

MP 08/09 – Corrigé du D.S. de PHYSIQUE n°2**1^{er} problème**

1) Il faut que l'objet diffractant ait une dimension caractéristique dans la direction Oy très grande devant sa dimension caractéristique suivant Ox .

2.a) Principe d'Huygens-Fresnel :

- tout point de l'objet diffractant se comporte comme une source secondaire (d'amplitude proportionnelle à l'élément de surface et à l'amplitude de l'onde incidente) ;
- les sources secondaires sont cohérentes entre elles (contribution de Fresnel)

2.b) Notons H la projection orthogonale de O sur le rayon incident arrivant en M et K la projection orthogonale de M sur le rayon diffracté en O dans la direction repérée par l'angle α . D'après le théorème de Malus, H et O sont dans un même plan d'onde de l'onde incidente ; de même M et K sont dans un même plan d'onde relatif à la direction α . Ainsi, la différence de marche à l'infini des deux rayons diffractés en M et O est :

$$\delta = \overline{HM} - \overline{OK} = -x(\sin \alpha - \sin \alpha_0).$$

Par suite : $\varphi(x, \alpha) = \frac{2\pi}{\lambda} \delta = -\frac{2\pi x}{\lambda} (\sin \alpha - \sin \alpha_0)$ qui est la formule

demandée avec $f(\alpha) = -\sin \alpha$.

3.a) $t(x) = 1$ si $|x| < a/2$, 0 sinon.

$$3.b) \underline{a}_1(\alpha) = \underline{C} \int_{-a/2}^{a/2} \exp\left(-\frac{2\pi \sin \alpha}{\lambda} x\right) dx = \underline{C} \frac{\sin \frac{\pi a \sin \alpha}{\lambda}}{\frac{\pi a \sin \alpha}{\lambda}} ;$$

$$I_1(\alpha) = |\underline{a}_1(\alpha)|^2 = |\underline{C}|^2 \left(\frac{\sin \frac{\pi a \sin \alpha}{\lambda}}{\frac{\pi a \sin \alpha}{\lambda}} \right)^2 = I_{\max 1} \left(\frac{\sin \frac{\pi a \sin \alpha}{\lambda}}{\frac{\pi a \sin \alpha}{\lambda}} \right)^2$$

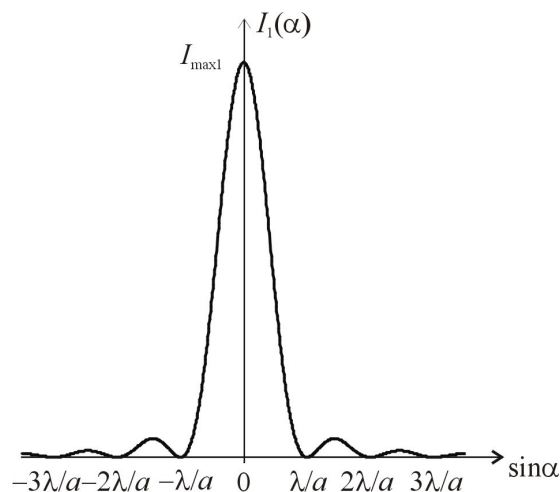
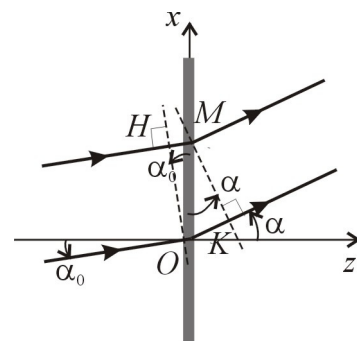
avec $I_{\max 1} = |\underline{C}|^2 a^2$.

3.c) $I(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi a \sin \alpha}{\lambda} = n\pi$ avec n entier relatif $\neq 0$; $\alpha_1 = \arcsin\left(\frac{\lambda}{a}\right)$.

3.d) Cf. figure ci-contre. 3.e) $\alpha_1 \approx \frac{\lambda}{a} = 5,5 \cdot 10^{-2}$ rad.

4.a)

$$\begin{aligned} \underline{a}_2(\alpha) &= \underline{C} \int_{-b/2-a/2}^{-b/2+a/2} \exp\left(-\frac{2\pi \sin \alpha}{\lambda} x\right) dx + \underline{C} \int_{b/2-a/2}^{b/2+a/2} \exp\left(-\frac{2\pi \sin \alpha}{\lambda} x\right) dx \\ &= \underline{C} \int_{-a/2}^{a/2} \exp\left(-\frac{2\pi \sin \alpha}{\lambda} \left(x - \frac{b}{2}\right)\right) dx + \underline{C} \int_{-a/2}^{a/2} \exp\left(-\frac{2\pi \sin \alpha}{\lambda} \left(x + \frac{b}{2}\right)\right) dx \\ &= \underline{C} \exp\left(i \frac{\pi b \sin \alpha}{\lambda}\right) \int_{-a/2}^{a/2} \exp\left(-\frac{2\pi \sin \alpha}{\lambda} x\right) dx + \underline{C} \exp\left(-i \frac{\pi b \sin \alpha}{\lambda}\right) \int_{-a/2}^{a/2} \exp\left(-\frac{2\pi \sin \alpha}{\lambda} x\right) dx \\ &= 2\underline{C} \cos\left(\frac{\pi b \sin \alpha}{\lambda}\right) \int_{-a/2}^{a/2} \exp\left(-\frac{2\pi \sin \alpha}{\lambda} x\right) dx = 2\underline{C} \cos\left(\frac{\pi b \sin \alpha}{\lambda}\right) \frac{\sin \frac{\pi a \sin \alpha}{\lambda}}{\frac{\pi a \sin \alpha}{\lambda}} \end{aligned}$$



$$I_2(\alpha) = |a_2(\alpha)|^2 = 4|C|^2 \cos^2\left(\frac{\pi b \sin \alpha}{\lambda}\right) \underbrace{\left(\frac{\sin \frac{\pi a \sin \alpha}{\lambda}}{\frac{\pi \sin \alpha}{\lambda}}\right)^2}_{\text{diffraction}} = 2|C|^2 a^2 \underbrace{\left(\frac{\sin \frac{\pi a \sin \alpha}{\lambda}}{\frac{\pi a \sin \alpha}{\lambda}}\right)^2}_{\text{diffraction}} \underbrace{\left(1 + \cos\left(\frac{2\pi b \sin \alpha}{\lambda}\right)\right)}_{\text{interférence}}$$

qui est la formule demandée avec $I_{\max 2} = 4|C|^2 a^2$, $F = \frac{\pi a \sin \alpha}{\lambda}$ et $G = \frac{2\pi b \sin \alpha}{\lambda}$.

4.b) Le terme d'interférence s'annule si :

$$\frac{2\pi b \sin \alpha}{\lambda} = \pi + 2n\pi \text{ avec } n \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \sin \alpha = \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{b}.$$

La plus petite valeur positive est $\alpha_2 = \frac{\lambda}{2b}$.

Vérification : $b > a$ donc $\alpha_2 < \alpha_1$.

4.c) Cf. figure ci-contre.

4.d) $\alpha_2 \approx \frac{\lambda}{2b} = 5,5 \cdot 10^{-3} \text{ rad.}$

Les franges brillantes sont données par :

$$\frac{2\pi b \sin \alpha}{\lambda} = 2n\pi \text{ soit } \sin \alpha = n \frac{\lambda}{b} = 2n \sin \alpha_2.$$

Elles sont visibles dans la tache centrale de diffraction d'une fente si de plus $-\alpha_1 < \alpha < \alpha_1$ (inégalités strictes car l'intensité est nulle en $\pm\alpha_1$), soit si $-\frac{\sin \alpha_1}{2 \sin \alpha_2} < n < \frac{\sin \alpha_1}{2 \sin \alpha_2}$ donc si $-\frac{b}{a} < n < \frac{b}{a}$.

Numériquement : $\frac{b}{a} = 5$ donc $n \in \{-4, -3, \dots, 3, 4\}$, il y a 9 franges dans la tache centrale de diffraction.

4.e) Pour projeter la figure de diffraction à l'infini sur le capteur CCD il faut placer le capteur dans le plan focal image de la lentille convergente. La largeur de la tache centrale de diffraction est $2f' \tan \alpha_1 \approx 2f' \alpha_1 = 2,2 \text{ cm}$; le capteur doit avoir une largeur minimum de 2,2 cm.

4.f) $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi a \sin \alpha / \lambda)}{\pi a \sin \alpha / \lambda} = 1$ donc l'intensité tend vers $I_{\max 2} \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi b \sin \alpha}{\lambda}\right)\right)$; dans cette

expression il ne reste que le terme d'interférence, il n'y a plus de modulation de l'intensité par le phénomène de diffraction car celui-ci est maximal.

5.a) Les deux sources étant incohérentes entre elles on doit ajouter les intensités qu'elles apportent.

Pour obtenir l'intensité due à la source située dans la direction repérée par α_0 , il suffit de remplacer $\sin \alpha$

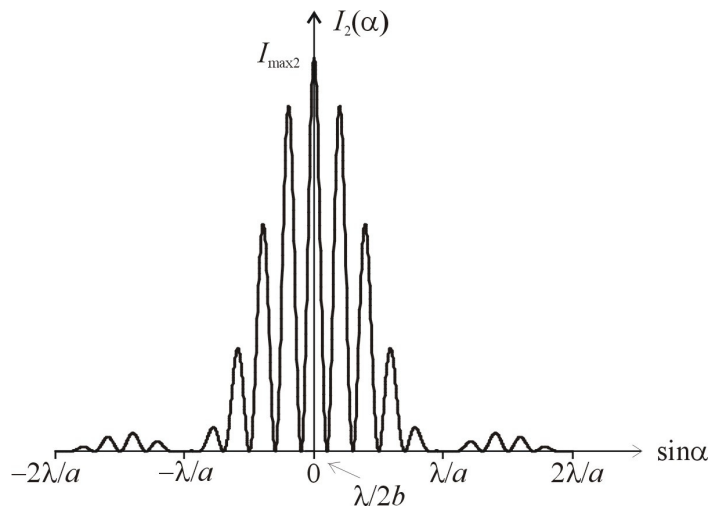
par $\sin \alpha - \sin \alpha_0$ dans l'expression précédente : $I_{\text{source1}}(\alpha) = I_{2\max} \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi b(\sin \alpha - \sin \alpha_0)}{\lambda}\right)\right)$.

De même pour la source située dans la direction $-\alpha_0$: $I_{\text{source2}}(\alpha) = I_{2\max} \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi b(\sin \alpha + \sin \alpha_0)}{\lambda}\right)\right)$.

L'intensité totale est donc :

$$\begin{aligned} I_3(\alpha) &= I_{\text{source1}}(\alpha) + I_{\text{source2}}(\alpha) = I_{2\max} \left[2 + \cos\left(\frac{2\pi b(\sin \alpha - \sin \alpha_0)}{\lambda}\right) + \cos\left(\frac{2\pi b(\sin \alpha + \sin \alpha_0)}{\lambda}\right) \right] \\ &= 2I_{\max 2} \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi b \sin \alpha_0}{\lambda}\right) \cos\left(\frac{2\pi b \sin \alpha}{\lambda}\right) \right] \end{aligned}$$

qui est la formule demandée avec : $I_{\text{moy3}} = 2I_{\max 2}$, $K = \cos\left(\frac{2\pi b \sin \alpha_0}{\lambda}\right)$ et $H = \frac{2\pi b \sin \alpha}{\lambda}$.



5.b) I_3 ne dépend pas de α si $K = 0$ (K est le contraste) soit si :

$$\frac{2\pi b \sin \alpha_0}{\lambda} = (2n+1)\pi \text{ avec } n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow b = (2n+1) \frac{\lambda}{2 \sin \alpha_0} = b_n$$

Il y a alors brouillage des franges parce que les franges sombres données par l'une des deux sources sont dans les mêmes directions que les franges brillantes données par l'autre source (« anti-coïncidence »).

5.c) $b_0 = b$ si : $\frac{\lambda}{2 \sin \alpha_0} = b \Leftrightarrow \sin \alpha_0 = \frac{\lambda}{2b} = \sin \alpha_2 \Leftrightarrow \alpha_0 = \alpha_2$.

$b_n = b$ si $\sin \alpha_0 = (2n+1) \frac{\lambda}{2b}$ et alors $\alpha_0 > \alpha_1$ si : $(2n+1) \frac{\lambda}{2b} > \frac{\lambda}{a} \Leftrightarrow n > \frac{b}{2a} - 1 = 4,5$;

la plus petite valeur de n convenable est 5.

5.d) *i)* il y a coïncidence entre les franges brillantes (ou sombres) des deux sources : le contraste est maximal partout.

ii) il y a anti-coïncidence : le contraste est quasi-nul (mais pas exactement nul parce que deux franges brillantes consécutives n'ont pas la même intensité, en particulier bord de la tache centrale de diffraction, le contraste est un peu plus important)

iii) il y a coïncidence : le contraste est maximal partout, mais il s'agit des franges des deux sources juxtaposées car les tache centrales de diffraction ne se recouvrent pas.

iv) il y a anti-coïncidence mais le contraste est pratiquement maximal partout car les tache centrales de diffraction ne se recouvrent pas.

6.a) L'amplitude diffractée est :

$$\begin{aligned} \underline{a}_4(\alpha) &= \underline{C} \int_{-a/2}^{a/2} \left(1 - \frac{|x|}{a}\right) \exp\left[-i \frac{2\pi \sin \alpha}{\lambda} x\right] dx = \underline{C} a \int_{u=-1/2}^{1/2} (1 - 2|u|) \exp\left[-i \frac{2\pi a \sin \alpha}{\lambda} u\right] du \\ &= \underline{C} a \frac{8 \sin^2\left(\frac{\pi a \sin \alpha}{2\lambda}\right)}{\left(\frac{2\pi a \sin \alpha}{\lambda}\right)^2} = \frac{1}{2} \underline{C} a \frac{\sin^2\left(\frac{\pi a \sin \alpha}{2\lambda}\right)}{\left(\frac{\pi a \sin \alpha}{2\lambda}\right)^2} \end{aligned}$$

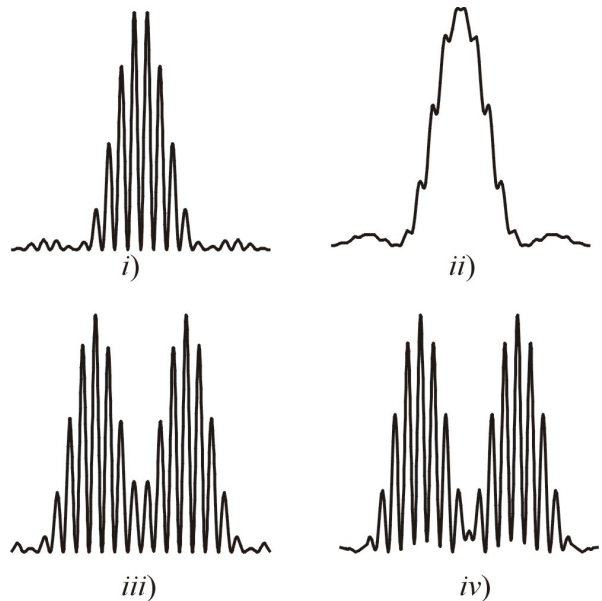
$$\text{et l'intensité : } I_4(\alpha) = \frac{1}{4} |\underline{C}|^2 a^2 \left(\frac{\sin \frac{\pi a \sin \alpha}{2\lambda}}{\frac{\pi a \sin \alpha}{2\lambda}}\right)^4 = I_{\max 4} \left(\frac{\sin \frac{\pi a \sin \alpha}{2\lambda}}{\frac{\pi a \sin \alpha}{2\lambda}}\right)^4 \text{ avec } I_{\max 4} = \frac{1}{4} |\underline{C}|^2 a^2.$$

6.b) I_4 s'annule pour la première fois pour α_4 tel que $\sin \alpha_4 = \frac{2\lambda}{a} = 2 \sin \alpha_1$ soit $\alpha_4 \approx 2\alpha_1$. La largeur du pic central de diffraction est donc doublée par rapport à la fente de largeur a . On peut comprendre ce fait en disant que la fonction de transfert « en dégradé » des bords au centre revient à rendre la fente plus étroite.

D'autre part : $I_{\max 4} = \frac{1}{4} I_{\max 1}$ ce qui est normal : il y a moins de lumière qui passe à travers la diapositive qu'à travers la simple fente.

6.c) Les maxima secondaires de $I_4/I_{\max 4}$ sont ceux de la fonction $\left(\frac{\sin u}{u}\right)^4$, ils sont très inférieurs à ceux

de $I_1/I_{\max 1}$ qui sont ceux de $\left(\frac{\sin u}{u}\right)^2$.



7.a) Le résultat s'obtient avec des intégrations par parties successives :

$$\begin{aligned} \underline{a}(\alpha) &= \underline{C} \int_{-a'}^{a'} t(x) e^{iux} dx = \underline{C} \left\{ \left[\frac{t(x)}{iu} e^{iux} \right]_{-a'}^{a'} - \frac{1}{iu} \int_{-a'}^{a'} t'(x) e^{iux} dx \right\} \\ &= \underline{C} \left\{ \left[\frac{t(x)}{iu} e^{iux} - \frac{t'(x)}{(iu)^2} e^{iux} \right]_{-a'}^{a'} + \frac{1}{(iu)^2} \int_{-a'}^{a'} t''(x) e^{iux} dx \right\} \\ &= \underline{C} \left\{ \left[\frac{t(x)}{iu} e^{iux} - \frac{t'(x)}{(iu)^2} e^{iux} + \frac{t''(x)}{(iu)^3} e^{iux} \right]_{-a'}^{a'} - \frac{1}{(iu)^3} \int_{-a'}^{a'} t^{(3)}(x) e^{iux} dx \right\} \text{ etc....} \end{aligned}$$

Finalemment :

$$\begin{aligned} \underline{a}(\alpha) &= \underline{C} \left\{ \left[e^{iux} \left(\frac{t(x)}{iu} + \frac{t''(x)}{(iu)^3} + \dots + \frac{t^{(2p)}(x)}{(iu)^{2p+1}} + \dots \right) e^{iux} + \dots \right]_{-a'}^{a'} - \left[e^{iux} \left(\frac{t'(x)}{(iu)^2} + \frac{t^{(3)}(x)}{(iu)^4} + \dots + \frac{t^{(2p+1)}(x)}{(iu)^{2p+2}} + \dots \right) \right]_{-a'}^{a'} \right\} \\ &= \underline{C} \left\{ 2i \sin(ua') \left(\frac{A_0}{iu} + \frac{A_2}{(iu)^3} + \dots + \frac{A_{2p}}{(iu)^{2p+1}} + \dots \right) - 2 \cos(ua') \left(\frac{A_1}{(iu)^2} + \frac{A_3}{(iu)^4} + \dots + \frac{A_{2p+1}}{(iu)^{2p+2}} + \dots \right) \right\} \\ &= \underline{2C} \left\{ \sin(ua') \left(\frac{A_0}{u} - \frac{A_2}{u^3} + \dots + (-1)^p \frac{A_{2p}}{u^{2p+1}} + \dots \right) + \cos(ua') \left(\frac{A_1}{u^2} - \frac{A_3}{u^4} + \dots + (-1)^p \frac{A_{2p+1}}{u^{2p+2}} + \dots \right) \right\} \end{aligned}$$

7.b) Dans le cas de la fente seule : $A_0 = 1$ et $A_2 = A_3 = \dots = 0$, il reste :

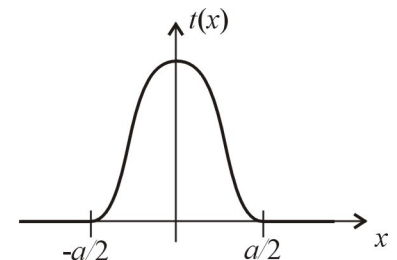
$$\underline{a}_1(\alpha) = \underline{2C} \frac{\sin(ua')}{u} = \underline{2C} \frac{\sin\left(\frac{2\pi \sin \alpha}{\lambda} \frac{a}{2}\right)}{\frac{2\pi \sin \alpha}{\lambda}} = \underline{Ca} \frac{\sin\left(\frac{\pi a \sin \alpha}{\lambda}\right)}{\frac{\pi a \sin \alpha}{\lambda}}$$

qui est le bon résultat.

La formule est fautive dans le cas de a_4 car la fonction de transparence ne vérifie pas les hypothèses dans ce cas (elle est non dérivable en 0).

7.c) Pour que le premier terme non nul dans le développement de l'intensité soit en u^{-6} , il faut et suffit que le premier terme non nul dans le développement ci-dessus de l'amplitude soit en u^{-3} , donc que : $A_0 = 0$ et $A_2 = 0$, ce qui revient à dire que $t(x)$ soit continue et dérivable en $\pm a/2$ soit qu'elle ait l'allure ci-contre.

On peut proposer la formule : $t(x) = \cos^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)$ pour $|x| \leq a$.



2^{ème} problème

A.1) Pour faire de interférences, deux ondes lumineuses doivent être cohérentes, c'est-à-dire avoir un déphasage stable dans le temps.

Pour obtenir des ondes cohérentes, on doit dédoubler une onde unique.

A.2) Une onde monochromatique est une onde à variation sinusoïdale dans le temps soit de la forme : $s(M, t) = A(M) \cos(\omega t - \varphi(M))$.

Pour produire une onde quasiment monochromatique on peut utiliser :

- une source laser,
- une lampe spectrale et un filtre interférentiel (pour sélectionner une seule raie de la lampe).

A.3.a) Pour obtenir une source ponctuelle quasi-monochromatique on peut :

- faire converger le laser en un point à l'aide d'une lentille,
- placer devant la lampe spectrale un diaphragme de très faible ouverture.

A.3.b) La source étant ponctuelle les interférences sont non localisées : on peut placer l'écran n'importe où dans le champ d'interférence (c'est-à-dire à la sortie de l'interféromètre).

Dans le cas de miroir parallèles, les deux images de la source ponctuelle principale (dites sources secondaires) sont sur un axe perpendiculaire aux miroirs donc perpendiculaire à l'écran. On observe donc sur l'écran des franges circulaires (anneaux). Ces franges sont centrées sur l'intersection de l'axe des sources secondaires et de l'écran ; les anneaux ne sont pas équidistants mais ils se resserrent lorsqu'on s'éloigne du centre.

A.3.c) Lorsqu'on remplace la source ponctuelle par une source étendue on voit le contraste de la figure d'interférences diminuer. On peut retrouver une figure de contraste maximal en plaçant l'écran à l'infini, soit dans le plan focal d'une lentille convergente (on a des interférences localisées). La figure d'interférences porte alors le nom de « anneaux à l'infini » ou de « franges d'égale inclinaison ».

A.4.a) On constate sur la figure ci-contre que la différence de marche est la même pour les deux couples de rayons cohérents provenant des deux points différents de la source, S_1 et S_2 (ou plutôt de leurs symétriques S'_1 et S'_2) par rapport à la séparatrice (SP). Ainsi les figures d'interférences données par ces deux points sources sont en coïncidence et il n'y a pas de perte de contraste.

A.4.b) L'épaisseur de la lame d'air est $e = |z - z_0|$. La différence de marche deux rayons cohérents est :

$$\delta = IJ + JK = IJ(1 + \cos(2i)) = \frac{e}{\cos i}(1 + \cos(2i)) = 2e \cos i$$

avec $\tan i = \frac{r}{f'}$.

L'angle i étant petit : $i \approx \frac{r}{f'}$, $\cos i \approx 1 - \frac{i^2}{2} \approx 1 - \frac{r^2}{2f'^2}$.

Il vient finalement : $\delta = 2e \left(1 - \frac{r^2}{2f'^2}\right)$.

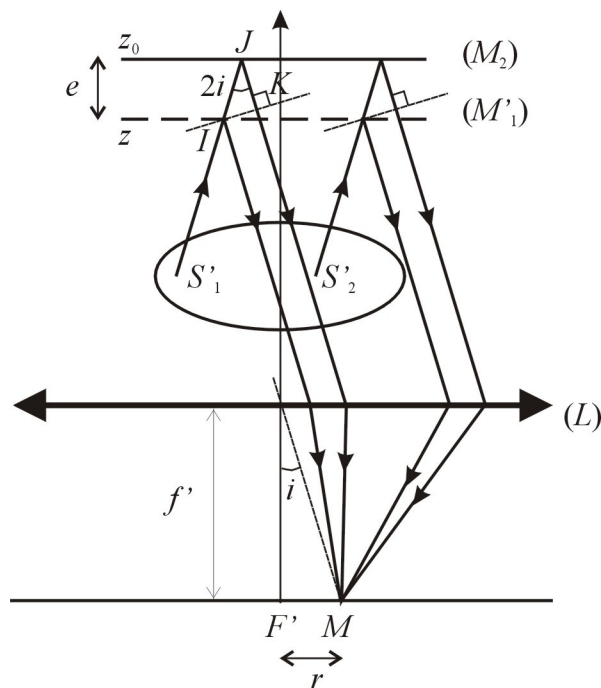
A.4.c) L'ordre d'interférence en M est : $p = \frac{\delta}{\lambda_0} = \frac{2|z - z_0|}{\lambda_0} \left(1 - \frac{r^2}{2f'^2}\right) = m \left(1 - \frac{r^2}{2f'^2}\right)$.

Il décroît avec r ; le $n^{\text{ième}}$ anneau brillant correspond donc à l'ordre d'interférence $p_n = m - n$ et son rayon

r_n vérifie : $m \left(1 - \frac{r_n^2}{2f'^2}\right) = m - n \Leftrightarrow r_n = f' \sqrt{\frac{2n}{m}}$.

De même, le $n^{\text{ième}}$ anneau sombre correspond à l'ordre d'interférence $p'_n = m - n + \frac{1}{2}$ et son rayon r'_n

vérifie : $m \left(1 - \frac{r_n'^2}{2f'^2}\right) = m - n + \frac{1}{2} \Leftrightarrow r'_n = f' \sqrt{\frac{2n+1}{m}}$.



B.1) La position $z = z_0$ est appelée contact optique. Dans cette position, on voit sur l'écran un éclairement uniforme.

B.2) La différence de marche en F' ($r = 0$) est $\delta = 2e = 2|z - z_0|$, le déphasage $\Delta\varphi = \frac{2\pi\delta}{\lambda_0} = 4\pi\sigma_0|z - z_0|$.

D'après la formule des interférences à deux ondes l'intensité reçue par le détecteur est donc :

$$I(z) = 2I_0(1 + \cos(\Delta\varphi)) = 2I_0(1 + \cos(4\pi\sigma_0(z - z_0))).$$

La fonction cosinus étant paire on peut supprimer la valeur absolue.

B.3.a) Les ondes correspondant à deux intervalles spectraux différents sont incohérentes entre elles. On doit donc ajouter leurs intensités.

D'après la question précédente, l'intensité correspondant à l'intervalle $[\sigma, \sigma + d\sigma]$ est :

$$dI = 2Gd\sigma(1 + \cos(4\pi\sigma(z - z_0))).$$

B.3.b) L'intensité totale en F' est :

$$\begin{aligned} I(z) &= \int dI = \int_{\sigma = \sigma_0 - \frac{\Delta\sigma}{2}}^{\sigma_0 + \frac{\Delta\sigma}{2}} 2G(1 + \cos(4\pi\sigma(z - z_0))) d\sigma = 2G \left[\sigma + \frac{1}{4\pi(z - z_0)} \sin(4\pi\sigma(z - z_0)) \right]_{\sigma_0 - \frac{\Delta\sigma}{2}}^{\sigma_0 + \frac{\Delta\sigma}{2}} \\ &= 2G\Delta\sigma \left[1 + \frac{\sin\left(4\pi(z - z_0)\left(\sigma_0 + \frac{\Delta\sigma}{2}\right)\right) - \sin\left(4\pi(z - z_0)\left(\sigma_0 - \frac{\Delta\sigma}{2}\right)\right)}{4\pi\Delta\sigma(z - z_0)} \right] \\ &= 2G\Delta\sigma \left[1 + \frac{\sin(2\pi\Delta\sigma(z - z_0))}{2\pi\Delta\sigma(z - z_0)} \cos(4\pi\sigma_0(z - z_0)) \right] \end{aligned}$$

C'est bien la formule attendue avec : $I_0 = G\Delta\sigma$ et $V(z - z_0) = \frac{\sin(2\pi\Delta\sigma(z - z_0))}{2\pi\Delta\sigma(z - z_0)}$.

B.4.a) Les limites du spectre visibles sont : $\lambda_1 = 400 \text{ nm}$ et $\lambda_2 = 750 \text{ nm}$.

B.4.b) On veut : $\sigma_0 - \frac{\Delta\sigma}{2} = \frac{1}{\lambda_2}$ et $\sigma_0 + \frac{\Delta\sigma}{2} = \frac{1}{\lambda_1}$. Il faut prendre :

$$\sigma_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} \right) = 1,92 \cdot 10^6 \text{ m}^{-1} \quad \text{et} \quad \Delta\sigma = \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} = 1,17 \cdot 10^6 \text{ m}^{-1}.$$

B.5) Les intensités des deux ondes sortant de l'interféromètre sont maintenant : $I_1 = I_0$ pour l'onde qui s'est réfléchi sur (M_1) et $I_2 = \rho^2 I_0$ pour l'onde qui s'est réfléchi sur la surface plane remplaçant (M_2). L'intensité au niveau du détecteur devient donc :

$$I(z) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\Delta\varphi) = I_0(1 + \rho^2) \left(1 + \frac{2\rho}{1 + \rho^2} \cos(4\pi\sigma_0(z - z_0)) \right)$$

La figure d'interférence a maintenant un contraste moins bon égal à $\frac{2\rho}{1 + \rho^2}$ au lieu de 1.

B.6.a) On a interférence de $N + 1$ ondes cohérentes : l'onde réfléchi sur (M_1) et les N ondes réfléchies sur les surfaces semi réfléchissantes. Prenons l'onde réfléchi sur (M_1) pour référence dont l'amplitude complexe en F' est dès lors réelle est vaut A_0 . Le déphasage de l'onde réfléchi sur la surface numéro i par rapport à cette onde est : $\varphi_i = 4\pi\sigma_0(z_i - z)$ et son amplitude de cette onde est $\rho_i A_0$; son amplitude complexe en F' est donc : $\rho_i A_0 e^{i\varphi_i}$. L'amplitude lumineuse totale en F' est ainsi : $\underline{a} = A_0 + \sum_{i=1}^N \rho_i A_0 e^{i\varphi_i}$.

On en déduit l'intensité :

$$I = \underline{aa^*} = A_0^2 \left(1 + \sum_{i=1}^N \rho_i e^{i\varphi_i} \right) \left(1 + \sum_{i=1}^N \rho_i e^{-i\varphi_i} \right) = A_0^2 \left(1 + \sum_{i=1}^N \rho_i (e^{i\varphi_i} + e^{-i\varphi_i}) + \underbrace{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \rho_i \rho_j e^{i\varphi_i} e^{-i\varphi_j}}_{\text{terme du second ordre}} \right)$$

$$\approx A_0^2 \left(1 + 2 \sum_{i=1}^N \rho_i \cos \varphi_i \right)$$

C'est le résultat demandé avec : $I_0 = A_0^2$ et $\varphi_i = 4\pi\sigma_0(z_i - z)$.

B.6.b) De manière analogue au B.3.b), on trouve pour une raie à profil rectangulaire :

$$I(z) = \int_{\sigma_0 - \frac{\Delta\sigma}{2}}^{\sigma_0 + \frac{\Delta\sigma}{2}} G d\sigma \left(1 + 2 \sum_{i=1}^N \rho_i \cos(4\pi\sigma(z_i - z)) \right) d\sigma = G\Delta\sigma \left[1 + 2 \sum_{i=1}^N \rho_i \frac{\sin(2\pi\Delta\sigma(z_i - z))}{2\pi\Delta\sigma(z_i - z)} \cos(4\pi\sigma_0(z_i - z)) \right],$$

soit en reprenant les grandeurs définies à cette question :

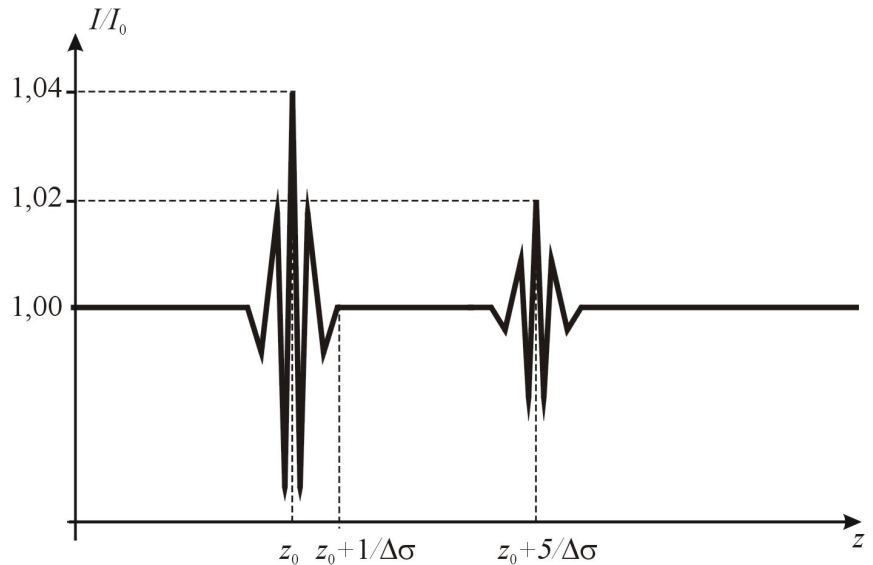
$$I(z) = I_0 \left[1 + 2 \sum_{i=1}^N \rho_i V(z_i - z) \cos(4\pi\sigma_0(z_i - z)) \right].$$

B.6.c) On trouve deux signaux analogues à celui de la figure 2b de l'énoncé centrés sur $z_1 = z_0$ et $z_2 = z_0 + \frac{5}{\Delta\sigma}$, de valeurs maximales égales respectivement à $1 + \rho_1 = 1,04$ et $1 + \rho_2 = 1,02$.

B.6.d) On différencie bien les signaux venant des diverses couches à condition que

$$z_{i+1} - z_i > \frac{2}{\Delta\sigma} = 1,70 \mu\text{m} \text{ qui est donc}$$

la limite de résolution.



B.6.e) Non car dans le cas du laser (lumière quasiment monochromatique) $\frac{1}{\Delta\sigma}$ est beaucoup trop grand !

C.1) D'après B.3.a) : $dI = 2G d\sigma (1 + \cos(4\pi\sigma z_0))$ soit $f(\sigma) = 2G(1 + \cos(4\pi\sigma z_0))$.

C.2.a)

$$R(u) = \int_{\sigma_0 - \frac{\Delta\sigma}{2}}^{\sigma_0 + \frac{\Delta\sigma}{2}} 2G(1 + \cos(4\pi\sigma z_0)) \cos(4\pi\sigma u) d\sigma$$

$$= 2G \int_{\sigma_0 - \frac{\Delta\sigma}{2}}^{\sigma_0 + \frac{\Delta\sigma}{2}} \left(\cos(4\pi\sigma u) + \frac{1}{2} \cos(4\pi\sigma(u + z_0)) + \frac{1}{2} \cos(4\pi\sigma(u - z_0)) \right) d\sigma$$

$$= F(u) + \frac{1}{2} F(u + z_0) + \frac{1}{2} F(u - z_0)$$

où l'on a posé :

$$F(u) = 2G \int_{\sigma_0 - \frac{\Delta\sigma}{2}}^{\sigma_0 + \frac{\Delta\sigma}{2}} \cos(4\pi\sigma u) d\sigma = 2G\Delta\sigma \frac{\sin(2\pi\Delta\sigma u)}{2\pi\Delta\sigma u} \cos(4\pi\sigma_0 u) = 2G\Delta\sigma V(u) \cos(4\pi\sigma_0 u)$$

C.2.b) Voir figure ci-contre.

C.2.c) D'après ce graphe, si $u > d$ alors $F(u) \approx 0$, si de plus $z_0 > d$, $F(u + z_0) \approx 0$, donc $F(u + z_0) \approx 0$; finalement :

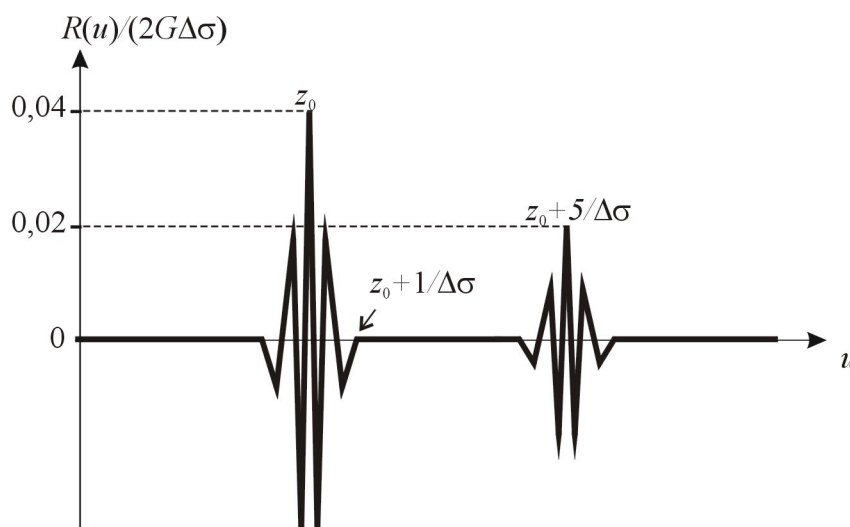
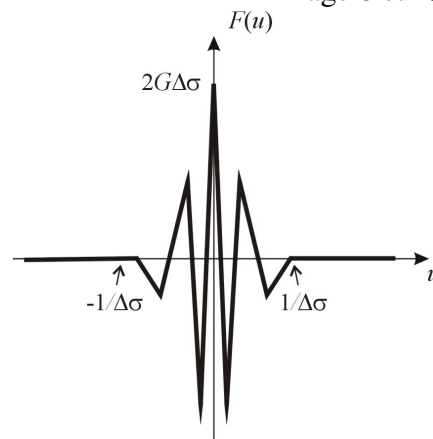
$$R(u) \approx \frac{1}{2} F(u - z_0).$$

C.3.a) $f(\sigma) \approx G \left(1 + 2 \sum_{i=1}^N \rho_i \cos(4\pi\sigma z_i) \right)$.

C.3.b) $R(u) = \frac{1}{2} F(u) + \sum_{i=1}^N \rho_i F(u - z_i) + \sum_{i=1}^N \rho_i F(u + z_i)$

C.3.c) On suppose tous les $z_i > d$ et $u > d$, on a alors :

$$R(u > d) \approx \sum_{i=1}^N \rho_i F(u - z_i).$$



C.3.d) Même réponse qu'à la question B.6.d).

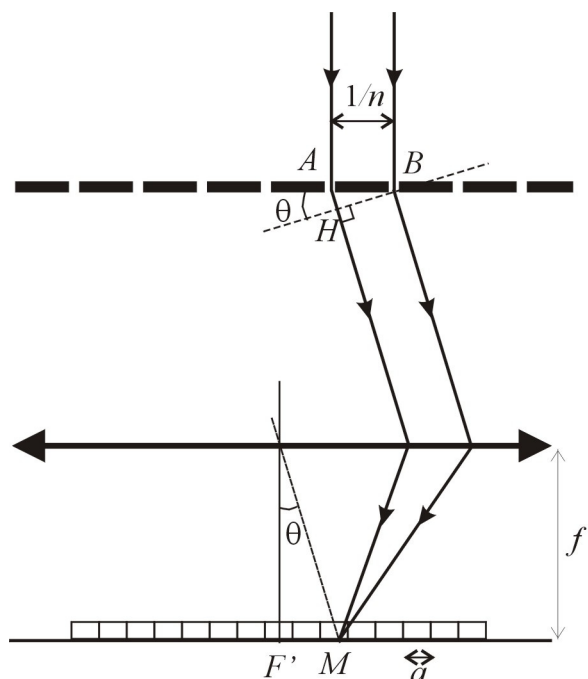
C.3.e) Avantage : pas besoin de « chariotier », inconvénient : il faut faire le spectre $f(\sigma)$ (avec un réseau par exemple, cf. partie suivante) et le calcul numérique de $R(u)$. Les deux méthodes ont la même performance.

D.1) Les nL ondes diffractées par les traits du réseau doivent être toutes en phase.

Or, la différence de marche, à l'infini dans la direction repérée par l'angle θ , entre les ondes diffractées par deux traits consécutifs du réseau est : $\delta = AH = \frac{1}{n} \sin \theta$ (cf. figure

ci-contre). Les directions θ dans lesquelles on trouve de la lumière diffractée sont donc celles qui vérifient : $\delta = k\lambda$ soit $\sin \theta_k = kn\lambda$ où k est un entier que l'on appelle ordre de diffraction.

D.2) Le point M du plan focal de la lentille correspondant à la direction θ est tel que : $x_M = \overline{F'M} = f' \tan \theta \approx f' \theta$ (dans les conditions de Gauss). La largeur de la tache sur l'écran provenant de la largeur angulaire du pic est donc : $\Delta x_M \approx f' \Delta \theta$.



Or : $\Delta(\sin \theta) = \frac{2\lambda}{L} \approx \Delta\theta$. Il vient donc : $\Delta x_M \approx \frac{2\lambda f'}{L}$.

Pour la longueur d'onde $\lambda_2 = 750\text{nm}$ ou trouve avec les valeurs de l'énoncé : $\Delta x_M \approx 7,5\ \mu\text{m}$, valeur qui est largement inférieure à la dimension $a = 100\ \mu\text{m}$ d'une cellule du capteur.

Dans la pratique, cette tache est plus large à cause de la diffraction par la lentille.

D.3) Nous supposons que l'ordre de diffraction est l'ordre $k = 1$ (détail non donné par l'énoncé).

On a $x_M = f'\theta \approx f'n\lambda$ (en utilisant la formule du réseau); une cellule de largeur a reçoit donc les longueurs d'onde d'un intervalle de largeur $\delta\lambda$ telle que : $a = \delta x_M = f'n\delta\lambda$ soit $\delta\lambda = \frac{a}{f'n}$.

On en déduit la largeur en nombre d'onde : $\delta\sigma = \delta\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \frac{\delta\lambda}{\lambda^2} = \frac{a}{f'n\lambda^2}$.

Numériquement : pour $\lambda_1 = 400\text{nm}$ $\delta\sigma = 12500\text{m}^{-1}$ et pour $\lambda_2 = 750\text{nm}$ $\delta\sigma = 3555\text{m}^{-1}$.

D.4) Dans l'approximation de Gauss (obligatoire pour le bon fonctionnement de la lentille $\delta\lambda$ est indépendant de λ donc de la position du capteur !

E.1) L'écran étant dans le plan focal de la lentille (L_P), si on veut observer l'image des miroirs sur l'écran il faut que les objectifs (L_1) et (L_2) les envoient à l'infini : chaque miroir doit donc être dans le plan focal objet de l'objectif placé devant lui.

E.2) On devrait observer un éclaircissement uniforme.

E.3.a) Figure ci-contre.

E.3.b) Les deux rayons proviennent d'un même point de la source étendue car celle-ci est dans le plan focal de la lentille (L_E). D'après le théorème de Malus (les surfaces d'ondes sont orthogonales aux rayons lumineux), la différence de marche de ces rayons est : $\delta(M) = HO_2 + JK = 2d \sin i$. Or :

$$i \approx \tan i = \frac{x}{f'_P} \quad (x = F'M) \text{ donc : } \delta(M) \approx \frac{2dx}{f'_P}$$

en déduit l'interfrange : $\delta(x + \Delta x) = \delta(x) + \lambda$ soit

$$\Delta x = \frac{\lambda f'_P}{2d}$$

Pour aligner les axes, c'est-à-dire annuler la distance d , il faut rendre l'interfrange le plus grand possible.

E.4.a) La longueur de cohérence est la valeur maximale de la différence de marche permettant d'avoir des interférences. Sur la figure, on voit environ 5 franges de part et d'autre de la frange centrale ce qui veut dire que la différence de marche maximale est d'environ 5 longueur d'onde. On peut évaluer grossièrement la longueur de cohérence à $L_c = 5\lambda_{\text{moyen}} = 5 \times 0,55\ \mu\text{m} \approx 3\ \mu\text{m}$.

E.4.b) En gros $\Delta x = \frac{0,6\text{mm}}{10} = 0,06\text{mm}$ on en déduit $d = \frac{\lambda f'}{2\Delta x} = \frac{0,55 \cdot 10^{-6} \times 0,2}{2 \times 0,06 \cdot 10^{-3}} \approx 1\text{mm}$.

E.4.c) Le terme supplémentaire correspond à la différence de marche du coin d'air. Si l'obtention du contact optique n'a pas été réussi, il sera impossible de réaliser le réglage de l'annulation de d .

