MP 08/09 – Corrigé du D.M. de PHYSIQUE n°7

Problème 1

A.1) A et B ont pour coordonnées : $(2l\cos\theta, 0)$ et $(2l\sin\theta)$. G est le milieu de AB, il a pour coordonnées : $(l\cos\theta, l\sin\theta)$.

On en déduit en dérivant par rapport au temps la vitesse de G : $\overrightarrow{v_G} = l\dot\theta\left(-\sin\theta\overrightarrow{u_x} + \cos\theta\overrightarrow{u_y}\right)$,

et son accélération : $\overrightarrow{a_G} = l\left(-\dot\theta^2\cos\theta - \ddot\theta\sin\theta\right)\overrightarrow{u_x} + l\left(-\dot\theta^2\sin\theta + \ddot\theta\cos\theta\right)\overrightarrow{u_y}$.

L'angle $-\theta = (\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{BA})$ repère un vecteur lié à la tige par rapport à une direction fixe dans le plan Oxy ; le vecteur rotation de la tige est donc : $\vec\omega = -\dot\theta\overrightarrow{u_z}$.

A.2) La tige est soumise aux actions mécaniques suivantes :

- son poids qui dérive de l'énergie potentielle $E_p = mgy_G = mgl\sin\theta$;
- une réaction de l'axe Ox en A , orthogonale à $\overrightarrow{u_x}$ puisqu'il n'y a pas de frottement, $\overrightarrow{R_A} = N_A\overrightarrow{u_y}$, qui ne travaille pas ;
- une réaction de l'axe Oy en B , orthogonale à $\overrightarrow{u_y}$ puisqu'il n'y a pas de frottement, $\overrightarrow{R_B} = N_B\overrightarrow{u_x}$, qui ne travaille pas non plus.

La tige est donc un système conservatif pour lequel nous allons écrire l'intégrale première de l'énergie. D'après le théorème de Koenig l'énergie cinétique de la barre est :

$$E_c = \frac{1}{2}m(v_G)^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{2}ml^2\dot\theta^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ml^2\right)\dot\theta^2 = \frac{2}{3}ml^2\dot\theta^2 .$$

Nous avons vu plus haut l'expression de l'énergie potentielle. Il vient donc :

$$E_m = \frac{2}{3}ml^2\dot\theta^2 + mgl\sin\theta = \text{constante} = mgl\sin\theta_0 ,$$

en utilisant les conditions initiales. Nous en tirons : $\dot\theta^2 = \frac{3g}{2l}\left(\sin\theta_0 - \sin\theta\right)$, puis en dérivant par rapport au temps : $\ddot\theta = -\frac{3g}{4l}\cos\theta$.

A.3) Le théorème de la résultante cinétique, appliqué à la barre, s'écrit $m\overrightarrow{a_G} = m\vec g + \overrightarrow{R_A} + \overrightarrow{R_B}$, et en projection sur $\overrightarrow{u_x}$ et $\overrightarrow{u_y}$:

$$\begin{cases} ml(-\dot\theta^2\cos\theta - \ddot\theta\sin\theta) = N_B \\ ml(-\dot\theta^2\sin\theta + \ddot\theta\cos\theta) = -mg + N_A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N_B = mg\cos\theta\left(-\frac{3}{2}\sin\theta_0 + \frac{9}{4}\sin\theta\right) \\ N_A = mg\left(1 - \frac{3}{2}\sin\theta_0\sin\theta + \frac{3}{2}\sin^2\theta - \frac{3}{4}\cos^2\theta\right) \end{cases}.$$

en utilisant les résultats de la question précédente.

A.4) A l'instant initial $N_A = mg\left(1 - \frac{3}{4}\cos^2\theta_0\right) > 0$ et $N_B = \frac{3}{4}mg\cos\theta_0\sin\theta_0 > 0$.

N_B s'annule lorsque $\theta = \theta_1 = \arcsin\left(\frac{2}{3}\sin\theta_0\right)$, il y a alors perte de contact de la barre avec l'axe Oy. A cet instant, d'après le 2) la vitesse angulaire est : $\dot\theta_1 = -\sqrt{\frac{g}{2l}\sin\theta_0}$.

Application numérique : $\theta_1 = 0{,}70\,\text{rad} = 40{,}1°$ et $\dot\theta_1 = -2{,}2\,\text{rad.s}^{-1}$.

A.5) A cet instant toujours, la vitesse de G est :

$$\overrightarrow{v_{G1}} = -\sqrt{\frac{gl}{2}\sin\theta_0}\left(-\frac{2}{3}\sin\theta_0\overrightarrow{u_x} + \sqrt{1 - \frac{4}{9}\sin^2\theta_0}\,\overrightarrow{u_y}\right) = 2{,}2\left(0{,}64\overrightarrow{u_x} - 0{,}77\overrightarrow{u_y}\right)\ (\text{en m.s}^{-1}).$$

A.6) Pour θ compris entre θ_0 et θ_1, $\sin\theta_0 < \frac{3}{2}\sin\theta$ donc :

$$\frac{N_A}{mg} = 1 - \frac{3}{2}\sin\theta_0\sin\theta + \frac{3}{2}\sin^2\theta - \frac{3}{4}\cos^2\theta = \frac{1}{4} - \frac{3}{2}\sin\theta_0\sin\theta + \frac{9}{4}\sin^2\theta > \frac{1}{4} - \frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}\sin\theta\right)\sin\theta + \frac{9}{4}\sin^2\theta = \frac{1}{4}$$

Ainsi, la réaction en A garde toujours le même sens.

B.1) A partir du moment où le contact est rompu en B, la barre n'est plus soumise qu'à son poids et $\overrightarrow{N_A}$, forces **verticales**. Par suite la composante horizontale de la vitesse de G reste constante : $\dot x = -l\dot\theta_1\sin\theta_1 = \frac{\sqrt{2gl}}{3}(\sin\theta_0)^{\frac{3}{2}}$.

D'autre part, la coordonnée y de G étant toujours $l\sin\theta$: $\dot y = l\dot\theta\cos\theta$.

B.2) La tige est toujours un système conservatif , son énergie mécanique est constante. Il vient, en tenant compte de B.1) :

$$\frac{1}{2}ml^2\dot\theta^2\cos^2\theta + \frac{1}{2}J\dot\theta^2 + mgl\sin\theta = \frac{1}{2}ml^2\dot\theta_1^2\cos^2\theta_1 + \frac{1}{2}J\dot\theta_1^2 + mgl\sin\theta_1 .$$

On en tire :

$$\dot\theta^2 = \dot\theta_1^2\frac{J + ml^2\cos^2\theta_1}{J + ml^2\cos^2\theta} + \frac{2mgl(\sin\theta_1 - \sin\theta)}{J + ml^2\cos^2\theta} = \dot\theta_1^2\frac{1 + 3\cos^2\theta_1}{1 + 3\cos^2\theta} + \frac{6g(\sin\theta_1 - \sin\theta)}{l(1 + 3\cos^2\theta)} .$$

B.3) Au moment où la tige touche le sol, $\theta = \theta_2 = 0$ et donc :

$$\dot\theta_2^2 = \dot\theta_1^2\frac{1 + 3\cos^2\theta_1}{4} + \frac{6g\sin\theta_1}{4l} = \frac{g\sin\theta_0}{l}\left(2 - \frac{\sin^2\theta_0}{9}\right).$$

A cet instant la vitesse de G est :

$$\overrightarrow{v_{G2}} = \sqrt{gl\sin\theta_0}\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\sin\theta_0\overrightarrow{u_x} - \sqrt{2 - \frac{\sin^2\theta_0}{9}}\,\overrightarrow{u_y}\right).$$

Problème 2

A- Le chariot est supposé immobile. Etude du pendule pesant.

A.1) D'après le théorème de Koenig, le moment cinétique du pendule en A est :

$$\overrightarrow{L_A} = \overrightarrow{AG} \wedge m\overrightarrow{v_G} + \overrightarrow{L^*}$$

Dans son référentiel barycentrique, le pendule tourne autour de l'axe passant par G et parallèle à Δ, soit son axe de symétrie, donc : $\overrightarrow{\sigma^*} = J_0\dot{\theta}\overrightarrow{u_z}$. Donc :

$$\overrightarrow{\sigma_A} = (d\overrightarrow{u_r}) \wedge (md\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}) + J_0\dot{\theta}\overrightarrow{u_z} = (J_0 + md^2)\dot{\theta}\overrightarrow{u_z}$$

On trouve ainsi : $\boxed{J_\Delta = J_0 + md^2}$. $J_0 > 0$ donc $\boxed{\alpha > 1}$.

A.2) On applique au pendule le théorème du moment cinétique au point A dans le référentiel terrestre. Il vient en projection sur la direction de *Δ*, en l'absence de frottement:

$$J_\Delta\ddot{\theta} = -mgd\sin\theta \text{ soit } \boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{\alpha d}\sin\theta = 0}.$$

A.3) Avec l'approximation $\theta \approx \sin\theta$ on tombe sur l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{g}{\alpha d}}$ et période $\boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{\alpha d}{g}}}$.

Solution : $\boxed{\theta(t) = \theta_0\cos(\omega_0 t) + \dfrac{\dot{\theta}_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)}$ avec les conditions initiales de l'énoncé.

A.4) a) Le pendule est un système conservatif (car il n'y a pas de frottement), son énergie potentielle est l'énergie potentielle du poids : $E_p = -mg\cos\theta$. L'énergie mécanique du pendule est constante ce qui s'écrit :

$$E_m = \tfrac{1}{2}\alpha m\dot{\theta}^2 - mgd\cos\theta = \text{constante} = -mgd\cos\theta_0.$$

Ainsi : $\boxed{\tfrac{1}{2}\dot{\theta}^2 + \dfrac{g}{\alpha d}(\cos\theta_0 - \cos\theta) = 0}$.

Remarque : cette équation peut aussi être obtenue en multipliant l'équation différentielle de A.2) par $\dot{\theta}$ puis en intégrant par rapport à t.

b) D'après une formule de trigonométrie :

$$\cos\theta = 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2}, \text{ donc } \cos\theta_0 - \cos\theta = 2\sin^2\frac{\theta_0}{2}\cos^2\varphi.$$

De plus en dérivant par rapport au temps la relation de définition de φ :

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}\cos(\frac{\theta}{2}) = \left(\sin\frac{\theta_0}{2}\right)\dot{\varphi}\sin\varphi \text{ d'où } \dot{\theta}^2 = 4\left(\sin\frac{\theta_0}{2}\right)^2\frac{\cos^2\varphi}{1-(\sin\theta_0/2)^2\sin^2\varphi}\dot{\varphi}^2.$$

L'équation différentielle précédente devient : $\boxed{\dot{\varphi}^2 = \dfrac{g}{\alpha d}\left[1 - \left(\sin\dfrac{\theta_0}{2}\right)^2\sin^2\varphi\right]}$.

c) On peut tirer $\dot{\varphi}$ de l'équation précédente puis séparer les variables *t* et *φ*.

Il vient : $dt = \sqrt{\dfrac{\alpha d}{g}}\dfrac{d\varphi}{\sqrt{1-\sin^2(\theta_0/2)\sin^2\varphi}}$ (lorsque $\dot{\varphi} > 0$).

Considérons alors la moitié de période pendant laquelle θ passe de $-\theta_0$ à θ_0. Alors φ passe de $-\pi/2$ à $\pi/2$. En intégrant membre à membre l'équation précédente, il vient :

$$\frac{1}{2}T = \sqrt{\frac{\alpha d}{g}}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\sin^2(\theta_0/2)\sin^2\varphi}}.$$

Pour des oscillations d'amplitude pas trop grande, en se limitant au 2ème ordre en θ_0 :

$$T \approx 2\sqrt{\frac{\alpha d}{g}}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\theta_0}{2}\right)^2\sin^2\varphi\right)d\varphi = 2\sqrt{\frac{\alpha d}{g}}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\theta_0^2}{8}\frac{\pi}{2}\right) \text{ soit } \boxed{T \approx T_0\left(1 + \frac{\theta_0^2}{16}\right)}.$$

B- Etude du mouvement du chariot sans contact avec les butoirs

B.1) a) L'ensemble chariot + pendule est soumis aux actions extérieures suivantes :

- le poids $(m+M)\vec{g}$;
- une force de contact $\vec{R}$ exercée par le support sur le chariot ; puisque ce contact est sans frottement cette force est verticale.

Ce système est donc pseudo-isolé pour la translation suivant la direction $\vec{u}_x$. Par suite la composante de sa quantité de mouvement selon cette direction est constante ce qui s'écrit :

$$M\dot{x} + m\vec{v}_G \cdot \vec{u}_x = \text{constante}.$$

D'après les conditions initiales (système sans vitesse initiale), cette constante est nulle.
Par ailleurs, d'après la formule du torseur des vitesses :

$$\vec{v}_G = \vec{v}_A + \dot{\theta}\vec{u}_z \wedge \overrightarrow{AG} = \dot{x}\vec{u}_x + \dot{\theta}\vec{u}_z \wedge (d\sin\theta\vec{u}_x - d\cos\theta\vec{u}_y) = (\dot{x} + d\dot{\theta}\cos\theta)\vec{u}_x + d\dot{\theta}\sin\theta\vec{u}_y.$$

Il vient : $(M+m)\dot{x} + md\dot{\theta}\cos\theta = 0$ soit $\boxed{\dot{x} + \beta d\dot{\theta}\cos\theta = 0}$ (1).

b) Le chariot oscille en opposition de phase avec le pendule. Il recule quand la vitesse angulaire est positive et inversement.

B.2) a) $\mathcal{R}_{\text{chariot}}$ n'est pas galiléen car il a par rapport à $\mathcal{R}$ un mouvement de translation d'accélération $\vec{a}_{\mathcal{R}_{\text{chariot}}/\mathcal{R}} = \ddot{x}\overrightarrow{u_x}$ a priori non nulle. Dans ce référentiel, le pendule à la forme d'inertie d'entraînement $\boxed{\overrightarrow{F_{ie}} = m\vec{a}_{\mathcal{R}_{\text{chariot}}/\mathcal{R}} = -m\ddot{x}\overrightarrow{u_x}}$ appliquée en son centre d'inertie G.

b) Les actions extérieures sur le pendule sont :

- son poids de moment par rapport à l'axe Δ : $-mgd\sin\theta$;
- les actions de liaison de moment par rapport à l'axe Δ nul car il n'y a pas de frottements ;
- la force d'inertie de moment par rapport à l'axe Δ : $-m\ddot{x}d\cos\theta$

Le théorème du moment cinétique s'écrit : $\alpha md^2\ddot{\theta} = -mgd\sin\theta - m\ddot{x}d\cos\theta$, soit après simplification : $\boxed{\alpha\ddot{\theta}+\frac{g}{d}\sin\theta+\frac{\ddot{x}}{d}\cos\theta=0}$ (2)

B.3) a) L'énergie cinétique du système est : $E_c = E_{c,chariot} + E_{c,pendule}$.

Le chariot est en translation : $E_{c,chariot} = \frac{1}{2} M\dot{x}^2$.

Le mouvement du pendule est complexe, on doit utiliser le théorème de Koenig. On se rappelle que dans son référentiel barycentrique le pendule tourne autour de l'axe Gz.

$$\begin{aligned} E_{c,pendule} &= \tfrac{1}{2} J_{Gz}\dot{\theta}^2 + \tfrac{1}{2} mv_G^2 \\ &= \tfrac{1}{2}(\alpha-1)md^2\dot{\theta}^2 + \tfrac{1}{2} m(\dot{x}^2 + d\dot{\theta}^2 + 2\dot{x}d\dot{\theta}\cos\theta) \end{aligned}$$

Finalement : $\boxed{E_c = \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\alpha md^2\dot{\theta}^2 + md\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta}$.

b) Le poids du chariot ne travaille pas car son déplacement est horizontal. L'énergie potentielle du système est uniquement l'énergie potentielle de pesanteur du pendule :

$$\boxed{E_p = -mgd\cos\theta + \text{constante}}.$$

c) Le système chariot + pendule est un système <u>conservatif</u> puisqu'il n'y a aucun frottement (ni dans les contacts extérieurs, ni à l'intérieur du système). Par suite, son énergie mécanique est constante : $E_m = E_c + E_p = \text{constante}$.

Dérivons cette relation par rapport au temps. Après division par $M+m+m'$ il reste :

$$\boxed{\dot{x}\ddot{x}+\alpha\beta\dot{\theta}\ddot{\theta}+\beta d\ddot{x}\dot{\theta}\cos\theta+\beta d\dot{x}\ddot{\theta}\cos\theta-\beta d\dot{x}\dot{\theta}^2\sin^2\theta+\beta dg\dot{\theta}\sin\theta=0} \quad (3)$$

d) Cette relation n'est pas indépendante des relations (1) et (2).

B.4) a) En éliminant $\ddot{x}$ entre les relations (1) et (2) on trouve facilement :

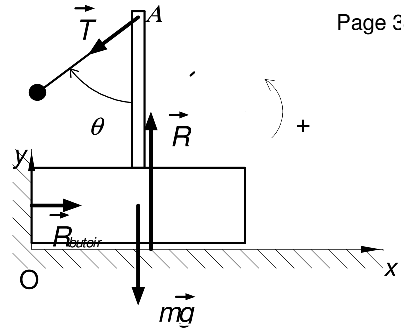
$$\boxed{(\alpha-\beta\cos^2\theta)\ddot{\theta}+\frac{g}{d}\sin\theta+\beta\dot{\theta}^2\sin\theta\cos\theta=0}.$$

b) Dans le cas des très petites oscillations, on ne garde dans cette équation que les termes du premier ordre au plus en θ et ses dérivées par rapport au temps. Par ailleurs, $\sin\theta\approx\theta$ et $\cos\theta\approx 1$ à cet ordre d'approximation. (Remarquer que le dernier terme de l'équation est du 3$^{\text{ème}}$ ordre). Il vient : $\boxed{(\alpha-\beta)\ddot{\theta}+\frac{g}{d}\theta=0}$.

c) C'est une équation différentielle d'oscillateur harmonique car $\alpha-\beta>0$ puisque $\alpha>1$ et que de manière évidente $\beta<1$. La solution correspondant aux conditions initiales : $\theta(0)=\theta_0$ et $\dot{\theta}(0)=0$ est : $\boxed{\theta(t)=\theta_0\cos\left(\sqrt{\frac{g}{(\alpha-\beta)d}}\,t\right)}$.

C- Mouvement du chariot en contact avec un butoir

C.1) a) Imaginons que le pendule est une masse suspendue à un fil. Les actions extérieures exercées sur le <u>système chariot</u> (seul) sont : son poids, la réaction du sol $\vec{R}$ (verticale puisqu'il n'y a pas de frottements), la réaction du butoir $\vec{R}_{butoir}$ et la tension $\vec{T}$ du fil. Tant que $\theta<0$, $\vec{T}$ tend à bloquer le chariot contre le butoir (cas de la figure ci-contre) et sa composante horizontale est compensée par $\vec{R}_{butoir}$; quand θ devient positif, elle tire le chariot vers la droite qui décolle alors du butoir. Conclusion : <u>Le chariot décolle du butoir quand le pendule passe par la position $\theta=0$.</u>



<u>On prendra dans la suite cet instant comme origine des temps.</u>

Remarque : Dans le cas du véritable pendule, la force exercée par celui-ci sur le chariot n'est pas colinéaire à la tige. Cependant la conclusion qualitative reste exacte.

b) A partir de l'instant t=0, on a comme à la question B.1)a) : $\dot{x}+\beta d\dot{\theta}\cos\theta=\text{constante}$. Cette constante n'est plus nulle. A t=0, le chariot n'a pas de vitesse ($\dot{x}(0)=0$), mais le pendule a déjà acquis une certaine vitesse angulaire que l'on peut calculer en utilisant la relation de la question A.4)a) ; il vient : $\dot{\theta}(0)=\sqrt{\frac{2g}{\alpha d}(1-\cos\theta_0)}$.

Finalement la relation (1) est remplacée par : $\boxed{\dot{x}+\beta d\dot{\theta}\cos\theta=\beta\sqrt{\frac{gd(1-\cos\theta_0)}{\alpha}}}$ (1').

c) Le mouvement du chariot est donné par : $\dot{x}=\beta\sqrt{\frac{gd(1-\cos\theta_0)}{\alpha}}-\beta d\dot{\theta}\cos\theta$. Le premier terme est constant et positif, il donne une dérive du chariot vers la droite ; le deuxième terme change de signe au fil des oscillations de θ. On a donc un mouvement d'ensemble uniforme auquel se superpose une oscillation en opposition de phase avec le pendule.

C.2) a) La relation (2) est toujours valable. En la combinant avec (1') on retrouve l'équation différentielle en θ de B.4)a).

b) Dans le cas des très petites oscillations on retrouve l'équation différentielle de B.4)b) .

Nouvelles conditions initiales : $\theta(0)=0$ et $\dot{\theta}(0)=\sqrt{\frac{2g}{\alpha d}(1-\cos\theta_0)}$. La solution est :

$$\boxed{\theta(t)=\sqrt{\frac{2(\alpha-\beta)}{\alpha}(1-\cos\theta_0)}\,\sin\left(\sqrt{\frac{g}{(\alpha-\beta)d}}\,t\right)}$$