) = 3154 (T_2 - T_1)$$

On a : $0 = \Delta H = \Delta H_1 + \Delta H_2$ d'où $T_2 = T_1 - \frac{\xi_3 \Delta_r H^\circ(T_1)}{C_{P, \text{produits finaux}}} = 899 \text{ K}$.

C.7.2.3. Le quotient réactionnel est donné par : $\pi = \frac{P_{SO_3}^2 P^\circ}{P_{SO_2}^2 P_{O_2} P^\circ} = \left(\frac{x_{SO_3}}{x_{SO_2}} \right)^2 \frac{P^\circ}{x_{O_2} P}$ avec $P = P^\circ = 1 \text{ bar}$ soit $\pi = 22,9$.

C.7.2.4. Il faut calculer :

- $\Delta_r H^\circ(T_2) = \Delta_r H^\circ(T_0) + \Delta_r C_p^\circ (T_2 - T_0) = -196 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$ en utilisant comme plus haut la loi de Kirchhoff

- $\Delta_r S^\circ(T_2) = \Delta_r S^\circ(T_0) + \Delta_r C_p^\circ \ln \frac{T_2}{T_0} = -187,6 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ en utilisant l'autre loi de Kirchhoff

- puis $\Delta_r G^\circ(T_2) = \Delta_r H^\circ(T_2) - T_2 \Delta_r S^\circ(T_2) = -27,15 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$

- et enfin : $K^\circ(T_2) = \exp\left(-\frac{\Delta_r G^\circ(T_2)}{RT_2}\right) = 37,9$

C.7.2.5. On constate que $K^\circ(T_2) > \pi$ donc $\mathcal{A} = RT \ln \frac{K^\circ}{\pi} > 0$, donc à la sortie on n'a pas encore atteint l'équilibre