MP 08/09 – D.M. de PHYSIQUE-CHIMIE n°10 pour le 05/01/09

1^er^ problème

Données :

permittivité du vide : $\varepsilon_0 = 8,85.10^{-12}$ S.I.

perméabilité du vide : $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ S.I.

vitesse de la lumière dans le vide : $c = 3.10^8\ \text{m.s}^{-1}$

charge élémentaire : $e = 1,6.10^{-19}$ C

masse de l'électron : $m_e = 9,1.10^{-31}$ kg

Formulaire :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\left(f\vec{a}\right) = f\,\overrightarrow{\text{rot}}\left(\vec{a}\right) + \overrightarrow{\text{grad}}f \wedge \vec{a}$$

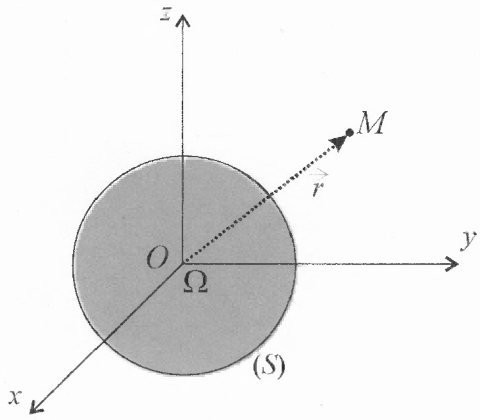
$$\vec{a} \wedge \left(\vec{b} \wedge \vec{c}\right) = \left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)\vec{b} - \left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\vec{c}$$

L'espace est rapporté à un repère $(Oxyz)$ définissant un référentiel galiléen $\mathcal{R}$.

On considère une sphère (S) de centre Ω et rayon R portant une charge Q uniformément répartie dans son volume.

Pour tout point M de l'espace, on note $\vec{r} = \overrightarrow{\Omega M}$, $r = \left\|\overrightarrow{\Omega M}\right\|$.

A- Dans cette partie (S) est fixe dans $\mathcal{R}$ et $\Omega = O$.



1) Exprimer la densité volumique de charge $\rho(P)$ en un point P à l'intérieur de (S).

2) Déterminer le champ électrique $\vec{E}_0(M)$ créé par (S). On exprimera le champ en fonction de $\vec{r}$ et r en distinguant les cas $r < R$ et $r > R$. Le champ est-il continu en $r = R$?

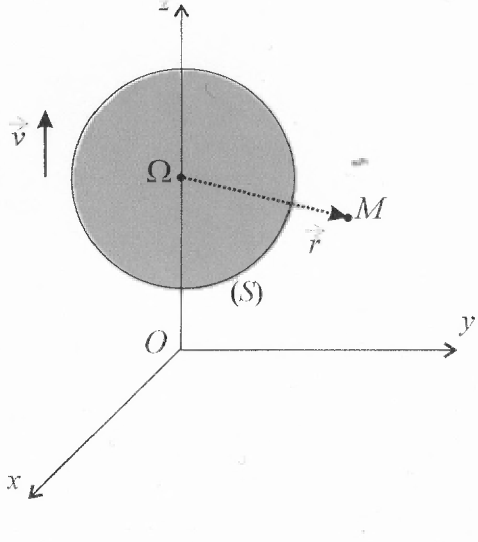
3) a) Rappeler l'expression de la densité volumique d'énergie électrostatique $w_{el}(M)$.

b) Calculer l'énergie électrostatique contenue dans (S).

c) Calculer l'énergie électrostatique contenue dans l'espace extérieur à (S).

d) Vérifier que l'énergie électrostatique contenue dans tout l'espace est $W_{el} = \dfrac{3Q^2}{20\pi\varepsilon_0 R}$.

B- Dans cette partie (S) est animée d'un mouvement de translation rectiligne uniforme de vitesse $\vec{v} = v\vec{e}_z$.



1) Exprimer la densité volumique de courant $\vec{j}(P,t)$ en un point P situé à l'intérieur de (S) à l'instant t.

2) Ecrire les équations de Maxwell vérifiées par le champ électromagnétique $\left[\vec{E}(M,t), \vec{B}(M,t)\right]$ créé par (S) en M en distinguant les cas $r < R$ et $r > R$.

3) Rappeler les expressions liant le champ électromagnétique $\left[\vec{E}(M,t), \vec{B}(M,t)\right]$ aux potentiels scalaire, $V(M,t)$, et vectoriel, $\vec{A}(M,t)$.

On admet que ces potentiels sont donnés par les expressions suivantes connues sous le nom de *potentiels retardés* :

$$V(M,t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_{P\in(S)}\frac{\rho\left(P,t-\frac{PM}{c}\right)}{PM}d\tau_P \quad \text{et} \quad \vec{A}(M,t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_{P\in(S)}\frac{\vec{j}\left(P,t-\frac{PM}{c}\right)}{PM}d\tau_P\,.$$

4) a) Donner une interprétation physique de ces formules.

b) Sans chercher à calculer les intégrales ci-dessus, montrer que $\vec{A}(M,t)=\frac{\vec{v}}{c^2}V(M,t)$.

c) Exprimer $\vec{E}(M,t)$ et $\vec{B}(M,t)$ en fonction de $\vec{v}$, c, $\overrightarrow{\text{grad}}\,V(M,t)$ et $\frac{\partial V(M,t)}{\partial t}$.

d) Montrer que : $\vec{B}(M,t)=\frac{\vec{v}}{c^2}\wedge\vec{E}(M,t)$.

Dans la suite on suppose que $\|\vec{v}\|\ll c$ et on néglige tout terme d'ordre supérieur ou égal à 2 en $\|\vec{v}\|/c$. On admettra que dans ces conditions $\vec{E}(M,t)$ a la même expression en fonction de $\vec{r}$ et r (grandeurs dépendant ici du temps) que le champ $\overrightarrow{E_0}(M)$ calculé à la partie A .

5) a) Rappeler l'expression de la densité volumique d'énergie magnétique $w_m(M,t)$.

b) Montrer que $w_m(M,t)=\frac{v^2}{c^2}\sin^2\theta\, w_{el}(M,t)$ où $w_{el}(M,t)$ est la densité volumique d'énergie électrique et $\theta=\left(Oz,\overrightarrow{\Omega M}\right)$.

c) Montrer que l'énergie magnétique contenue dans tout l'espace est $W_m=\frac{2}{3}\frac{v^2}{c^2}W_{el}$ où W_{el} a été calculée à la partie A . On donne $\int_0^{\pi}\sin^3\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{4}{3}$.

6) a) Rappeler l'expression générale du vecteur de Poynting $\vec{\Pi}(M,t)$.

b) Exprimer $\vec{\Pi}(M,t)$ en fonction de $\vec{v}$, c et $\vec{E}(M,t)$.

c) Représenter le vecteur Poynting en différents points situés sur une sphère de centre Ω de rayon $r>R$ tels que $\theta=0$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{4}$ et π. Que vaut le flux de $\vec{\Pi}$ à travers une sphère de centre Ω ?

C- On applique le modèle précédent au calcul du « rayon classique de l'électron ».

On suppose l'électron assimilable à une sphère de rayon R, de masse m_e et de charge $-e$ uniformément répartie dans son volume.

1) L'électron est au repos. En assimilant son énergie au repos, $m_e c^2$, à l'énergie électrostatique calculée à la partie A, trouver une expression R_1 de R. Calculer numériquement R_1.

2) L'électron est animé d'une vitesse $\vec{v}$ de norme faible devant c. En assimilant son énergie cinétique (que l'on calculera par la formule de la mécanique classique), à l'énergie magnétique calculée à la partie B, trouver une expression R_2 de R. Calculer numériquement R_2.

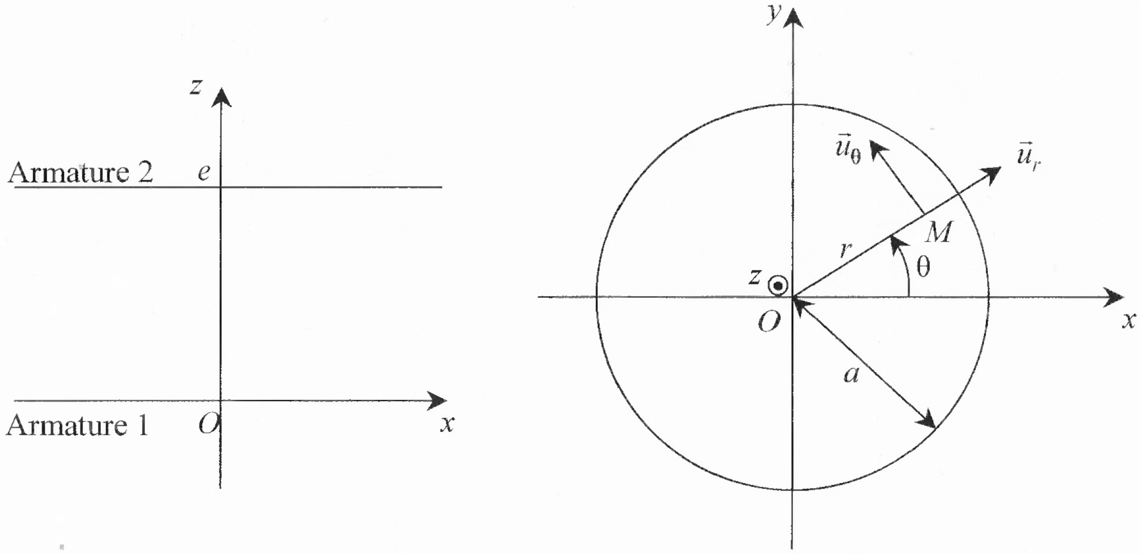
3) Commenter ces résultats.

$2^{ème}$ ***problème*** **(concours ATS 2006)**

SECOND PROBLÈME

LE CONDENSATEUR

On étudie un condensateur plan. Ce condensateur est supposé idéal, c'est-à-dire qu'on néglige tout effet de bord. Les armatures ont la forme de disque d'axe Oz et de rayon a. L'armature 1 est située en $z=0$ et l'armature 2 en $z=e$. On repère un point de l'espace par ses coordonnées cylindriques (r,θ,z). On notera $(\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{u}_z)$ la base correspondante. On se reportera aux figures ci-dessous. L'espace entre les armatures est défini par $0<z<e$ et $0<r<a$. Le milieu entre les armatures est assimilable au vide (permittivité ε_0 et perméabilité μ_0).



vue de dessus

5- Électrostatique

On se place en régime stationnaire. L'armature 1 porte la charge positive Q et l'armature 2 la charge négative $-Q$. Le condensateur plan étant supposé idéal, la charge surfacique est uniforme sur une armature (σ sur l'armature 1 et $-\sigma$ sur l'armature 2).

5.1 Exprimer la charge surfacique σ.

5.2 Donner l'expression du champ électrostatique entre les armatures en fonction de σ, ε_0 et $\vec{u}_z$.

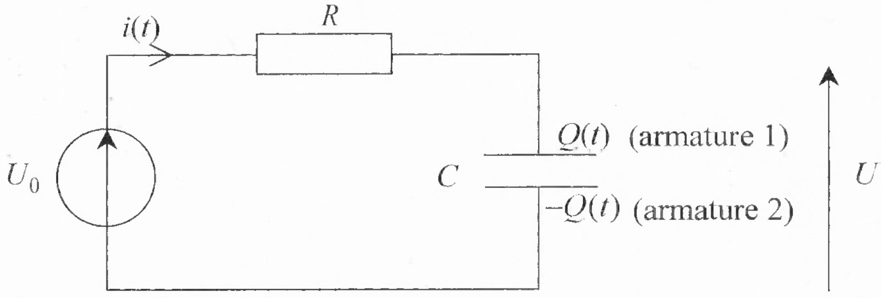
5.3 Déterminer la différence de potentiel entre les armatures $U=V_1-V_2$ où V_1 est le potentiel de l'armature 1 et V_2 le potentiel de l'armature 2.

5.4 Définir et exprimer la capacité C de ce condensateur en fonction de ε_0, e et S où S représente la surface d'une armature ($S=\pi a^2$).

5.5 Exprimer l'énergie potentielle W_p du condensateur en fonction du champ électrostatique E, de S, e et ε_0. Retrouver ainsi sur cet exemple l'expression de la densité volumique d'énergie électrique u_e.

6- *Charge du condensateur*

Le condensateur précédent étant initialement déchargé $(Q(t=0)=0)$, on le charge à l'aide du générateur idéal de tension de f.é.m. constante U_0. On note R la résistance du circuit. On se reportera au schéma ci-dessous pour les orientations.



A- *Champ électrique*

6.1 Déterminer la loi d'évolution de la charge Q en fonction du temps t. On fera intervenir dans cette expression la capacité C du condensateur, U_0 et la constante $\tau = RC$.

6.2 Tracer l'allure du graphe de Q en fonction de t. À quoi est homogène la constante τ ?

6.3 Déterminer, en fonction de C et U_0, pendant la durée de la charge (c'est-à-dire entre $t=0$ et t infini) :

- l'énergie W_1 fournie par le générateur ;
- l'énergie W_2 emmagasinée par le condensateur ;
- l'énergie W_3 dissipée par effet Joule.

6.4 On suppose que la charge Q varie suffisamment lentement pour que l'expression du champ électrique soit la même que celle obtenue en électrostatique à la question 5.2. Le champ électrique $\vec{E}(t)$ s'exprime donc en fonction de la charge surfacique instantanée $\sigma(t)$ au même instant t selon la même relation qu'en régime stationnaire. Écrire, en fonction de t, ε_0, U_0, e et τ, la densité surfacique de charge $\sigma(t)$ et le champ électrique $\vec{E}(t)$.

B- *Courant de déplacement*

6.5 On rappelle l'équation de Maxwell-Ampère : $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0\mu_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$. On appelle densité de courant de déplacement : $\vec{j}_D = \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$. On rappelle aussi l'égalité : $\varepsilon_0\mu_0 c^2 = 1$.

Écrire l'équation de Maxwell-Ampère dans le cas particulier de l'espace entre les armatures du condensateur. Exprimer la densité de courant de déplacement $\vec{j}_D$ en fonction de t, U_0, e, τ et ε_0.

6.6 Écrire la forme intégrale de l'équation de Maxwell-Ampère. Montrer qu'elle correspond à un théorème d'Ampère généralisé à condition d'inclure dans l'intensité enlacée le flux du courant de déplacement.

C- *Magnétostatique*

6.7 Pour déterminer le champ magnétique entre les armatures du condensateur, on étudie d'abord le dispositif suivant : un conducteur cylindrique infini, d'axe Oz (vecteur unitaire $\vec{u}_z$) et de rayon a, est parcouru par un courant stationnaire de densité uniforme $\vec{j} = j\vec{u}_z$. En étudiant les symétries du problème montrer que le champ magnétique $\vec{B}$

créé par cette distribution de courant est orthoradial et ne dépend que de r, c'est-à-dire que $\vec{B}$ peut s'écrire sous la forme :

$$\vec{B} = B(r)\vec{u}_\theta .$$

6.8 En appliquant le théorème d'Ampère, déterminer complètement le champ magnétique en fonction de μ_0, j et r pour $r < a$.

D- Champ magnétique

6.9 On revient au condensateur. À partir de la question 6.6, et en s'inspirant de la question 6.8, montrer que le champ magnétique entre les armatures s'écrit pour $r < a$:

$$\vec{B} = \frac{U_0 r}{2\tau e c^2} e^{-\frac{t}{\tau}} \vec{u}_\theta .$$

E- Puissance rayonnée

6.10 Rappeler la définition du vecteur de Poynting.

6.11 Montrer que le vecteur de Poynting en $r = a$ (à la limite de l'espace entre les armatures) peut s'écrire :

$$\vec{\Pi}(r = a, t) = \frac{\varepsilon_0 U_0^2 a}{2e^2\tau}\left(e^{-\frac{2t}{\tau}} - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)\vec{u}_r .$$

6.12 En déduire la puissance rayonnée *sortant* de l'espace entre les armatures.

6.13 Déterminer alors l'énergie électromagnétique qui est ***entrée*** dans l'espace compris entre les armatures pendant la charge du condensateur (c'est-à-dire entre $t = 0$ et t infini). Comparer avec l'énergie emmagasinée par le condensateur obtenue à la question 6.3.

7- Condensateur en régime sinusoïdal permanent

Le condensateur précédent est relié à un générateur idéal de tension délivrant une f.é.m. sinusoïdale. La charge $Q(t)$ portée par l'armature 1 varie donc sinusoïdalement selon la loi $Q = Q_0 \cos(\omega t)$. L'armature 2 porte une charge opposée. La charge se répartit encore uniformément sur les armatures. On suppose que les variations temporelles sont suffisamment lentes pour que le champ électrique entre les armatures conserve la même expression qu'en régime stationnaire.

7.1 Exprimer le champ électrique entre les armatures en fonction de Q_0, ω, ε_0, a et t.

7.2 Déterminer le champ magnétique entre les armatures (par la même méthode qu'à la question 6.9). On exprimera $\vec{B}$ en fonction de Q_0, ω, μ_0, a, r et t.

7.3 Rappeler la définition de la densité volumique d'énergie électromagnétique u_{em}, de la densité volumique d'énergie magnétique u_m et de la densité volumique d'énergie électrique u_e.

7.4 Montrer que le rapport de la densité volumique moyenne d'énergie magnétique sur la densité volumique moyenne d'énergie électrique s'écrit :

$$\frac{\langle u_m \rangle}{\langle u_e \rangle} = \frac{\omega^2 r^2}{4c^2} .$$

7.5 En déduire que si a/c est très petit devant la période $T = 2\pi/\omega$, la densité moyenne d'énergie électromagnétique se confond avec la densité moyenne d'énergie électrique. Si $a = 3$ cm, dans quel domaine de fréquence la condition précédente est-elle vérifiée (on rappelle que $c = 3.10^8$ m.s^{-1}) ? Cette condition est-elle vérifiée dans les montages usuels ? Que représente physiquement la durée a/c ?

Problème 3

Un analyseur de Fourier très simplifié (d'après Capes 2005)

I Quelques généralités:

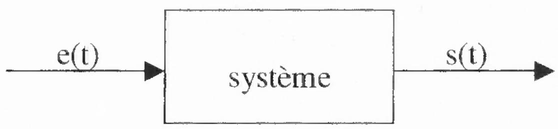
I.1 Soit un système physique qui à une grandeur d'entrée fonction du temps e (t) fait correspondre une grandeur de sortie fonction du temps s(t). A quelle condition ce système peut-il être dit linéaire ?

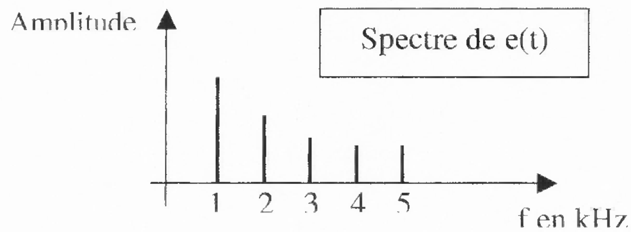
I.2. On étudie expérimentalement le transfert de plusieurs systèmes (système 1, système 2, système 3) à l'aide d'un analyseur de spectre numérique ; pour cela on applique à leur entrée le même signal e(t). On donne ci-dessous les spectres de Fourier du signal e(t) et ceux des signaux obtenus en sortie des trois systèmes.

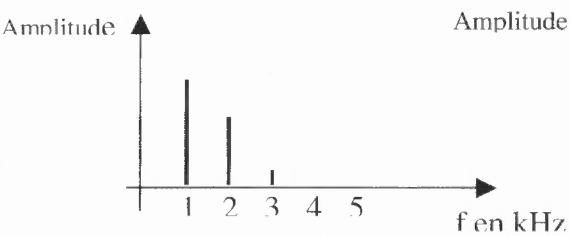
I.2.a. Qu'appelle-t-on spectre de Fourier d'un signal périodique s(t) ?

I.2.b. Le système 1 est-il linéaire ? Quel est son rôle ?

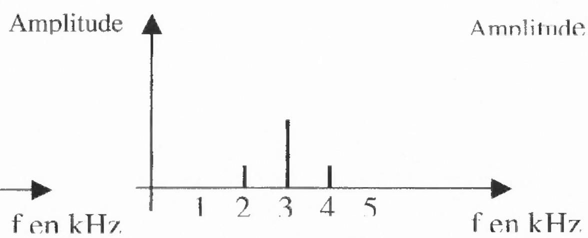
I.2.c. Qu'en est-il des systèmes 2 et 3 ?



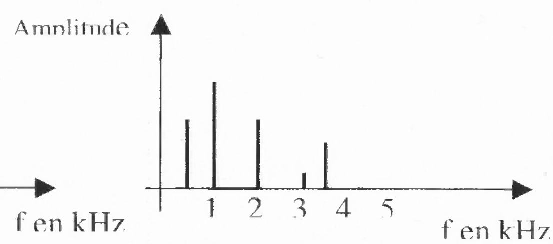




Système 1: spectre de s(t)

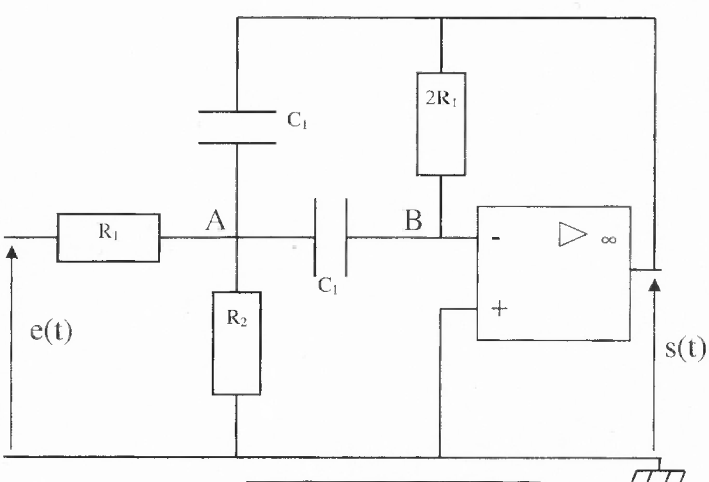


Système 2: spectre de s(t)



Système 3: spectre de s(t)

II Filtre sélectif.



Circuit II

On étudie le montage ci-contre:(**circuit II**)

L'amplificateur opérationnel est idéal et fonctionne en régime linéaire.

$R_1 = 200\,k\Omega$, $R_2 = 247\,\Omega$, C_1 est réglable.

II.1. Fonction de transfert.

On impose à l'entrée une tension e(t) sinusoïdale de pulsation ω. A chaque grandeur temporelle $x(t) = X\cos(\omega t + \varphi_x)$ on associe la grandeur complexe $\underline{x}(t) = Xe^{j(\omega t + \varphi_x)}$; on peut aussi utiliser l'amplitude complexe $\underline{X} = Xe^{j\varphi_x}$. On définit le transfert en tension $\underline{T}(\omega) = \underline{S}/\underline{E}$.

II.1.a. Établir le système d'équations vérifiées par $\underline{V}_A$, $\underline{V}_B$, $\underline{S}$ en fonction de $\underline{E}$ et des éléments du montage.

II.1.b. Montrer que l'on peut mettre $\underline{T}(\omega)$ sous la forme :

$$\underline{T}(\omega) = \frac{-1}{1 + j\left(R_1C_1\omega - \dfrac{1}{R_eC_1\omega}\right)} \quad \text{avec } R_e = \frac{2R_1.R_2}{R_1 + R_2}$$

II.1.c. Mettre $\underline{T}(\omega)$ sous la forme canonique $\underline{T}(\omega) = \dfrac{-1}{1 + jQ\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}$ et identifier Q et ω_0 en fonction de R_1, R_2 et C_1. Calculer la valeur numérique de Q.

II.1.d. Déterminer C_1 pour avoir $f_0 = \omega_0/2\pi$ = 1kHz puis 30 kHz.

II.2. Etude du gain.

On étudie $T(\omega) = |\underline{T}(\omega)|$,

II.2.a. Montrer que $T(\omega)$ passe par un maximum pour une valeur de ω que l'on exprimera.

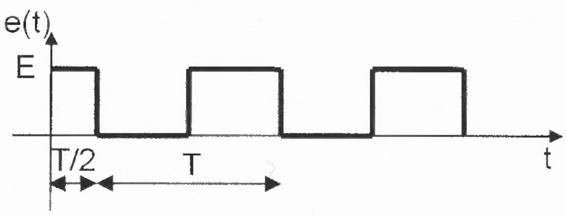
II.2.b. Définir, puis calculer les pulsations de coupure à - 3 dB en fonction de ω_0 et Q.
En déduire la largeur de la bande passante en pulsation B_ω.

II.2.c. Déduire de ce qui précède une interprétation possible du facteur de qualité Q.

II.2.d. Tracer l'allure de $T(\omega)$.

II.3. Analyseur de Fourier élémentaire.

On met à l'entrée de ce circuit II le signal e(t) représenté ci-contre, avec f =1/T= 3,0 kHz et E = 10 V.



On rappelle que l'on peut décomposer le signal e(t) en une combinaison linéaire de sinusoïdes sous la forme : $e(t) = a + \frac{2E}{\pi}\cos(2\pi.f.t) + \frac{2E}{3\pi}\cos(2\pi.3f.t) + \frac{2E}{5\pi}\cos(2\pi.5f.t) + ...$

II.3.a. Pourquoi le développement ci-dessus ne comporte-t-il que des termes en cosinus ? Que vaut a ?

II.3.b. Tracer l'allure du signal de sortie s(t) si le circuit **II** est réglé pour f_0 = 3,0 kHz.

II.3.c. Comment pourrait-on utiliser le circuit II pour déterminer le spectre en fréquence de e(t) ?