

Electromagnétisme

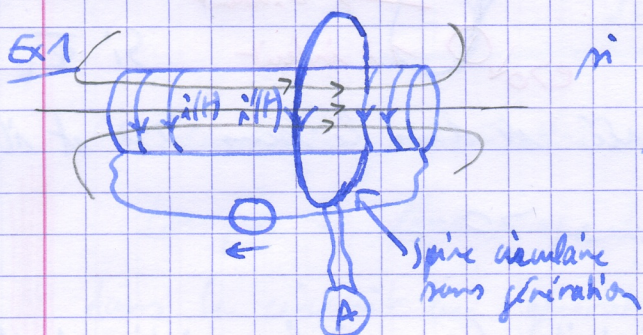
Chapitre 11

Induction emag

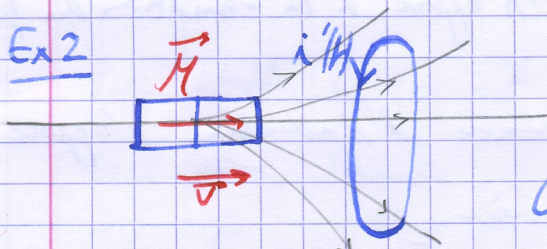
I) Le phénomène d'induction EM

1) découvert par Faraday (milieu XIX^e)

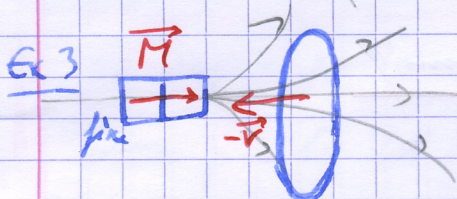
► Un champ \vec{B} variable peut créer un courant électrique.



si $i(t) = \text{cte}$ $i'(t) = 0$
 $i(t)$ varie, $i'(t) \neq 0$



si aimant fixe, $i'(t) = 0$
aimant en mouvement, $i'(t) \neq 0$
Le sens de i' dépend du sens de \vec{v}



mêmes résultats que Ex2

► Il y a apparition d'un courant dans la spire si :

- elle est fixe et traversée par un champ \vec{B} variable

(cas de Neumann) ex 1/2

- elle se déplace dans un champ \vec{B} stationnaire

(cas de Lorentz) ex 3

2) Loi de Faraday

Le phénomène d'induction se traduit par l'apparition dans le circuit d'un générateur fictif de force électromotrice (fem)

$$\mathcal{E}_{\text{induit}} = - \frac{d\Phi_B(\mathcal{C})}{dt}$$

NB circuit orienté : $\Phi_B(\mathcal{C}) = \Phi_B(\mathcal{S})$ où \mathcal{S} surface quel que délimitée par \mathcal{C} et orientée comme \mathcal{C} (règle MD)

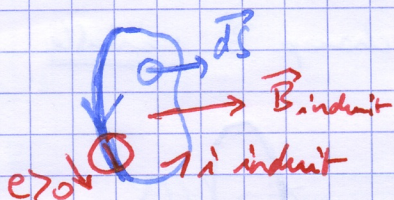
Le flux est indépendant de γ if \vec{B} est à flux conservatif -

$$\text{Or } \vec{B} = \text{rot } \vec{A} \quad \Phi_B(\mathcal{C}) = \iint_{\gamma} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint_{\gamma} \text{rot } \vec{A} \cdot d\vec{S} = \oint_{\gamma} \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

$$\Rightarrow \underline{\Phi_B(\mathcal{C}) = \text{Circ}_A(\mathcal{C})}$$

3) Loi de Lenz

$$e_{\text{induit}} = - \frac{d\Phi_B}{dt}$$



Si $\Phi_B \gg$, $e > 0$,

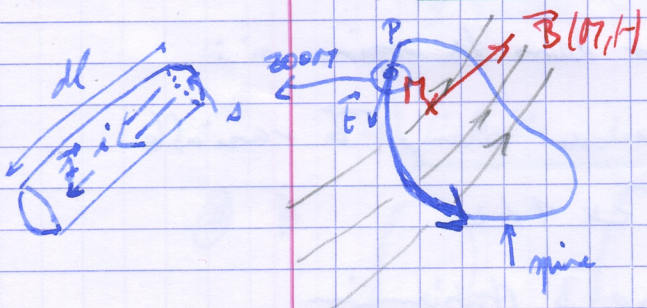
le courant induit i_{induit} est dans le sens > 0 et il crée un champ \vec{B}_{induit} et $\Phi_{\text{induit}} > 0$.

Le sens du courant induit s'oppose à la variation du flux mag.

Plus généralement : la phénoménologie d'induction s'oppose par ses conséquences à sa cause première.

II Induction, dans le cas de Neumann

1) Loi de Faraday



On considère une spire de fil conducteur section A , longueur totale L , conductivité γ résistance électrique $R = \frac{1}{\gamma} \frac{L}{S}$

spire plongée ds $\vec{B}(M, H)$ variable - soit i intensité éventuelle, comptée positivement ds le sens indiqué -

$$\vec{j} = \frac{i}{A} \vec{e} \quad \text{et } \vec{j}(P, H) = \gamma \vec{E}(P, H) = \gamma \left(-\frac{\partial \vec{A}(P, H)}{\partial t} - \text{grad } V \right)$$

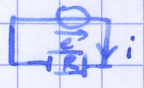
$$\text{Calculons } \oint_{\text{spire}} \frac{\vec{j}(P, H)}{\gamma} \cdot d\vec{l}_p = \oint_{\text{spire}} \left(\frac{i}{\gamma S} \vec{e} \right) \cdot (d\vec{l}_p \vec{e})$$

$$= \frac{i}{\gamma S} \oint d\vec{l}_p = \frac{iL}{\gamma S} = Ri$$

$$\text{ou } \oint_{\text{spire}} \vec{E} \cdot d\vec{l}_p = \oint_{\text{spire}} \left(-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad } V \right) \cdot d\vec{l}_p = \oint_{\text{spire}} -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot d\vec{l}_p + 0$$

Le terme $-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ est un champ électrique à circulation non conservative

$$\oint_{\text{spire}} -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot d\vec{l}_p = -\frac{d}{dt} \oint_{\text{spire}} \vec{A} \cdot d\vec{l}_p = -\frac{d}{dt} \iint_{\text{surface}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt} \Phi_B(\text{spire})$$

Finalement $Ri = -\frac{d\Phi_B(\text{spire})}{dt}$ loi des mailles pour circuit équivalent 

On admet la généralisation suivante :

Lorsque le flux mag à travers un circuit série varie, il apparaît dans le circuit un générateur fictif de fem e induit = $-\frac{d\Phi_B(t)}{dt}$

Pour étudier le circuit, il faut ajouter ce générateur au circuit.

Cette fem induite est dû au terme $-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ du champ élec appelé parfois champ électromoteur de Neumann.

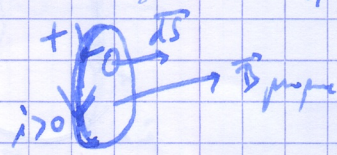
Ce terme provient de l'éqn locale dont la forme intégrale n'est autre que la loi de Faraday - circuit = $\oint_{\text{circuit}} -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot d\vec{l}$

2) Auto-induction

► Tout circuit parcouru par I courant crée un champ mag -

Le flux à travers le circuit de son propre champ \vec{B} s'appelle le flux propre -

Le flux propre a le même signe que i.



De plus, par linéarité de Biot et Savart, si $i \leftrightarrow \lambda i$ alors

$\vec{B}_{\text{propre}} \leftrightarrow \lambda \vec{B}_{\text{propre}}$ et $\Phi_{\text{propre}} \leftrightarrow \lambda \Phi_{\text{propre}}$

Le flux propre est proportionnel à i -

$$\Phi_{\text{propre}} = L i \quad \text{où } L \text{ auto-inductance } > 0$$

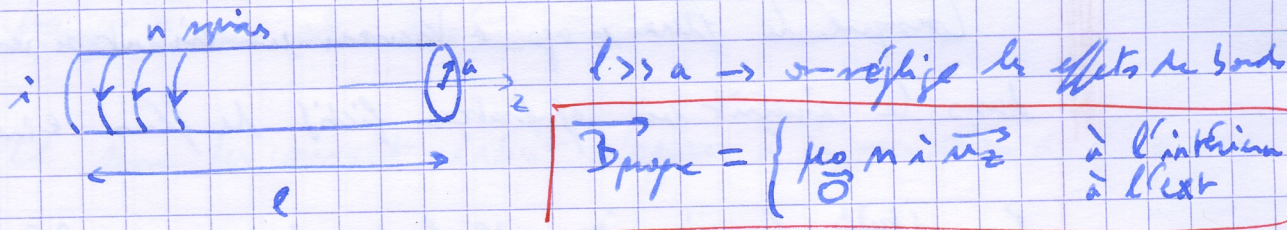
► Si un circuit est parcouru par une intensité variable $i(t)$, dans son flux propre varie et il apparaît dans le circuit une fém auto-induite

$$e_{\text{auto-induite}} = -\frac{d}{dt}(Li) = -L \frac{di}{dt} \quad \leftarrow \text{circuit indéformable}$$

► Flux mag à travers le circuit

$$\Phi_B(\text{circuit}) = \Phi_{\text{propre}} + \Phi_{\text{ext}}$$

► Exemple de calcul de L



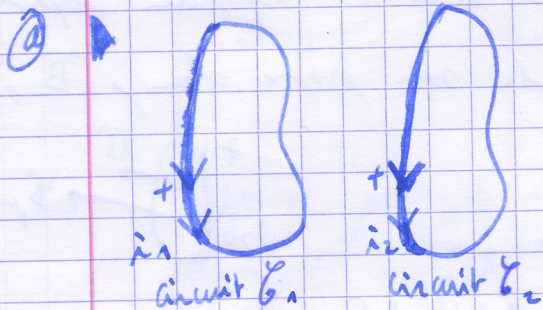
Le flux propre est le flux de \vec{B}_{propre} à travers les spires quasi circulaires des solénoïde

• flux à travers 1 spire : $\varphi = \pi a^2 \mu_0 i n$

• flux à travers le solénoïde

$$\Phi_{\text{propre}} = n \times \text{spires} \times \varphi = n l \times \varphi = \frac{\mu_0 \pi a^2 n^2 l}{L} i$$

4) Mutuelle induction



\vec{B}_2 champ créé par i_2 passant ds C_2

On note $\Phi_{B_2 \rightarrow 1}$ flux du champ \vec{B}_2 à travers le circuit C_1 .

Le flux est proportionnel à i_2 et s'écrit

$$\Phi_{B_2 \rightarrow 1} = M_{2 \rightarrow 1} i_2$$

$M_{2 \rightarrow 1}$ en H

► Réciprocité du flux magnétique

$$\Phi_{B_1 \rightarrow 2} = M_{1 \rightarrow 2} i_1$$

$$\text{et } \boxed{M_{1 \rightarrow 2} = M_{2 \rightarrow 1}}$$

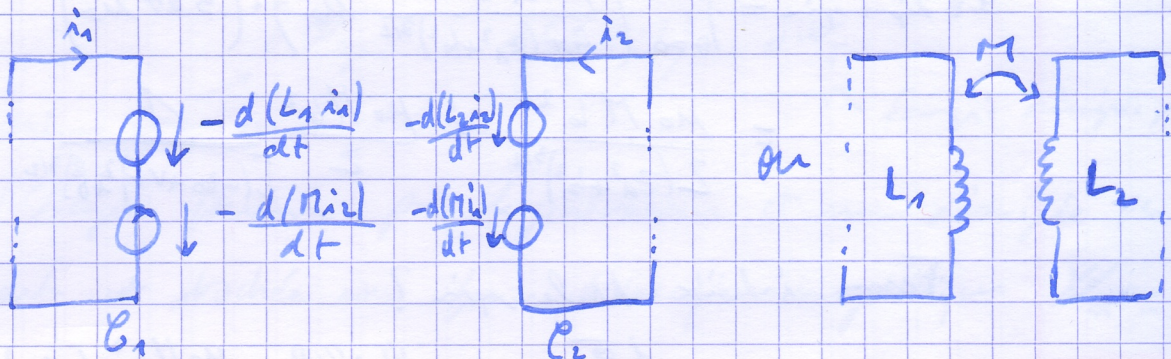
Dans la pratique on note $M = M_{12} = M_{21}$ coefficient de mutuelle inductance

► Propriété

$|M| \leq \sqrt{L_1 L_2}$

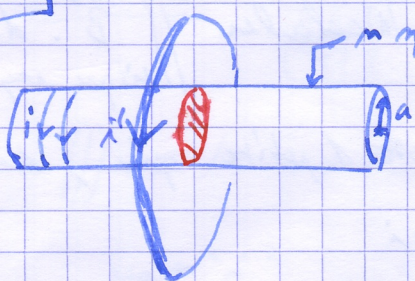
NB: Bluthy Schwanz

⑥ Si 2 circuits ont une mutuelle inductance, leurs schémas équivalents se présentent ainsi :



5) Exemples

Ex 1

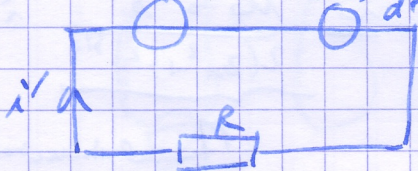


n spires / unité de longueur. Pour calculer i' , il faut un schéma équivalent de la spire tenant compte des phénomènes d'induction. $\Phi_B(\text{spire})$?

$\Phi_B(\text{spire}) = L(\text{spire}) i' + \Phi_{B \text{ ext} \rightarrow \text{spire}}$

$\frac{d(L(\text{spire}) i')}{dt} + \frac{d(M i)}{dt}$

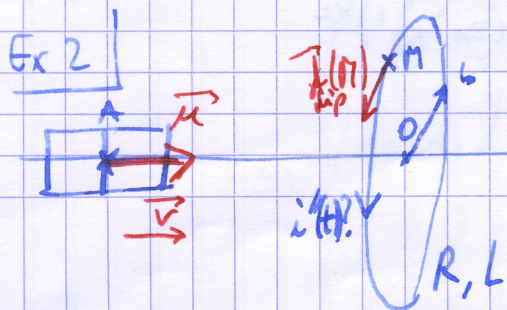
$(\pi a^2 \mu_0) \cdot (n n' i(t) \mu_0) = \frac{\pi a^2 \mu_0 n n' H}{M}$



loi des mailles : $-\frac{d(L(\text{spire}) i')}{dt} - \frac{d(M i)}{dt} = R i'$
 si $L(\text{spire}) = \text{cte}$, $M = \text{cte}$

$R i' + L(\text{spire}) \frac{di'}{dt} = -M \frac{di}{dt}$

Ex 2



$z_A = -z_0 + vt$

$\Phi_B(\text{spire}) = L i' / H + \Phi_{B \text{ dip} \rightarrow \text{spire}}$

$\Phi_{B \text{ dip} \rightarrow \text{spire}} ?$

$$\left. \begin{aligned} \vec{A}_{\text{dip}}(r,t) &= \frac{\mu_0 \vec{M} \wedge \vec{A} \vec{r}}{4\pi r^3} \\ \vec{B}_{\text{dip}}(r,t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(\vec{M} \cdot \vec{A} \vec{r}) \vec{A} \vec{r} - A r^2 \vec{M}}{r^5} \end{aligned} \right\}$$

$\Phi_{B \text{ dip} \rightarrow \text{spire}} = \oint_{\text{spire}} \vec{A}_{\text{dip}} \cdot d\vec{l}$ coord cyl d'axe Oz (ρ, θ, z)

$$\vec{A}_{\text{dip}}(M,t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{M \vec{u}_z \wedge (-z_A \vec{u}_z + b \vec{u}_\rho)}{(z_A^2 + b^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 M b}{4\pi (z_A^2 + b^2)^{3/2}} \vec{u}_\theta$$

$$\begin{aligned} \Phi_{B \text{ dip} \rightarrow \text{spire}} &= \int_{\theta=0}^{2\pi} \left(\frac{\mu_0 M b}{4\pi (z_A^2 + b^2)^{3/2}} \vec{u}_\theta \right) \cdot (b d\theta \vec{u}_\theta) \\ &= \frac{\mu_0 M b^2}{2 (z_A^2 + b^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 M b^2}{2} \frac{1}{[(z_A + vt)^2 + b^2]^{3/2}} \end{aligned}$$

Fem induite ds la spire ?

$$\mathcal{E}_{\text{induit}} = - \frac{d\Phi_B}{dt} = - \frac{d(\mathcal{L} i' / dt)}{dt} + \frac{\mu_0 M b^2}{2} \left(+ \frac{v}{z} \right) \frac{2v (z_0 + vt)}{[(z_0 + vt)^2 + b^2]^{5/2}}$$

Autres calculs pour le flux (calculer $\iint \vec{B} \cdot d\vec{S}$ sur une surface S)

(2) on imagine que le dipole est 1 petite spire, de surface S , parcourue par i' avec $\mathcal{M} = S i'$

$$\begin{aligned} \text{On calcule } \Phi_{B \text{ spire rayon } b \rightarrow \text{dip}} &\approx B_{\text{spire rayon } b} (A) \cdot (S \vec{u}_z) \\ &\approx \left(\frac{\mu_0 i' b^2 \vec{u}_z}{2(z_A^2 + b^2)^{3/2}} \right) \cdot (S \vec{u}_z) \\ &\approx \frac{\mu_0 b^2 S}{2(z_A^2 + b^2)^{3/2}} i' \end{aligned}$$

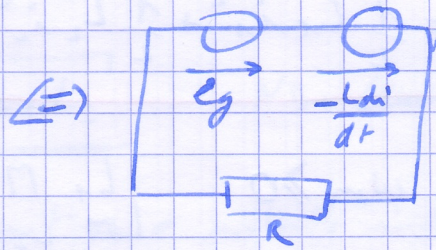
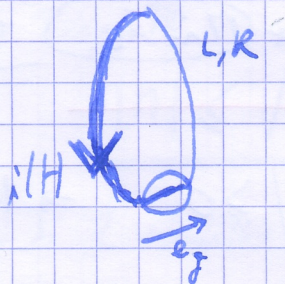
Mutual inductance $\neq \mathcal{L}$

et réciprocité de \vec{B} :

$$\Phi_{B \text{ dip} \rightarrow \text{spire}} = \mathcal{L} i' = \frac{\mu_0 b^2 \mathcal{M}}{2(z_A^2 + b^2)^{3/2}}$$

b) Energie mag

① Energie mag d'un circuit seul en l'espace



Kirchhoff

$$e_g = L \frac{di}{dt} + Ri$$

loi des mailles $\times idt$:

$$e_g idt = L di + Ri^2 dt$$

$$\int W_{qm} = d\left(\frac{1}{2} Li^2\right) + \int W_f$$

travail électrique fourni par le générateur

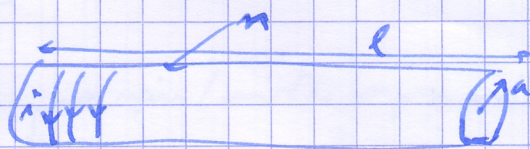
← Energie dissipée par effet Joule

L'énergie fournie par le générateur et non dissipée par effet

Joule est stockée sous forme d'énergie magnétique $W_m = \frac{1}{2} Li^2$

► On peut calculer l'auto-inductance L en calculant directement W_m

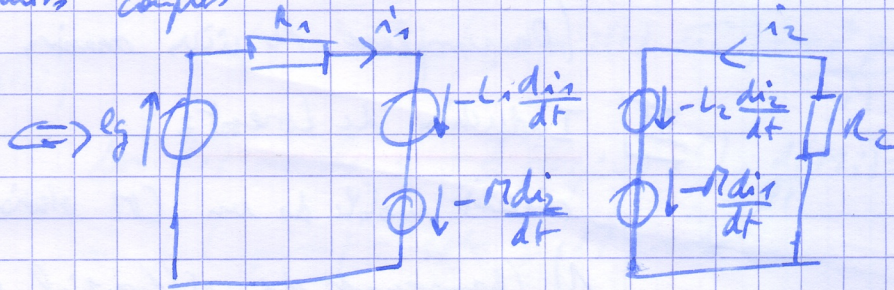
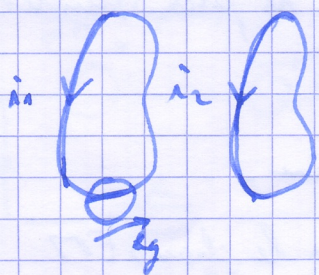
Ex) solénoïde



$$W_m = \iiint w_m d\tau, \quad w_m = \frac{1}{2\mu_0} B^2 = \begin{cases} \frac{\mu_0 n^2 i^2}{2} & \text{à l'intérieur} \\ 0 & \text{à l'extérieur} \end{cases}$$

$$W_m = \frac{\mu_0 n^2 i^2}{2} \times \pi a^2 l = \frac{1}{2} Li^2 \Rightarrow L = \mu_0 n^2 l \pi a^2$$

③ Cas de 2 circuits couplés



Kirchhoff

$$\begin{cases} e_g = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} & \times i_1 dt \\ 0 = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} & \times i_2 dt \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} e_g i_1 dt = R_1 i_1^2 dt + L_1 i_1 di_1 + M i_1 di_2 \\ 0 = R_2 i_2^2 dt + L_2 i_2 di_2 + M i_2 di_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow e_g i_1 dt = R_1 i_1^2 dt + R_2 i_2^2 dt + d\left(\frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2\right)$$

$$dW_{gen} = dW_R + dW_m$$

$$\text{soit } W_m = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2$$

→ énergie mutuelle

NB $W_m \geq 0$ car $W_m \geq 0 \quad \left| \begin{matrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{matrix} \right| \geq 0 \quad \Rightarrow |M| \leq \sqrt{L_1 L_2}$

7) Courants de Foucault

► Courants induits au sein d'un conducteur volumique sont appelés courants de Foucault.

► Pour calculer la densité volumique :

$$\text{loi d'Ohm locale: } \vec{j}(\vec{r}, t) = \gamma \vec{E}(\vec{r}, t)$$

$$\text{soit } \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \vec{A}(\vec{r}, t)}{\partial t} - \text{grad } V(\vec{r}, t)$$

CM induit par \vec{B} variable

► Applications :

- chauffage par induction : pièce métallique dans laquelle on développe des courants de F est chauffée par effet Joule

- blindage EM

- pertes par effet Joule minimales

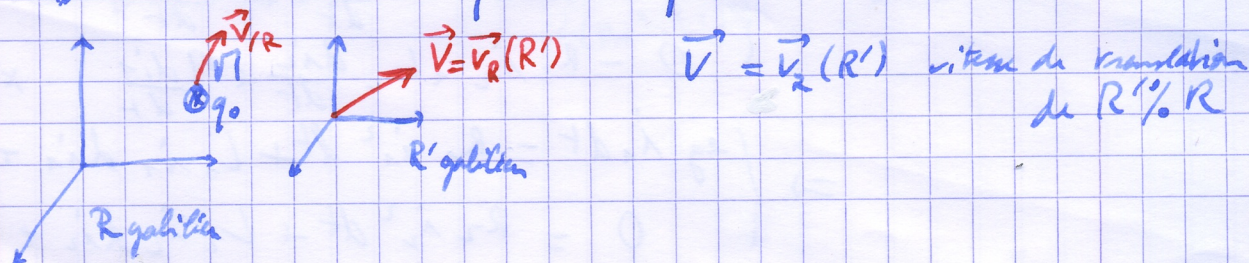
(On remplace des pièces massives par des pièces feuilletées isolées)

III Induction de Lorentz

circuit mobile ds un CM stationnaire.

1) Changement de référentiel pour le champ EM

► Cadre = mécanique classique



$\vec{E}(M,t), \vec{B}(M,t)$ champ dans R ; que vaut $\vec{E}'(M,t), \vec{B}'(M,t)$ dans R' ?
 Argument: la force de Lorentz sur une charge q_0 est la même dans R et R' .

(q invariante)

$$\vec{F} = q_0 (\vec{E} + \vec{v}_{IR} \wedge \vec{B}) = q_0 (\vec{E}' + \vec{v}_{IR'} \wedge \vec{B}')$$

ou $\vec{v}_{IR'}(q_0) = \vec{v}_{IR}(q_0) - \vec{V}$ donc $\forall \vec{v}_{IR}$,

$$\vec{E} + \vec{v}_{IR} \wedge \vec{B} = \vec{E}' + (\vec{v}_{IR} - \vec{V}) \wedge \vec{B}' = (\vec{E}' - \vec{V} \wedge \vec{B}') + \vec{v}_{IR} \wedge \vec{B}'$$

$$\rightarrow \begin{cases} \vec{E} = \vec{E}' - \vec{V} \wedge \vec{B}' \\ \vec{B} = \vec{B}' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{E}' = \vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B} \\ \vec{B}' = \vec{B} \end{cases}$$

NB Formules approchées valables à 2 conditions:

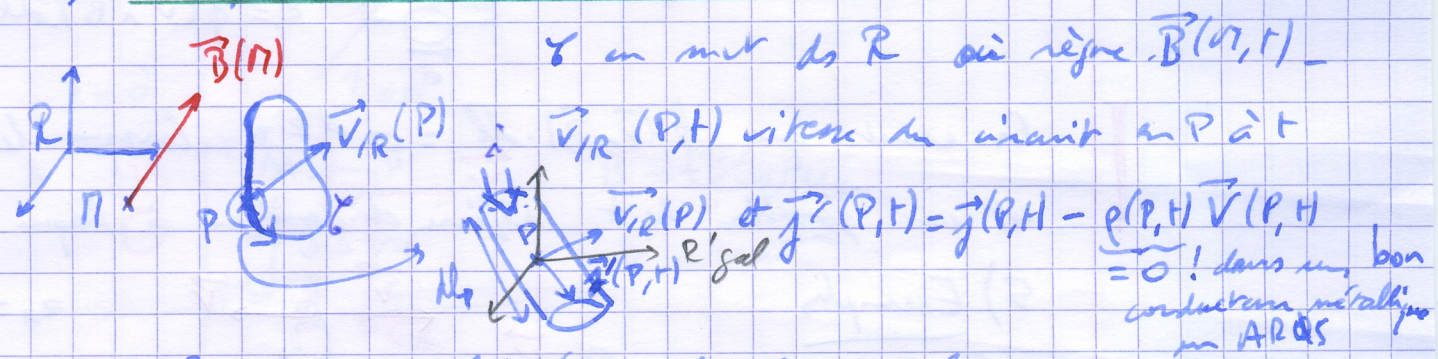
- $\|\vec{V}\| \ll c$
- champ EM à dominante magnétique ie $\|\vec{B}\| \gg \frac{\|\vec{E}\|}{c}$

► De plus $\rho = \rho'$ cf charge et volume invariants

$$\vec{j}' = \sum n_i' q_i \vec{v}_i' = \sum n_i q_i (\vec{v}_i - \vec{V})$$

$$\vec{j}' = \vec{j} - \rho \vec{V}$$

2) Champ électromagnétique de Lorentz



$\Rightarrow \vec{j}' = \vec{j}$; loi d'Ohm locale ds le ref en conducteur:

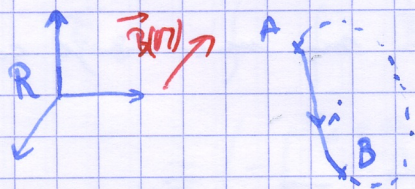
$$\vec{j}(P,t) = \gamma \vec{E}'(P,t) = \gamma (\vec{E}(P) + \vec{V}(P,t) \wedge \vec{B}(P))$$

ou $\vec{E}(P) = -\text{grad } V(P)$ car ds R' , \vec{B}' stationnaire

On appelle champ électromagnétique de Lorentz: $\vec{E}_m(P,t) = \vec{V}_{IR}(P,t) \wedge \vec{B}(P)$

et on a $\vec{j}(P,t) = \gamma (\vec{E}_m(P,t) - \text{grad } V(P))$

3) Loi d'Ohm généralisée



Loi d'Ohm généralisée
 en notant \vec{B} - Calculons $\int_A^B \frac{\vec{F}}{\gamma} \cdot d\vec{l}$

$$\int_A^B \frac{\vec{F}}{\gamma} \cdot d\vec{l} = \int_A^B \left(\frac{i \rho E}{\gamma} \right) \cdot (dl \vec{e}) \quad (\rho \text{ section du fil, } \vec{E} \text{ vect tangent})$$

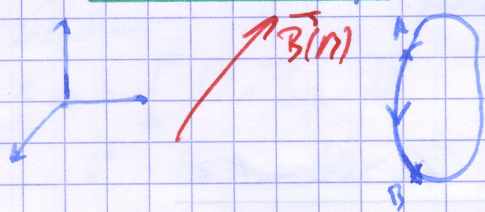
$$= \frac{i}{\gamma} \int_A^B dl = R_{AB} i$$

$$\int_A^B \frac{\vec{F}}{\gamma} \cdot d\vec{l} = \int_A^B \vec{E}_m \cdot d\vec{l} - \int_A^B \text{grad } V \cdot d\vec{l} = \int_A^B \vec{E}_m \cdot d\vec{l} - V(B) + V(A)$$

Donc $V(A) - V(B) = R_{AB} i - \int_A^B \vec{E}_m \cdot d\vec{l}$

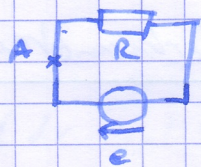
Schéma EC équivalent: où $R_{AB} = \int_A^B \vec{E}_m \cdot d\vec{l} = \int_A^B (\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{l}$
 e_{AB} force électromotrice induite entre A et B

4) Loi de Faraday



Si on fait $A=B$ dans la formule

on obtient un schéma équivalent:



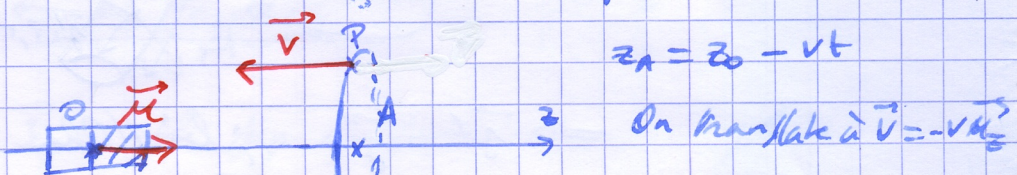
la résistance totale du circuit

$$e = \oint (\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

On admet que $\oint (\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{l} = - \frac{d\Phi_B}{dt}$ lorsque le flux $\Phi_B(t)$ est une fonction de t définie et continue à chaque instant.

5) Exemples

① Ex 3



$$z_A = z_0 - vt$$

On travaille à $\vec{v} = -v \vec{u}_x$

• Calcul de \vec{B} puis $e = - \frac{d\Phi_B}{dt}$: cf ex 2, c'est pareil.

$$e = \oint (\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

$$\vec{B}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\vec{M} \cdot \vec{OP})\vec{OP} - OP^2 \vec{M}}{OP^5}$$

$$\vec{OP} = \vec{OA} + \vec{AP} = z_A \vec{u}_z + b \vec{u}_y$$

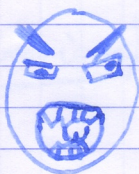
$$\vec{M} = M \vec{u}_z$$

sois malade
un peu!

$$\vec{B}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3Mz_A(z_A \vec{u}_z + b\vec{u}_r) - (z_A^2 + b^2)M\vec{u}_z}{(z_A^2 + b^2)^{5/2}}$$

$$B_r = \frac{3Mz_A b}{(z_A^2 + b^2)^{5/2}} \frac{\mu_0}{4\pi}$$

$$B_z = \frac{M(2z_A^2 - b^2)}{(z_A^2 + b^2)^{5/2}} \frac{\mu_0}{4\pi}$$



FF
FF
VV
VV
VV
VV

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = (-v\vec{u}_z) \wedge (B_r \vec{u}_r + B_z \vec{u}_z) = -v B_r \vec{u}_\theta$$

$$e = \oint (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{l} = \int_{\theta=0}^{2\pi} \left(-v \frac{3Mz_A b}{(z_A^2 + b^2)^{5/2}} \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{u}_\theta \right) \cdot (b d\theta \vec{u}_\theta)$$

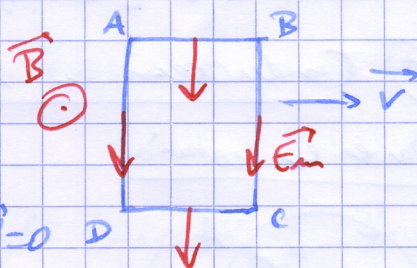
$$e = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3Mz_A b^2 v}{(z_A^2 + b^2)^{5/2}} \times 2\pi$$

b) Cadre en translation

• chp \vec{B} uniforme

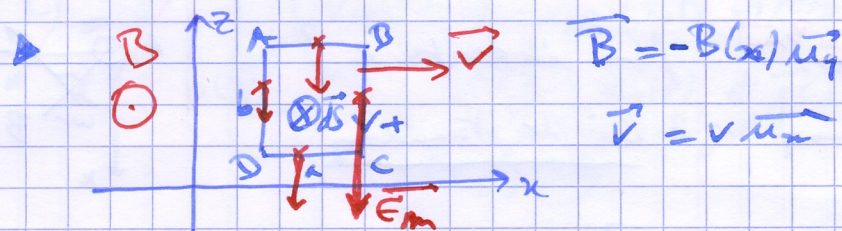
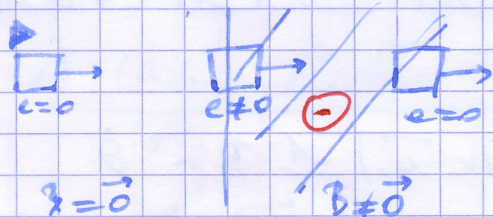
$\vec{E}_m = \vec{v} \wedge \vec{B}$ uniforme!

$$e = \oint \vec{E}_m \cdot d\vec{l} = E_m \oint d\vec{l} = 0$$



le même $\oint \vec{B} = \text{cte} \Rightarrow e = -\frac{d\Phi_B}{dt} = 0$

• chp non uniforme



$$e = \oint \vec{E}_m \cdot d\vec{l}; \quad \vec{E}_m = \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = -v B(x) \vec{u}_z \quad \perp \text{ à } AB \text{ et } CD$$

donc $e_{AB} = e_{CD} = 0$

$$\Rightarrow e = e_{BC} + e_{DA} = \left(-v B(x_B) \vec{u}_z \right) \cdot (b \vec{u}_z) + \left(-v B(x_D) \vec{u}_z \right) \cdot (b \vec{u}_z) \\ = vb (B(x_B) - B(x_D))$$

Par la loi de Faraday

$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_{x=x_A}^{x_A+a} \int_{z=z_A}^{z_A+b} (-B(x)\vec{u}_y) \cdot (dx dz \vec{u}_y)$$

$$= \left(- \int_{x_A}^{x_A+a} B(x) dx \right) \times b \quad \text{or } x_A = x_0 + vt$$

$$\Phi_B = -b \int_{x_0+vt}^{x_0+vt+a} B(x) dx$$

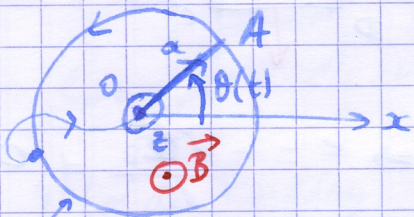
$$-\frac{d\Phi_B}{dt} = +b [v B(x_0+vt+a) - v B(x_0+vt)]$$

$$e = bv [B(x_B) - B(x_A)]$$

③ Conducteurs en rotation

► Barre en rotation

Barre conductrice OA tournant autour de Oz



$$(Ox, OA) = \theta$$

Chp $B = B \vec{u}_z$ uniforme et constant

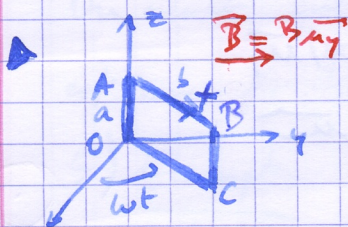
film eoa ?

circule induit

$$e_{oa} = \int_b^a (\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{l} \quad \vec{v}(M, t) = \vec{\omega} \wedge \vec{OM} = v \vartheta \vec{u}_\theta$$

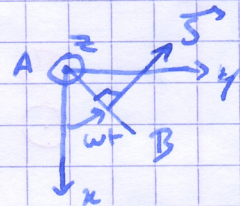
$$\vec{v} \wedge \vec{B} = B \vartheta r \vec{u}_r$$

$$e_{oa} = \int_{r=0}^a (B \vartheta r \vec{u}_r) \cdot (dr \vec{u}_r) = \frac{1}{2} B a^2 \vartheta$$



film induite e ?

• loi de Faraday



$$\Phi_B = \vec{B} \cdot \vec{S} \quad \text{if chp uniforme + surface plane}$$

$$d\vec{S} = ab (-\sin(\omega t) \vec{u}_z + \cos(\omega t) \vec{u}_y)$$

$$\rightarrow \Phi_B = B ab \cos(\omega t)$$

$$e = -\frac{d\Phi_B}{dt} = B ab \omega \sin(\omega t)$$

à partir du champ \vec{E}_m

$$\vec{E}_m = \vec{v} \wedge \vec{B} \quad \text{coord cyl } (r, \theta, z)$$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{OP} = (\omega \vec{u}_z) \wedge (r \vec{u}_r + z \vec{u}_z) = \omega r \vec{u}_\theta$$

$$\vec{B} = B \sin(\omega t) \vec{u}_r + B \cos(\omega t) \vec{u}_\theta$$

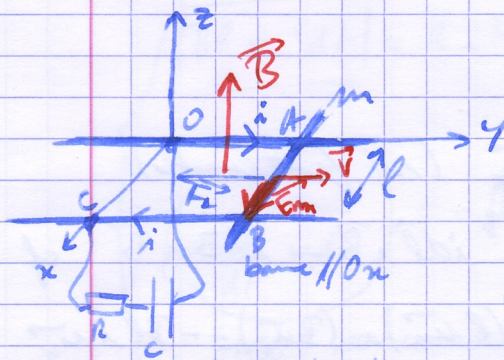
$$\vec{E}_m = \vec{v} \wedge \vec{B} = -B \omega r \sin \omega t \vec{u}_z$$

$$e = \int_{OABC} \vec{E}_m \cdot d\vec{l} = \int_0^a \vec{E}_m \cdot d\vec{l} \quad \text{if } \vec{E}_m = \vec{0} \text{ sur } OA \perp \text{ à } AB \text{ et } CD$$

$$e = \int_{z=0}^a (-B \omega b \sin(\omega t) \vec{u}_z) \cdot (dz \vec{u}_z) = \underline{B \omega b \sin(\omega t) a}$$

b) Deux dispositifs classiques

(a) Rails de Laplace



2 rails conducteurs

1 barre conductrice glisse le long des rails

champ mag : $\vec{B} = B \vec{u}_z$ uniforme constant

circuit électrique fermé entre les 2 rails et

contient une résistance R (résistance totale du circuit), une

capacité C , une inductance négligeable.

► CI - condensateur déchargé

- vitesse barre : $v_0 \vec{u}_y$

► Analyse qualitative

barre en mouvement de $\vec{B} \rightarrow$ induction de Lorentz

\rightarrow passage d'un courant i de la barre à la barre (loi de Lenz)

\rightarrow force de Laplace sur la barre i pousse la barre (loi de Lenz)

$$\vec{F}_L = i_{AB} \vec{AB} \wedge \vec{B}$$

► Misc en eqn

- choix d'orientation pour le mot (\vec{u}_y) et pour l'intensité
- eqn électrique

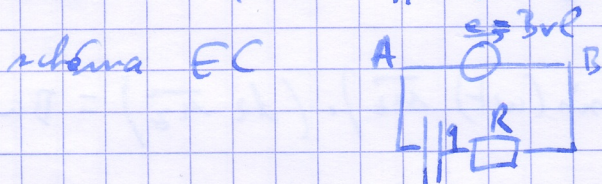
film induite: uniquement de AB

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{AB} = \int_A^B (\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

\uparrow
dix de A à B

$$\vec{v} \wedge \vec{B} = (v(t) \vec{u}_y) \wedge (B \vec{u}_z)$$

$$\mathcal{E} = Bv l$$



loi des mailles: $\mathcal{E} = Ri + \frac{q}{C}$

$$\underline{Blv = Ri + \frac{q}{C}, \quad i = \frac{dq}{dt}} \quad (E)$$

- eqn mécanique

BF • poids = $mg \vec{u}_z$

• réaction des rails $\vec{R} = R \vec{u}_z$ (en fait contacts)

• force de Laplace $\vec{F}_L = \int_A^B id\vec{l} \wedge \vec{B} = i \vec{AB} \wedge \vec{B}$ cf \vec{B} unit
 $= i (l \vec{u}_x) \wedge (B \vec{u}_z) = -Bl i \vec{u}_y$

$$\underline{\text{TRC} / \vec{u}_y : m \frac{dv}{dt} = -Bl i} \quad (M)$$

- résolution

$$\frac{d(E)}{dt} : Bl \frac{dv}{dt} = R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C}$$

$$\text{ds (M)} : - \frac{(Bl)^2}{m} i = R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C}$$

$$\frac{di}{dt} + \underbrace{\left(\frac{1}{RC} + \frac{(Bl)^2}{mR} \right)}_{\frac{1}{\tau_C}} i = 0 \Rightarrow i(t) = A e^{-t/\tau_C}$$

CI: (E) à $t=0$ $Blv_0 = RA + 0$

$$\Rightarrow \underline{i(t) = \frac{Blv_0}{R} e^{-t/\tau_C}}$$

$$(M) : \frac{dv}{dt} = -\frac{(Bl)^2}{mR} v_0 e^{-t/\tau} \quad v(t) = \tau \frac{(Bl)^2}{mR} v_0 e^{-t/\tau} + B$$

CI : $v(0) = v_0$

$$B = v_0 \left(1 - \tau \frac{(Bl)^2}{mR} \right)$$

$$v(t) = v_0 + v_0 \tau \frac{(Bl)^2}{mR} (e^{-t/\tau} - 1)$$

$$q(t) = -\tau \frac{Blv_0}{R} e^{-t/\tau} + D$$

CI : $q(0) = 0 \Rightarrow q(t) = \tau \frac{Blv_0}{R} (1 - e^{-t/\tau})$

► Bilan d'énergie

(E) $\times i dt$ | (M) $\times v dt$ on obtient des énergies
 (TRC \rightarrow $\times \omega dt$)

$$\int (Blv i dt) = R i^2 dt + \frac{q dq}{C}$$

$$\Rightarrow m v dv = -R i^2 dt - \frac{q dq}{C}$$

$$\frac{m dv}{dt} v dt$$

$= - \int (Blv i dt)$ (transfert d'énergie)

$$\Rightarrow d\left(\frac{1}{2} m v^2\right) = R i^2 dt + d\left(\frac{1}{2C} q^2\right)$$

pour source ou réservoir

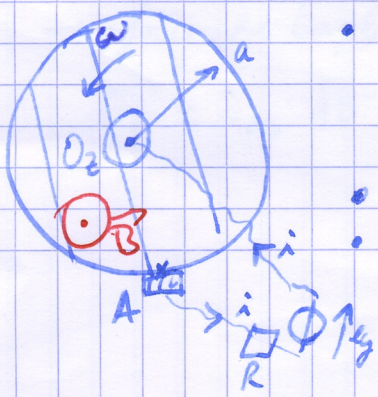
$$\Rightarrow -dE_C = \delta W_{\text{Joule}} + dW_{\text{el}}$$

Une partie de l'énergie cinétique de la barre est

- dissipée par effet Joule
- convertie en énergie électrique stockée dans le condensateur

Le transfert d'énergie mécanique \rightarrow énergie EM se fait sans perte :
 couplage électromécanique parfait.

② Disque de Barlow



- disque conducteur rayon a (carré) pivoté
- l'axe O_2 se fait autour de son axe horizontal O_2
- $\vec{B} = B \vec{u}_z$ unif constant
- contact électrique en O et en A

• circuit fermé avec générateur \mathcal{E} et capacité C

• CI : $\omega(0) = 0$

① Pour calculer $M_{L, Oz}$ on suppose que le courant suit de 0 à A $\textcircled{2}$ un trajet particulier (comme dans un fil), alors:

$$\begin{aligned} \vec{M}_{L, O} &= \int_0^A \vec{OM}_1 d\vec{F}_L \\ &= \int_0^A \vec{OM}_1 (i d\vec{L} \wedge \vec{B}) \\ &= \int_0^A [(\vec{OM} \cdot \vec{B}) i d\vec{L} - i(\vec{OM} \cdot d\vec{L}) \vec{B}] \\ &= \int_0^A [(\underbrace{r\vec{u}_r \cdot B\vec{u}_y}_{=0}) i (dr\vec{u}_r + r d\theta\vec{u}_\theta) - i(r\vec{u}_r \cdot (dr\vec{u}_r + r d\theta\vec{u}_\theta)) B\vec{u}_y] \end{aligned}$$

$$M_{L, Oz} = \int_0^A -i B r dr = \left[-\frac{1}{2} i B r^2 \right]_0^A = -\frac{1}{2} i B A^2$$

Ce résultat est indépendant du chemin entre 0 et A donc:
 - il reste valable si le courant suit plusieurs chemins \neq (ce qui est le cas)
 - il se retrouve en faisant comme si le courant allait en ligne droite entre 0 et A.

$$TMC / Oz : \int \frac{d\omega}{dt} = -\frac{1}{2} i B A^2 (M)$$

* Résolution: (M) $\rightarrow i = -\frac{2J}{Ba^2} \frac{d\omega}{dt}$ que l'on reporte dans (E):

$$e_g + \frac{1}{2} B a^2 \omega = -\frac{2J R}{B a^2} \frac{d\omega}{dt}$$

$$\omega + \frac{4J R}{(B a^2)^2} \frac{d\omega}{dt} = -\frac{2e_g}{B a^2}$$

solution: $\omega(t) = -\frac{2e_g}{B a^2} + A e^{-\frac{t}{\tau}}$ avec $\tau = \frac{4J R}{(B a^2)^2}$

C.I.: $\omega(0) = 0 \Rightarrow \omega(t) = -\frac{2e_g}{B a^2} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$

②

* Equation électrique?

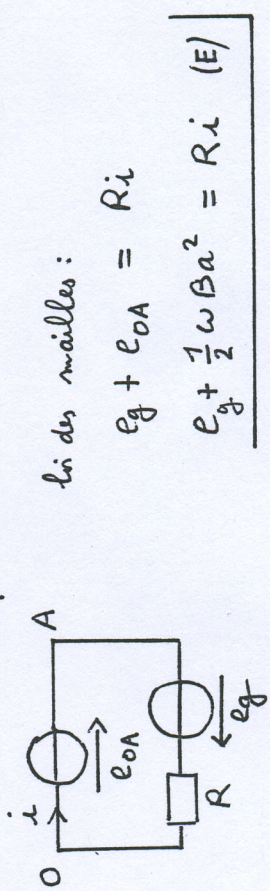
$$\begin{aligned} \rightarrow e_{OA} &= \int_0^A \vec{E}_m \cdot d\vec{L} \\ \text{avec } \vec{E}_m &= \vec{v} \wedge \vec{B} = (\vec{\omega} \wedge \vec{OM}) \wedge \vec{B} \\ &= (\vec{\omega} \cdot \vec{B}) \vec{OM} - (\vec{OM} \cdot \vec{B}) \vec{\omega} \\ &= (\omega \vec{u}_y \cdot B \vec{u}_y) r \vec{u}_r - (r \vec{u}_r \cdot B \vec{u}_y) \omega \vec{u}_y \\ &= \omega B r \vec{u}_r \end{aligned}$$

donc $e_{OA} = \int_0^A (\omega B r \vec{u}_r) \cdot (dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta)$
 déplacement élémentaire sur toute longueur

$$= \int_0^A \omega B r dr = \left[\frac{1}{2} \omega B r^2 \right]_0^A = \frac{1}{2} \omega B A^2$$

Ce résultat est indépendant du chemin du courant entre 0 et A (le courant suit en fait une infinité de lignes de courants \neq) donc on peut faire comme si le courant va en ligne droite de 0 à A

\rightarrow schéma électrocinétique:



loi des mailles:

$$e_g + e_{OA} = R i$$

$$e_g + \frac{1}{2} \omega B A^2 = R i \quad (E)$$

* Equation mécanique?

Bilan des actions: - poids de moment nul / Oz car appliqué en O
 - action de liaison de moment nul / Oz car les de frottements.
 - action de Laplace de moment $M_{L, Oz}$ calculé ci-après.

Puis par (M)

$$i = - \frac{2J}{Ba^2} \frac{d\omega}{dt} = \frac{e_g}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Remarque: $\omega < 0$, le rotor tourne dans le sens horaire, alors l'observation du schéma permet de se convaincre que \vec{E}_m est dirigé de A vers O, c'est-à-dire que $e_{OA} < 0$. Le phénomène d'induction contre le générateur ce qui est conforme à la loi de Lenz.

* Bilan d'énergie: à l'instant t

$$(E) \times i dt = \boxed{e_g i dt} + \left(\frac{1}{2} Ba^2 \omega i dt \right) = Ri^2 dt$$

$$(M) \times \omega dt = J \omega d\omega = - \left(\frac{1}{2} Ba^2 \omega i dt \right)$$

$$d'où \quad e_g i dt = Ri^2 dt + d \left(\frac{1}{2} J \omega^2 \right)$$

$$\delta W_g = \delta W_{Joule} + d E_c$$

L'énergie électrique fournie par le générateur est en partie dissipée par effet Joule, en partie convertie en énergie cinétique.

Plus précisément:

- l'énergie cinétique acquise par la roue à la fin de l'expérience est:

$$E_c = \frac{1}{2} J (\omega(\infty))^2 = \frac{2 J e_g^2}{(Ba^2)^2}$$

- l'énergie dissipée par effet Joule:

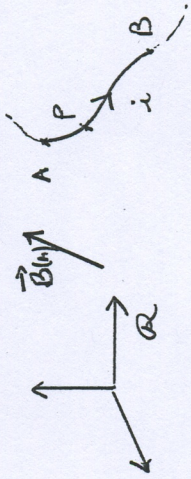
$$\begin{aligned} W_J &= \int_0^\infty Ri^2 dt = \int_0^\infty \frac{e_g^2}{R} e^{-\frac{2t}{\tau}} dt \\ &= \frac{e_g^2}{R} \times \frac{\tau}{2} = \frac{2 J e_g^2}{(Ba^2)^2} \end{aligned}$$

Il y a autant d'énergie tendue par effet Joule que convertie en énergie cinétique.

7) Relation des puissances

Il est apparu dans les exemples précédents que la puissance de l'actif mécanique de Laplace est égale et opposée à la puissance du générateur fictif induit (c'est le "terme de couplage"). Ce résultat est général.

Considérons un tronçon AB de circuit en mouvement dans un champ magnétique stationnaire \vec{B} :



$$\begin{aligned} P_{\text{générateur}} &= e_{AB} i \\ &= i \int_A^B \vec{E}_m \cdot d\vec{l} \\ &= i \int_A^B (\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{B} \, dl \\ &= i \int_A^B \vec{v} \cdot \vec{B} \, dl \\ &= - \int_A^B (i d\vec{l} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v} \, dl \\ &= - \int_A^B d\vec{F}_L \cdot \vec{v} \, dl \end{aligned}$$

$$\boxed{P_{\text{générateur}} = - P_L}$$

puissance de l'actif de Laplace

→ moteur: $P_L > 0$ donc $P_{\text{générateur}} < 0$, l'inducteur s'oppose au passage du courant

→ générateur: $P_{\text{générateur}} > 0$ donc $P_L < 0$, l'actif de Laplace s'oppose au déplacement.

(3)

(6)

(4)